

УДК 534

## Вимушені резонансні коливання дисипативної пружинно-маятникової системи

Ю. В. Міхлін, К. Ю. Плаксі́й

*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Україна*

Досліджується резонансна динаміка дисипативної пружинно-маятникової системи під впливом зовнішнього періодичного збурення. Аналіз проведений на основі узагальненої концепції нелінійних нормальних форм коливань Каудерера-Розенберга. Застосована трансформація до редукованої системи відносно енергії системи, арктангенса відношення амплітуд та різниці фаз шуканих розв'язків в резонансному околі. Виділено нові режими коливань, *перехідні нелінійні нормальні форми*, що реