УДК 533.6.011 : 51

Нестационарное течение в магистральном газопроводе при продольном сейсмическом воздействии

А. В. Якунин

Харьковский национальный университет городского хозяйства имени А.Н. Бекетова, Украина

Рассматриваются нестационарные гидродинамические процессы в линейном участке магистрального газопровода, вызванные плоской продольной сейсмической волной, которая распространяется вдоль оси трубопровода, не приводя к ее смещению. Определяется распределение давления вдоль трассы при заданных его значениях на концах трубопровода. Предложено упрощенное приближенное аналитическое представление решения соответствующей модернизированной системы уравнений в частных производных на основе применения операционного исчисления и методов возмущений.

Ключевые слова: *нестационарное течение, телеграфное уравнение, сингулярное возмущение, метод малого параметра, операционное исчисление.*

Розглядаються нестаціонарні гідродинамічні процеси в лінійній ділянці магістрального газопроводу, викликані плоскою повздовжньою сейсмічною хвилею, яка поширюється вздовж осі трубопроводу, не приводячи до її зміщення. Визначається розподіл тиску вздовж траси при заданих його значеннях на кінцях трубопроводу. Запропоновано спрощене наближене аналітичне подання розв’язку відповідної модернізованої системи рівнянь у частинних похідних на основі застосування операційного числення і методів збурень.

Ключові слова: *нестаціонарна течія, телеграфне рівняння, сингулярне збурення, метод малого параметра, операційне числення.*

The nonstationary hydrodynamic processes in the linear part of main gas pipeline are considered that are caused by a flat longitudinal seismic wave, which propagates along the pipe axis without causing its displacement. Distribution of pressure along the piping line is defined by known pressure values at the ends of the pipeline. A representation of the simplified approximate analytical solution is proposed to the corresponding modernized system of equations in partial derivatives. The solution is based on application of operational calculus and perturbation methods.

Key words: *nonstationary current, telegraph equation, singular perturbation, method of small parameter, operational calculus.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

При проектировании и эксплуатации сложных технических систем различного назначения встают проблемы расчета механики трубопроводов и течений сплошной среды в них [1 – 7]. Нестационарный поток в магистральном газопроводе (МГ) с развитой шероховатостью рассматривается как турбулентное течение с тонким пристеночным ламинарным слоем. Такой режим характерен для МГ с линейными участками (ЛУ) протяженностью порядка нескольких сотен километров, прокладываемыми по дну морей или через горные перевалы, когда установка промежуточных компрессорных станций технически невозможна, а при этом в начале каждого участка создается аномально высокое давление до $15 \div 25 МПа$ [1]. Плотность транспортируемого

© Якунин А. В., 2016

газа достигает значений $150 \div 200\ кг/м^3$, скорость звука в нем увеличивается до $500 \div 600\ м/с$, а амплитуда волн давления и разрежения может превышать $1 МПа$, с чем необходимо считаться при проектировании и эксплуатации оборудования МГ. Даже если уровень пульсаций давления не представляет непосредственной опасности для стенок трубопровода, он может негативно повлиять на работу запорной арматуры и газоперекачивающих агрегатов, вызвать несанкционированное срабатывание систем контроля и автоматики.

Одной из причин нестационарных процессов в МГ может служить сейсмическое воздействие. Более чем на 10% территории бывшего Советского Союза наблюдаются сильные землетрясения (семь баллов и выше), в том числе на Прикарпатье и в Крыму. Среди всех видов сейсмических воздействий наибольшей силой обладают тектонические землетрясения, происходящие вследствие деформирования земной коры. Хотя часть выделенной энергии расходуется на преодоление трения, сцепления и на разрушение пород, но основным проявлением таких землетрясений служит распространение колебаний в окружающей упругой среде, что может вызвать серьезные нарушения штатной работы МГ.

2. Истоки исследования и цели работы

Основная цель исследований сейсмодинамики протяженных МГ состоит в выработке рекомендаций, которые позволят учесть особенности изменения напряженно-деформированного состояния стенок трубопровода и характер протекания гидродинамических процессов в газовом потоке. При этом они должны быть экономически целесообразными и согласованными с общей стратегией магистрального транспорта газа.

В общем случае, взаимодействие в системе «окружающая среда – трубопровод – транспортируемый газ» носит сложный трехсторонний обоюдный характер. В прикладных задачах, как правило, полагается, что движение среды (грунта) задано и не искажается другими компонентами системы. В частности, считается, что трубопровод не оказывает существенного влияния на механику грунта, однако сам вовлекается в движение и деформацию грунта. При этом трубопровод под внешним воздействием сейсмической волны рассматривается как тонкостенная оболочка, жестко впаянная в сплошную среду – внешний грунтовый массив. Колебания и деформации трубопровода вызывают пульсации внутреннего газового потока. В свою очередь, нестационарные процессы в транспортируемом газе становятся причиной динамических деформаций трубопровода. При расчетах эта обоюдность связей часто игнорируется, что упрощает постановку и решение соответствующих задач и во многих случаях позволяет получить практически приемлемые по точности результаты.

Среди обсуждаемых проблем особенную актуальность в последнее время приобрели вопросы гидроаэроупругости [2, 3], но и гидродинамические аспекты сохраняют свою злободневность [4 – 6]. В данной работе в одномерной постановке рассматриваются нестационарные гидродинамические процессы в длинном горизонтально расположенном линейном участке (ЛУ) МГ, вызванные плоской продольной сейсмической волной, которая распространяется вдоль оси трубопровода, не приводя к ее смещению. Определяется распределение давления вдоль трассы ЛУ МГ при заданных его значениях на концах трубопровода. В отличие от работы [5], в предлагаемой модели учитывается сжимаемость перекачиваемой среды и диссипация энергии, связанной с движением газа. Обсуждаются расчетные процедуры и вопросы дискретизации непрерывного представления.

3. Постановка задачи и ее упрощение

Предполагается, что каждая точка x трубопровода движется с ускорением по одному и тому же закону, который задается акселерограммой сейсмического воздействия $d^2x/dt^2 = f$, где $f = f(t)$ – произвольная интегрируемая функция, t – время. Если ввести неинерционную систему отсчета, связанную с трубопроводом, то его движение с ускорением приведет к появлению нестационарных распределенных массовых сил, действующих на весь объем газа в трубопроводе. Неустановившееся изотермическое движение газа представляется как наложение стационарного режима (основной фон) и нестационарных возмущений и (с обычно вводимыми упрощениями [1, 7]) описывается одномерной квазилинейной системой уравнений в частных производных гиперболического типа с дополнительным членом, который учитывает действие внешних инерционных сил

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \frac{\partial q}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon a \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\lambda q^2}{2D\rho} + \varepsilon a \rho f = 0 \tag{1}$$

при начальных

$$0 \le x \le L: \ q(x,0) = q_i(x); \ \ p(x,0) = p_i(x) \tag{2}$$

и граничных

$$t > 0: \ p(0,t) = p_{b0}(t); \ \ p(L,t) = p_{b1}(t) \tag{3}$$

условиях. Здесь $p = p(x,t)$ – давление; $q = q(x,t)$ – удельный массовый расход; $\rho = \rho(x,t)$ – плотность; c – скорость звука в газе, $c = \sqrt{zRT}$: T – температура, $T = T_0 = const$; R – газовая постоянная; z – коэффициент сжимаемости, $z = const$; L и D – длина и диаметр трубопровода; λ – коэффициент гидравлического сопротивления, $\lambda = const$; a – постоянный положительный коэффициент, $a = \sqrt{\lambda L/(2D)}$; $q_i(x)$, $p_i(x)$ и $p_{b0}(t)$, $p_{b1}(t)$ – функции, определяющие соответственно начальные и граничные условия; ε – малый положительный параметр, который отражает второстепенный характер воздействия на течение газа внутренних и внешних инерционных факторов, $\varepsilon = \sqrt{2D/(\lambda L)}$.

Опираясь на методы возмущений [8], краевая задача (1) – (3) допускает расщепление решения по малому параметру ε .

Используя уравнение состояния реального газа в форме $p = z\rho RT$, можно исключить из дифференциальной системы (1) плотность газа и представить ее в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t}+c^2\frac{\partial q}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial p}{\partial x}+\varepsilon a\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\lambda c^2 q^2}{2Dp}+\varepsilon\frac{apf}{c^2}=0. \tag{4}$$

Пусть $t_v = L/c$ – время распространения волны по длине трубопровода. Если ввести безразмерные переменные $\bar{p}=p/p_c$; $\bar{q}=q/q_0$; $\bar{x}=x/L$; $\bar{t}=t/t_v=ct/L$ и представить начальные и граничные условия как

$$0\le\bar{x}\le 1:\ \bar{q}(\bar{x},0)=\bar{q}_i(\bar{x})=1+\varepsilon\bar{q}_i^{(1)}(\bar{x});\ \ \bar{p}(\bar{x},0)=\bar{p}_i(\bar{x})=\bar{p}_0(\bar{x})+\varepsilon\,\bar{p}_i^{(1)}(\bar{x});\tag{5}$$

$$\bar{t}>0:\ \bar{p}(0,\bar{t})=\bar{p}_{b0}(\bar{t})=\bar{p}_0(0)+\varepsilon\,\bar{p}_{b0}^{(1)}(\bar{t});\ \ \bar{p}(1,\bar{t})=\bar{p}_{b1}(\bar{t})=\bar{p}_0(1)+\varepsilon\,\bar{p}_{b1}^{(1)}(\bar{t}),\tag{6}$$

где первые слагаемые соответствуют основному стационарному фону, а вторые слагаемые отражают его возмущения, причем [1, 7]

$$\bar{q}_0=1;\quad \bar{p}_0^2(1)=\bar{p}_0^2(0)-2a^2;\quad \bar{p}_0(\bar{x})=\sqrt{\bar{p}_0^2(0)-\left(\bar{p}_0^2(0)-\bar{p}_0^2(1)\right)\bar{x}}\,,\tag{7}$$

тогда можно получить краевую задачу для уравнений неразрывности и движения в безразмерной форме

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{t}}+\frac{\partial\bar{q}}{\partial\bar{x}}=0;\quad \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}+\varepsilon a\frac{\partial\bar{q}}{\partial\bar{t}}+\varphi\,\bar{q}+\varepsilon b\,\bar{p}\bar{f}=0\tag{8}$$

при начальных и граничных условиях (5), (6). Здесь $p_0=p_0(x)$, $q_0=const$ – значения давления и удельного массового расхода при основном стационарном режиме; $p_c=cq_0$ – некоторое характерное давление; b – постоянный коэффициент, $b=aL/c^2$; φ – переменный коэффициент, $\varphi=\varphi(\bar{x},\bar{t})=a^2\bar{q}/\bar{p}$; $\bar{f}=\bar{f}(\bar{t})=f(L\bar{t}/c)$. Причем учтено, что $\bar{q}_0=1$.

Для упрощения записей в дальнейших выкладках знак черты над переменными опущен.

От гидродинамической системы (8) можно перейти к одному телеграфному уравнению относительно давления. Продифференцировав первое уравнение (8) по t, а второе – по x и исключив саму переменную q и ее производные $\frac{\partial q}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial t}$, можно получить

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\varepsilon a\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}-\varepsilon\frac{a}{\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial t}-\varepsilon\frac{b}{\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot fp-\varphi\frac{\partial p}{\partial t}+\varepsilon\frac{bf}{\varphi}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}=0.\tag{9}$$

Согласно [7] функция $\varphi=\varphi(x,t)$ имеет малую крутизну по x, т.е. $\partial\varphi/\partial x\sim\varepsilon$. Тогда уравнение (9) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}-\varepsilon a\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\varepsilon\frac{a}{\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}-\varepsilon^2\frac{a^2}{\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{ab}{\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot fp-$$

$$-\varphi\frac{\partial p}{\partial t}+\varepsilon\frac{bf}{\varphi}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}=0.\tag{10}$$

Используя асимптотические разложения по малому параметру

$$p(x,t) = p^{(0)}(x) + \varepsilon\, p^{(1)}(x,t) + \ldots; \quad q(x,t) = q^{(0)} + \varepsilon\, q^{(1)}(x,t) + \ldots; \tag{11}$$

$$\varphi(x,t) = \varphi^{(0)}(x) + \varepsilon\varphi^{(1)}(x,t) + \ldots, \quad \varphi^{(0)} = a^2\, q^{(0)} \big/ p^{(0)}, \tag{12}$$

где в качестве нулевого приближения приняты параметры основного стационарного режима

$$p^{(0)} = p_0(x) \ \text{ и } \ q^{(0)} = 1, \tag{13}$$

можно получить рекуррентную последовательность краевых задач для $p^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$. Из практических соображений достаточно ограничиться расчетом до первого приближения

$$p = p^{(0)}(x) + \varepsilon\, p^{(1)} = p_0(x) + \varepsilon\, p^{(1)}. \tag{14}$$

4. Построение интегрально-разностной модели распределения давления с учетом продольного сейсмического воздействия

При $q_0 > 0$ стационарное давление $p_0(x)$ – монотонно убывающая функция. Для упрощения в уравнении (10) можно сделать замену $x \to u$, где $u = \left(p_0(x)\right)^{3/2}$. Тогда, обозначая $u_0 = \left(p_0(0)\right)^{3/2}$, $u_1 = \left(p_0(1)\right)^{3/2}$ и выражая производную dp_0/dx из стационарного уравнения движения [1, 7] (в принятых безразмерных переменных) $dp_0/dx + a^2/p_0 = 0$, можно получить

$$p^{(0)} = p_0(x) = u^{2/3}; \quad x = \frac{p_0^2(0) - p_0^2(x)}{p_0^2(0) - p_0^2(1)} = \frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}}; \tag{15}$$

$$\frac{dp_0}{dx} = -\frac{a^2}{p_0} = -a^2 u^{-2/3}; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial p_0} \cdot \frac{dp_0}{dx} \cdot \frac{\partial}{\partial u} = -\frac{3}{2} a^2 u^{-1/3} \cdot \frac{\partial}{\partial u}; \tag{16}$$

$$\frac{d\varphi^{(0)}}{dx} = -\frac{a^2}{p_0^2} \cdot \frac{dp_0}{dx} = -\frac{a^2}{u^{4/3}} \cdot \left(-a^2 u^{-2/3}\right) = a^4 u^{-2}. \tag{17}$$

В результате уравнение (10) принимает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \varepsilon \frac{4u^{2/3}}{9a^3} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{4u^{2/3}\varphi}{9a^4} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} - \varepsilon \frac{a}{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial p}{\partial u} - \varepsilon \frac{a}{3u} \cdot \frac{\partial p}{\partial u} -$$
$$- \varepsilon \frac{2bu^{1/3}}{3a^2\varphi} \cdot \frac{\partial p}{\partial u} \cdot f + \varepsilon^2 \frac{2bu^{1/3}}{3a\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot fp - \varepsilon^2 \frac{2u^{1/3}}{3\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} = 0, \tag{18}$$

где введением множителя ε учтена также малость пятого слагаемого.

Из уравнения (18) для первого приближения следует

$$\frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial u^2} - \frac{4u^{2/3}}{9a^4} \cdot \frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial t^2} - \frac{4}{9a^2} \cdot \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + \frac{2au^{-4/3}}{9} - \frac{4bu^{2/3} f}{9a^4} = 0. \tag{19}$$

Следует подчеркнуть, что в соотношении (19) оставлен малый член со второй производной по времени $\partial^2 p^{(1)} \big/ \partial t^2$, который отражает волновой характер исследуемого процесса. Его отбрасывание соответствует сингулярному возмущению исходного уравнения – переходу от гиперболического типа к параболическому, что нарушает корректность учета быстро осциллирующих внешних воздействий $f = f(t)$ и не позволяет адекватно описать принципиально важный начальный период времени протекания процесса, приводя к неустойчивым при $t \to 0$ вычислительным процедурам.

Усредняя малый коэффициент при этом дополнительном члене, уравнение (19) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial u^2} - a_1^2 \cdot \frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial t^2} - a_2 \cdot \frac{\partial p^{(1)}}{\partial t} + a_3\, u^{-4/3} - a_4\, u^{2/3} f = 0\,, \tag{20}$$

где постоянные положительные коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4 определяются выражениями

$$a_1^2 = \left(\frac{4u^{2/3}}{9a^4} \right)_{cp} = \frac{4}{9a^4} \cdot \frac{1}{u_0 - u_1} \cdot \int\limits_{u_1}^{u_0} u^{2/3} du = \frac{4\left(u_0^{5/3} - u_1^{5/3}\right)}{15a^4 (u_0 - u_1)}\,;$$

$$a_2 = \frac{4}{9a^2}\,; \quad a_3 = \frac{2a}{9}\,; \quad a_4 = \frac{4b}{9a^4}\,.$$

Начальные и граничные условия для первого приближения

$$u_1 \le u \le u_0: \quad p^{(1)}(u,0) = p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right); \quad \frac{\partial}{\partial t} p^{(1)}(u,0) = \frac{3a^2}{2u^{1/3}} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial u} q_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right); \tag{21}$$

$$t > 0: \quad p^{(1)}(u_0, t) = p_{b0}^{(1)}(t)\,; \quad p^{(1)}(u_1, t) = p_{b1}^{(1)}(t)\,. \tag{22}$$

Преобразуя уравнение (20) по Лапласу [9] по времени с учетом начальных условий (21), можно построить его операторное изображение

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}(u,s)}{\partial u^2} - a_1^2\, s^2 P^{(1)}(u,s) + a_1^2\, s\, p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) + \frac{3a^2 a_1^2}{2u^{1/3}} \frac{\partial}{\partial u} q_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) -$$

$$- a_2\, s\, P^{(1)}(u,s) + a_2\, p_i^{(1)} \left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}} \right) + a_3 u^{-4/3} \big/ s - a_4\, u^{2/3} F(s) = 0\,, \tag{23}$$

где $P^{(1)}(u,s)$ и $F(s)$ – изображения соответственно давления и внешних инерционных воздействий; s – параметр преобразования Лапласа.

Для учета волнового характера течения достаточно ограничиться наличием в уравнении (23) только второго слагаемого, а третье и четвертое, как менее значительные, отбросить (они частично отражают затухающее с течением времени влияние начальных условий). В результате получается операторное уравнение

$$\frac{\partial^2 P^{(1)}(u,s)}{\partial u^2} - \gamma^2 P^{(1)}(u,s) \ + 2G(u,s) = 0\,, \tag{24}$$

где $\gamma = a_1\sqrt{s(s+2\alpha)}\,; \quad \alpha = (1/2)\,a_2 \big/ a_1^2\,;$

$$G(u,s) = \frac{a_2}{2}\,p_i^{(1)}\left(\frac{u_0^{4/3} - u^{4/3}}{u_0^{4/3} - u_1^{4/3}}\right) + \frac{a_3 u^{-4/3}}{2s} - \frac{a_4}{2}u^{2/3}F(s)\,.$$

Решение уравнения (24) без учета граничных условий (22) можно представить в следующей нетрадиционной симметричной форме

$$P^{(1)}(u,s) = A(s)\cdot\exp\bigl(-\gamma(u_0-u)\bigr) + B(s)\cdot\exp\bigl(-\gamma(u-u_1)\bigr) +$$

$$+\int_{u_1}^{u}\frac{1}{\gamma}\exp\bigl(-\gamma(u-\theta)\bigr)G(\theta,s)\,d\theta + \int_{u}^{u_0}\frac{1}{\gamma}\exp\bigl(-\gamma(\theta-u)\bigr)G(\theta,s)\,d\theta\,, \tag{25}$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой. К выражению (25) можно прийти с помощью метода вариации произвольных постоянных. Соотношение (25) определяет решение операторного уравнения (24) без использования гиперболических функций. Такая форма записи изображения позволяет получить достаточно простые оригиналы.

Здесь $A(s)$ и $B(s)$ – произвольные функции, оригиналы которых $a(t)$ и $b(t)$ принимаются за вспомогательные так называемые волновые переменные [10]. Для их нахождения используются граничные условия (22):

$$A(s) + B(s)\cdot\exp\bigl(-\gamma(u_0-u_1)\bigr) + \int_{u_1}^{u_0}\frac{1}{\gamma}\exp\bigl(-\gamma(u_0-\theta)\bigr)G(\theta,s)\,d\theta = P_{b0}^{(1)}(s)\,; \tag{26}$$

$$A(s)\cdot\exp\bigl(-\gamma(u_0-u_1)\bigr) + B(s) + \int_{u_1}^{u_0}\frac{1}{\gamma}\exp\bigl(-\gamma(\theta-u_1)\bigr)G(\theta,s)\,d\theta = P_{b1}^{(1)}(s)\,, \tag{27}$$

где $P_{b0}^{(1)}(s)$ и $P_{b1}^{(1)}(s)$ – изображения заданных граничных условий.

Используя табличный оригинал [9]

$$\frac{\exp\left(-h\sqrt{s(s+2\alpha)}\right)}{\sqrt{s(s+2\alpha)}} \;\dot{=}\; \exp(-\alpha t)\cdot I_0\left(\alpha\sqrt{t^2-h^2}\right)\cdot\eta(t-h)$$

непосредственно и дифференцируя его по параметру h с учетом равенства $dI_0(t)\big/dt = I_1(t)$, а также применяя интеграл свертки оригиналов, можно в уравнениях (25) – (27) перейти во временную область и получить рекуррентные интегрально-разностные соотношения для давления и волновых переменных:

$$p(u,t) = u^{2/3} + \varepsilon R\bigl(t,\, a_1(u_0-u)\bigr)\,a\bigl(t - a_1(u_0-u)\bigr) + \varepsilon R\bigl(t,\, a_1(u-u_1)\bigr)\times$$

$$\times\, b\big(t-a_1(u-u_1)\big)+\varepsilon\,\eta\big(t-a_1(u_0-u)\big)\int\limits_0^{t-a_1(u_0-u)} S\big(t-\tau,\; a_1(u_0-u)\big)\, a(\tau)\, d\tau\; +$$

$$+\varepsilon\,\eta\big(t-a_1(u-u_1)\big)\int\limits_0^{t-a_1(u-u_1)} S\big(t-\tau,\; a_1(u-u_1)\big)\, b(\tau)\, d\tau +$$

$$+\varepsilon\frac{a_2}{2}\int\limits_{\theta_1(u,t)}^{\theta_2(u,t)} T\big(t,\; a_1\,|\,u-\theta\,|\big)\, p_i^{(1)}\left(\frac{u_0^{4/3}-\theta^{4/3}}{u_0^{4/3}-u_1^{4/3}}\right) d\theta+\varepsilon\frac{a_3}{2}\int\limits_{\theta_1(u,t)}^{\theta_2(u,t)} V\big(t,\; a_1\,|\,u-\theta\,|\big)\theta^{-4/3}\, d\theta -$$

$$-\,\varepsilon\frac{a_4}{2}\int\limits_{u_1}^{u_0}\theta^{2/3}\, d\theta\int\limits_{a_1|u-\theta|}^{t} T\big(\tau,\; a_1\,|\,u-\theta\,|\big)\, f(t-\tau)\, d\tau\,; \qquad (28)$$

$$a(t)=p_{b0}^{(1)}(t)\;-\;R\big(t,\; a_1(u_0-u_1)\big)\, b\big(t-a_1(u_0-u_1)\big)-\eta\big(t-a_1(u_0-u_1)\big)\times$$

$$\times\int\limits_0^{t-a_1(u_0-u_1)} S\big(t-\tau,\; a_1(u_0-u_1)\big) b(\tau)\, d\tau-\frac{a_2}{2}\int\limits_{\theta_1(u_0,t)}^{u_0} T\big(t,\; a_1(u_0-\theta)\big) p_i^{(1)}\left(\frac{u_0^{4/3}-\theta^{4/3}}{u_0^{4/3}-u_1^{4/3}}\right) d\theta -$$

$$-\frac{a_3}{2}\int\limits_{\theta_1(u_0,t)}^{u_0} V\big(t,\; a_1(u_0-\theta)\big)\theta^{-4/3}\, d\theta+\frac{a_4}{2}\int\limits_{u_1}^{u_0}\theta^{2/3}\, d\theta\int\limits_{a_1(u_0-\theta)}^{t} T\big(\tau,\; a_1(u_0-\theta)\big)\, f(t-\tau)\, d\tau\,; \quad (29)$$

$$b(t)=p_{b1}^{(1)}(t)\;-\;R\big(t,\; a_1(u_0-u_1)\big)\, a\big(t-a_1(u_0-u_1)\big)-\eta\big(t-a_1(u_0-u_1)\big)\times$$

$$\times\int\limits_0^{t-a_1((u_0-u_1))} S\big(t-\tau, a_1(u_0-u_1)\big)\, a(\tau)\, d\tau\; -\frac{a_2}{2}\int\limits_{u_1}^{\theta_2(u_1,t)} T\big(t,\; a_1(\theta-u_1)\big)\, p_i^{(1)}\left(\frac{u_0^{4/3}-\theta^{4/3}}{u_0^{4/3}-u_1^{4/3}}\right) d\theta -$$

$$-\frac{a_3}{2}\int\limits_{u_1}^{\theta_2(u_1,t)} V\big(t,\; a_1(\theta-u_1)\big)\theta^{-4/3}\, d\theta+\frac{a_4}{2}\int\limits_{u_1}^{u_0}\theta^{2/3}\, d\theta\int\limits_{a_1(\theta-u_1)}^{t} T\big(\tau,\; a_1(\theta-u_1)\big)\, f(t-\tau)\, d\tau\,, \quad (30)$$

причем $a(t)=0$ и $b(t)=0$ при $t\le 0$.

Вспомогательные функции $\theta_1(h,t)$, $\theta_2(h,t)$, $R(t,h)$ и ядра интегральных операторов $S(t,h)$, $T(t,h)$, $V(t,h)$ определяются выражениями

$$\theta_1(h,t)=\max\{u_1\,,\, h-t\,/\,a_1\}\,;\;\; \theta_2(h,t)=\min\{u_0\,,\, h+t\,/\,a_1\}\,; \qquad (31)$$

$$R(t,h)=\exp(-\alpha h)\;\eta(t-h)\,; \qquad S(t,h)=\frac{\alpha\, h\, \exp(-\alpha\, t)}{\sqrt{t^2-h^2}}\; I_1\!\left(\alpha\sqrt{t^2-h^2}\right); \qquad (32)$$

$$T(t,h)=\frac{1}{a_1}\exp(-\alpha\, t)\; I_0\!\left(\alpha\sqrt{t^2-h^2}\right)\eta(t-h)\,; \qquad (33)$$

$$V(t,h)=\int\limits_0^t T(\tau,h)\, d\tau=\frac{1}{a_1}\eta(t-h)\int\limits_h^t \exp(-\alpha\,\tau)\; I_0\!\left(\alpha\sqrt{\tau^2-h^2}\right) d\tau\,. \qquad (34)$$

Здесь $\eta(t)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда: $\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$; $I_0(t)$ и $I_1(t)$ – модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков.

Обращение преобразования Лапласа применением интеграла свертки оригиналов позволяет избежать разложения изображений в бесконечные ряды, что значительно упрощает математические выкладки и существенно уменьшает объем вычислений.

Интегрально-разностная модель (28) – (30) служит обобщением известного решения волнового уравнения в форме суперпозиции прямой и обратной волн, которые в отсутствии трения сохраняют свои амплитуды при распространении по трубопроводу. Наличие гидравлического сопротивления приводит к тому, что каждая из волн испытывает искажения в результате затухания и многократных отражений, однако не изменяет величины ее запаздывания при распространении по трубопроводу. Указанные искажения учитываются в соотношениях (28) – (30) с помощью интегралов свертки, которые представляют собой непрерывные суммы отраженных волн, образуемых не только на концах, но и в промежуточных сечениях трубопровода под влиянием гидравлического сопротивления.

Предложенная интегрально-разностная модель позволяет определить давление в любой точке ЛУ МГ в произвольный момент времени. В правые части выражений (28) – (30) искомые величины входят с запаздыванием. Расчеты сводятся к последовательному интегрированию. Вычисление квадратур можно осуществить стандартными методами.

5. Упрощение расчетных соотношений

Система равенств (28) – (34) определяет распределение давления вдоль трассы ЛУ МГ до возмущений первого порядка включительно при произвольных начальных и граничных условиях и произвольном виде акселерограммы $d^2x/dt^2=f$. Однако эти соотношения являются довольно сложными, что затрудняет проведение оперативных расчетов. Учет особенностей постановки задачи и процесса синтеза результирующей модели – аппроксимационный характер исходной системы уравнений в частных производных, принятые в ходе ее трансформации усреднения коэффициентов, пренебрежение в рамках метода возмущений величинами второго и выше порядков малости, кратковременность внешних инерционных воздействий – позволяет, практически не снижая точности получаемых результатов, значительно упростить расчетные формулы и повысить быстродействие вычислений.

Условиям моделируемых процессов отвечают малые значения безразмерного времени t. Поэтому при $t\to 0$ в области оригиналов и, соответственно, при $s\to\infty$ в области изображений можно использовать приведенные ниже соотношения (громоздкие промежуточные выкладки опущены). Они основаны на приближенной замене соответствующей функции-изображения $F(r,\beta)$, где

$r = s + \alpha$ и $\beta = \alpha^2$, частной суммой ее ряда Тейлора по второму аргументу β: $F(r,\beta) \approx F(r,0) + \left(\partial F(r,0)/\partial\beta\right)\cdot\beta$, в которой оставлены члены до первого порядка по β включительно. Из вида рассматриваемых функций $F(r,\beta)$ вытекает, что полученные приближения тем точнее, чем меньше отношение $\alpha/(s+\alpha)$.

$$\sqrt{s(s+2\alpha)} = \sqrt{(s+\alpha)^2-\alpha^2}\ ;\ S(t,h) \doteqdot \exp\left(-h\sqrt{(s+\alpha)^2-\alpha^2}\right) - \exp\left(-h(s+\alpha)\right) \approx$$

$$\approx \exp(-\alpha h)\cdot\exp(-hs)\cdot\frac{\alpha^2 h}{2}\cdot\frac{1}{s+\alpha} \doteqdot \frac{\alpha^2 h}{2}\cdot\exp(-\alpha t)\cdot\eta(t-h)\,; \tag{35}$$

$$T(t,h) \doteqdot \frac{\exp\left(-h\sqrt{(s+\alpha)^2-\alpha^2}\right)}{\sqrt{(s+\alpha)^2-\alpha^2}} \approx \exp(-\alpha h)\cdot\exp(-hs)\cdot\left(\frac{1}{s+\alpha}+\frac{\alpha^2 h}{2}\cdot\frac{1}{(s+\alpha)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{1}{(s+\alpha)^3}\right) \doteqdot \exp(-\alpha t)\cdot\left(1+\frac{\alpha^2}{4}(t^2-h^2)\right)\cdot\eta(t-h)\,; \tag{36}$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{(s+\alpha)-\alpha} = \frac{1}{s+\alpha}\cdot\frac{1}{1-\alpha/(s+\alpha)} \approx \frac{1}{s+\alpha}\cdot\left(1+\frac{\alpha}{s+\alpha}+\frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2}\right); \tag{37}$$

$$V(t,h) \doteqdot \frac{1}{s}\cdot\frac{\exp\left(-h\sqrt{(s+\alpha)^2-\alpha^2}\right)}{\sqrt{(s+\alpha)^2-\alpha^2}} \approx \frac{1}{s+\alpha}\cdot\left(1+\frac{\alpha}{s+\alpha}+\frac{\alpha^2}{(s+\alpha)^2}\right)\cdot\exp(-\alpha h)\times$$

$$\times\exp(-hs)\cdot\left(\frac{1}{s+\alpha}+\frac{\alpha^2 h}{2}\cdot\frac{1}{(s+\alpha)^2}+\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{1}{(s+\alpha)^3}\right) \approx \exp(-\alpha h)\cdot\exp(-hs)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(s+\alpha)^2}+\frac{\alpha(2+\alpha h)}{2}\cdot\frac{1}{(s+\alpha)^3}+\frac{3\alpha^2}{2}\cdot\frac{1}{(s+\alpha)^4}\right) \doteqdot \frac{1}{4}(t-h)\exp(-\alpha t)\times$$

$$\times\left(4+\alpha(2+\alpha t)(t-h)\right)\cdot\eta(t-h)\,. \tag{38}$$

Итоговые выражения (35) – (38) для ядер $S(t,h)$, $T(t,h)$, $V(t,h)$ интегральных операторов не содержат вычислительно затратных операций извлечения квадратного корня и определения значений функций Бесселя. Их также можно получить, используя разложения модифицированных функций Бесселя в степенные ряды [9].

Исходя из упрощенных формул (35) – (38) и изменяя порядок интегрирования в повторных интегралах, можно преобразовать и аналитически вычислить отдельные составляющие соотношений (28) – (30):

$$\int_{\theta_1(u,t)}^{\theta_2(u,t)} V\big(t,\, a_1\,|\,u-\theta\,|\big)\theta^{-4/3}d\theta = \frac{3}{4}\exp(-\alpha t)\cdot\Big\{(1/5)\alpha(2+\alpha t)a_1^2\Big(\theta_2^{5/3}(u,t)-\theta_1^{5/3}(u,t)\Big)-$$

$$-\alpha(2+\alpha t)a_1^2 u\Big(\theta_2^{2/3}(u,t)-\theta_1^{2/3}(u,t)\Big)-\big(2+\alpha(2+\alpha t)t\big)a_1\times$$

$$\times\Big(\theta_1^{2/3}(u,t)+\theta_2^{2/3}(u,t)-2u^{2/3}\Big)-2\big(2+\alpha(2+\alpha t)t\big)a_1 u\,\Big(\theta_1^{-1/3}(u,t)+\theta_2^{-1/3}(u,t)-$$

$$-2u^{-1/3}\Big)-\Big[4t+\alpha(2+\alpha t)\Big(t^2+a_1^2u^2\Big)\Big]\Big(\theta_2^{-1/3}(u,t)-\theta_1^{-1/3}(u,t)\Big)\Big\}\;; \qquad (39)$$

$$\int_{u_1}^{u_0}\theta^{2/3}d\theta\int_{a_1|u-\theta|}^{t}T\big(\tau,\, a_1\,|\,u-\theta\,|\big)\,f(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t f(t-\tau)\exp(-\alpha\tau)d\tau\int_{\theta_1(u,\tau)}^{\theta_2(u,\tau)}\Big(1+(\alpha^2/4)(\tau^2-$$

$$-a_1^2(u-\theta)^2)\Big)\theta^{2/3}d\theta=\frac{3}{4}\int_0^t f(t-\tau)\exp(-\alpha\tau)\Big((1/5)(4+\alpha^2\tau^2-\alpha^2a_1^2u^2)\theta^{5/3}+$$

$$+(1/4)\alpha^2a_1^2u\theta^{8/3}-(1/11)\alpha^2a_1^2\theta^{11/3}\Big)\Big|_{\theta_1(u,\tau)}^{\theta_2(u,\tau)}d\tau\,; \qquad (40)$$

$$\int_{\theta_1(u_0,t)}^{u_0} V\big(t,\, a_1(u_0-\theta)\big)\theta^{-4/3}\,d\theta=\frac{3}{4}\exp(-\alpha t)\cdot\Big\{(1/5)\alpha(2+\alpha t)a_1^2\Big(u_0^{5/3}-\theta_1^{5/3}(u_0,t)\Big)+$$

$$+\big(2+\alpha(2+\alpha t)(t-a_1u_0)\big)a_1\Big(u_0^{2/3}-\theta_1^{2/3}(u_0,t)\Big)-$$

$$-\Big(4(t-a_1u_0)+\alpha(2+\alpha t)(t-a_1u_0)^2\Big)\Big(u_0^{-1/3}-\theta_1^{-1/3}(u_0,t)\Big)\Big\}\;; \qquad (41)$$

$$\int_{u_1}^{u_0}\theta^{2/3}d\theta\int_{a_1(u_0-\theta)}^{t}T\big(\tau,\, a_1(u_0-\theta)\big)\,f(t-\tau)\,d\tau=\frac{3}{4}\int_0^t f(t-\tau)\exp(-\alpha\tau)\Big((1/5)(4+\alpha^2\tau^2-$$

$$-\alpha^2a_1^2u_0^2)\theta^{5/3}+(1/4)\alpha^2a_1^2u_0\theta^{8/3}-(1/11)\alpha^2a_1^2\theta^{11/3}\Big)\Big|_{\theta_1(u_0,\tau)}^{u_0}d\tau\,; \qquad (42)$$

$$\int_{u_1}^{\theta_2(u_1,t)} V\big(t,\, a_1(\theta-u_1)\big)\theta^{-4/3}\,d\theta=\frac{3}{4}\exp(-\alpha t)\cdot\Big\{(1/5)\alpha(2+\alpha t)a_1^2\Big(\theta_2^{5/3}(u_1,t)-u_1^{5/3}\Big)-$$

$$-\big(2+\alpha(2+\alpha t)(t+a_1u_1)\big)a_1\Big(\theta_2^{2/3}(u_1,t)-u_1^{2/3}\Big)-$$

$$-\Big(4(t+a_1u_1)+\alpha(2+\alpha t)(t+a_1u_1)^2\Big)\Big(\theta_2^{-1/3}(u_1,t)-u_1^{-1/3}\Big)\Big\}\;; \qquad (43)$$

$$\int_{u_1}^{u_0}\theta^{2/3}d\theta\int_{a_1(\theta-u_1)}^{t}T\big(\tau,\, a_1(\theta-u_1)\big)\,f(t-\tau)\,d\tau=\frac{3}{4}\int_0^t f(t-\tau)\exp(-\alpha\tau)\Big((1/5)(4+\alpha^2\tau^2-$$

$$-\alpha^2 a_1^2 u_1^2)\theta^{5/3}+(1/4)\alpha^2 a_1^2 u_1\theta^{8/3}-(1/11)\alpha^2 a_1^2\theta^{11/3}\Big)\Big|_{u_1}^{\theta_2(u_1,\tau)} d\tau\,. \qquad (44)$$

С учетом (39) – (44) и (31) – (34) интегрально-разностные соотношения (28) – (30) принимают упрощенный вид:

$$p(u,t)=u^{2/3}+\varepsilon\exp(-\alpha a_1(u_0-u))\,\eta(t-a_1(u_0-u))\,a(t-a_1(u_0-u))+$$

$$+\varepsilon\exp(-\alpha a_1(u-u_1))\,\eta(t-a_1(u-u_1))\,b\big(t-a_1(u-u_1)\big)+$$

$$+\,\varepsilon\frac{a_1}{2}\eta\big(t-a_1(u_0-u)\big)\alpha^2(u_0-u)\int\limits_0^{t-a_1(u_0-u)}\exp(-\alpha(t-\tau))\,a(\tau)\,d\tau\;+$$

$$+\varepsilon\frac{a_1}{2}\eta\big(t-a_1(u-u_1)\big)\,\alpha^2(u-u_1)\int\limits_0^{t-a_1(u-u_1)}\exp(-\alpha(t-\tau))\,b(\tau)\,d\tau+$$

$$+\varepsilon\frac{a_2}{2}\exp(-\alpha t)\int\limits_{\theta_1(u,t)}^{\theta_2(u,t)}\Big(1+(1/4)\alpha^2(t^2-a_1^2(u-\theta)^2)\Big)\eta(t-a_1|u-\theta|)\times$$

$$\times p_i^{(1)}\left(\frac{u_0^{4/3}-\theta^{4/3}}{u_0^{4/3}-u_1^{4/3}}\right)d\theta+\varepsilon\frac{3a_3}{8}\exp(-\alpha t)\cdot\Big\{(1/5)\alpha(2+\alpha t)a_1^2\Big(\theta_2^{5/3}(u,t)-\theta_1^{5/3}(u,t)\Big)-$$

$$-\alpha(2+\alpha t)a_1^2 u\Big(\theta_2^{2/3}(u,t)-\theta_1^{2/3}(u,t)\Big)-\big(2+\alpha(2+\alpha t)t\big)a_1\times$$

$$\times\Big(\theta_1^{2/3}(u,t)+\theta_2^{2/3}(u,t)-2u^{2/3}\Big)-2\big(2+\alpha(2+\alpha t)t\big)a_1 u\Big(\theta_1^{-1/3}(u,t)+\theta_2^{-1/3}(u,t)-$$

$$-2u^{-1/3}\Big)-\Big[4t+\alpha(2+\alpha t)\Big(t^2+a_1^2u^2\Big)\Big]\Big(\theta_2^{-1/3}(u,t)-\theta_1^{-1/3}(u,t)\Big)\Big\}-$$

$$-\,\varepsilon\frac{3a_4}{8}\int\limits_0^t f(t-\tau)\exp(-\alpha\tau)\Big((1/5)(4+\alpha^2\tau^2-\alpha^2a_1^2u^2)\theta^{5/3}+$$

$$+(1/4)\alpha^2a_1^2u\theta^{8/3}-(1/11)\alpha^2a_1^2\theta^{11/3}\Big)\Big|_{\theta_1(u,\tau)}^{\theta_2(u,\tau)}d\tau\,; \qquad (45)$$

$$a(t)=p_{b0}^{(1)}(t)\;-\exp(-\alpha a_1(u_0-u_1))\,\eta(t-a_1(u_0-u_1))b\big(t-a_1(u_0-u_1)\big)-$$

$$-\frac{a_1}{2}\eta\big(t-a_1(u_0-u_1)\big)\alpha^2(u_0-u)\int\limits_0^{t-a_1(u_0-u_1)}\exp(-\alpha(t-\tau))b(\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{a_2}{2}\exp(-\alpha t)\int\limits_{\theta_1(u_0,t)}^{u_0}\Big(1+(1/4)\alpha^2(t^2-a_1^2(u_0-\theta)^2)\Big)\eta(t-a_1(u_0-\theta))\times$$

$$\times p_i^{(1)}\left(\frac{u_0^{4/3}-\theta^{4/3}}{u_0^{4/3}-u_1^{4/3}}\right)d\theta-\frac{3a_3}{8}\exp(-\alpha t)\cdot\Big\{(1/5)\alpha(2+\alpha t)a_1^2\Big(u_0^{5/3}-\theta_1^{5/3}(u_0,t)\Big)+$$

$$+\big(2+\alpha(2+\alpha t)(t-a_1u_0)\big)a_1\Big(u_0^{2/3}-\theta_1^{2/3}(u_0,t)\Big)-$$

$$-\Big(4(t-a_1u_0)+\alpha(2+\alpha t)(t-a_1u_0)^2\Big)\Big(u_0^{-1/3}-\theta_1^{-1/3}(u_0,t)\Big)\Big\}+$$

$$+\frac{3a_4}{8}\int\limits_0^t f(t-\tau)\exp(-\alpha\tau)\Big((1/5)(4+\alpha^2\tau^2-$$

$$-\alpha^2a_1^2u_0^2)\theta^{5/3}+(1/4)\alpha^2a_1^2u_0\theta^{8/3}-(1/11)\alpha^2a_1^2\theta^{11/3}\Big)\Big|_{\theta_1(u_0,\tau)}^{u_0}d\tau\,; \qquad (46)$$

$$b(t)=p_{b1}^{(1)}(t)-\exp(-\alpha a_1(u_0-u_1))\ \ \eta(t-a_1(u_0-u_1))\ a\big(t-a_1(u_0-u_1)\big)-$$

$$-\frac{a_1}{2}\eta\big(t-a_1(u_0-u_1)\big)\alpha^2(u_0-u)\int\limits_0^{t-a_1(u_0-u_1)}\exp(-\alpha(t-\tau))\,a(\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{a_2}{2}\exp(-\alpha t)\int\limits_{u_1}^{\theta_2(u_1,t)}\Big(1+(1/4)\alpha^2(t^2-a_1^2(\theta-u_1)^2)\Big)\eta(t-a_1(\theta-u_1))\times$$

$$\times p_i^{(1)}\left(\frac{u_0^{4/3}-\theta^{4/3}}{u_0^{4/3}-u_1^{4/3}}\right)d\theta-\frac{3a_3}{8}\exp(-\alpha t)\cdot\Big\{(1/5)\alpha(2+\alpha t)a_1^2\Big(\theta_2^{5/3}(u_1,t)-u_1^{5/3}\Big)-$$

$$-\big(2+\alpha(2+\alpha t)(t+a_1u_1)\big)a_1\Big(\theta_2^{2/3}(u_1,t)-u_1^{2/3}\Big)-$$

$$-\Big(4(t+a_1u_1)+\alpha(2+\alpha t)(t+a_1u_1)^2\Big)\Big(\theta_2^{-1/3}(u_1,t)-u_1^{-1/3}\Big)\Big\}+$$

$$+\frac{3a_4}{8}\int\limits_0^t f(t-\tau)\exp(-\alpha\tau)\Big((1/5)(4+\alpha^2\tau^2-$$

$$-\alpha^2a_1^2u_1^2)\theta^{5/3}+(1/4)\alpha^2a_1^2u_1\theta^{8/3}-(1/11)\alpha^2a_1^2\theta^{11/3}\Big)\Big|_{u_1}^{\theta_2(u_1,\tau)}d\tau\,. \qquad (47)$$

6. Построение дискретного аналога интегрально-разностной модели

Оперирование с предложенными соотношениями (45) – (47) средствами компьютерной техники предполагает применение численных методов. Формальное использование стандартных вычислительных алгоритмов может привести к неоправданным затратам и в ряде случаев затруднит физическую интерпретацию полученных результатов. Более продуктивным представляется непосредственное построение дискретного аналога полученной непрерывной модели нестационарных течений в трубопроводе с учетом специфики задачи. Такой подход позволяет упростить вычислительный процесс, повысить его быстродействие и сформировать целостную картину сеточного распределения давления в ЛУ МГ.

В работах [11, 12] предлагается строить дискретное представление нестационарных гидродинамических процессов в трубопроводе сначала в области изображений, а затем использовать дискретное преобразование Лапласа и теорию импульсных систем. Однако переход от исходной непрерывной системы с распределенными параметрами к эквивалентной импульсной системе, во-первых, требует проведения сложных расчетов для получения передаточных функций. Во-вторых, допускает замену операции интегрирования суммированием с использованием лишь квадратурной формулы прямоугольников, что в ряде случаев приводит к значительным погрешностям, поскольку не позволяет охватить пиковую амплитуду переходных процессов с резко изменяющимися параметрами газового потока. Кроме того, необходимость обеспечения заданной точности расчетов при невысоком порядке приближения по формуле прямоугольников вынуждает задавать малый шаг дискретизации. Поскольку решение уравнений дискретной модели определяется в узлах сетки, то это требует значительных затрат памяти и проведения больших вычислений.

Для построения дискретного отображения полученной непрерывной модели нестационарных течений более предпочтительным является подход, базирующийся на использовании сеточной аппроксимации интегрального уравнения свертки оригиналов [13, 14]. Преимущество указанного метода состоит в том, что он позволяет синтезировать дискретное представление гидродинамических процессов в трубопроводе без построения промежуточных дискретных изображений искомых функций, а также дает возможность при обращении преобразования Лапласа отказаться от использования бесконечных рядов. Что особенно важно, он позволяет повысить качество моделирования за счет выбора для численного интегрирования более эффективных вычислительных процедур, в частности, квадратурной формулы Симпсона [9]. Существенным недостатком метода [13, 14] является необходимость решения систем неявных сеточных алгебраических уравнений. Однако предложенные соотношения (45) – (47), описывающие распределение давления по трассе ЛУ МГ, разрешены относительно искомых величин, что позволяет обойти указанную проблему.

Связь непрерывного безразмерного времени t ($t \geq 0$) с дискретным n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) задается в виде $t = n\Delta t$. Здесь шаг дискретизации Δt определяется формулой $\Delta t = 2t_v / N$, где $t_v = 1$ – безразмерное время распространения волны по длине трубопровода, N – произвольное натуральное число. Шаг дискретизации Δu по безразмерной пространственной координате задается независимо от выбора временного шага Δt в виде соотношения $\Delta u = (u_0 - u_1)/M$, M – произвольное четное натуральное число. Переходя к сеточным представлениям искомых функций

$$p(m,n) = p(u_1 + m\Delta u, n\Delta t); \quad a(n) = a(n\Delta t); \quad b(n) = b(n\Delta t) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, M),$$

в результате замены операции непрерывного интегрирования (как по времени, так и по пространственной координате) суммированием по методу Симпсона [9] соотношения (45) – (47) принимают соответствующий дискретный вид.

7. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Предложенная интегрально-разностная модель позволяет определить давление в любой точке МГ в произвольный момент времени в условиях продольных сейсмических воздействий. Вычисление квадратур можно осуществить стандартными методами [15]. Однако учет специфики задачи позволяет значительно упростить вычислительный процесс и повысить его быстродействие.

Преимущество разработанного подхода – возможность рассчитать нестационарные гидродинамические процессы, возникающие в ЛУ МГ, без перехода в область дискретных изображений, а также осуществлять обращение преобразования Лапласа на основе теоремы свертки без нахождения корней характеристического уравнения, что упрощает математические вкладки, а также исключает из решения бесконечные ряды.

Следует подчеркнуть, что предложенный подход позволяет заменить операцию непрерывного интегрирования суммированием, пользуясь не только методом прямоугольников, но и более точными квадратурными формулами. Процедуры оперирования с разработанной интегрально-разностной моделью легко реализуются в любом развитом пакете компьютерной математики, в частности, в среде Matlab [16].

В дальнейшем предполагается уточнить описание реакции газового потока на инерционные воздействия, принимая во внимание изменения линейной скорости течения по длине трубопровода и его наклон к горизонту.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье М.В. Математическое моделирование процессов трубопроводного транспорта нефти, нефтепродуктов и газа / М.В. Лурье. – Москва : Нефть и газ, 2003. – 335 с.
2. Paidoussis M.P. Fluid-structure interactions. Slender structures and axial flow / M.P. Paidoussis. – San Diego, London: Academic Press, 1998. – 574 p.
3. Рукавишников В.А. Численный анализ математической модели гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе / В.А. Рукавишников, О.П. Ткаченко // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 1. – С. 51 – 64.
4. Яскеляин А.В. Исследование гидравлического удара в жидкости при колебаниях трубопровода / А.В. Яскеляин // Проблемы прочности и пластичности. – 2008. – Вып. 70. – С. 62 – 70.
5. Брунеткин А.И. Нестационарное движение жидкости в трубе (глухой) при произвольном продольном инерционном воздействии / А.И. Брунеткин, М.В. Максимов // Вісник Харківського національного університету.. – 2012. – № 1015. – С. 49 – 54.

6. Ширяев А.М. Построение математической модели волнового процесса в упругом подземном нефтепроводе, подверженном сейсмическому воздействию / А.М. Ширяев, М.И. Валиев, В.В. Жолобов, Е.И. Тарновский // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2014. –№ 3(15). – С. 54 – 62.
7. Грачев В.В. Сложные трубопроводные системы / В.В. Грачев, М.А. Гусейнзаде, Б.И. Ксенз, Е.И. Яковлев. – Москва : Недра, 1982. – 256 с.
8. Verhulst F. Methods and Applications of Singular Perturbations. Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics / F. Verhulst. – Berlin : Springer – Verlag, 2005. – 328 p.
9. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Москва : Наука, 1984. – 832 с.
10. Скляров Ю.С. Интегрально-разностные уравнения нестационарного режима магистрального газопровода / Ю.С. Скляров, В.В. Костюков // Методы и модели интенсификации производства. – Киев : УМК ВО, 1988. – С. 43–49.
11. Мамедов А.И. Методы расчета неустановившихся режимов работы сложных магистральных трубопроводов / А.И. Мамедов. – Москва : ВНИИОЭНГ. – 1986. – 38 с.
12. Мамедов А.И. Методы расчета переходных процессов в магистральных нефтепроводах / А.И. Мамедов, И.К. Алиев, В.С. Мирзоев. – Баку : Чашыоглы, 1999. – 200 с.
13. Юсубов Ч.А. Численное определение нестационарных процессов в магистральных газопроводах / Ч.А. Юсубов // Проблемы энергетики. – 2003. –№ 2.– С. 62 – 65.
14. Ахмедов С.Ф. Моделирование динамических процессов в нефтегазопромысловом газосборном коллекторе / С.Ф. Ахмедов // Вестник Азербайджанской Инженерной Академии. – 2010. –Т. 2, № 1.– С. 38 – 49.
15. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – Москва : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 632 с.
16. Ануфриев И.Е. MATLAB 7 / И.Е. Ануфриев, А.Б. Смирнов, Е.Н. Смирнова. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.

Надійшла – 15.05.2016.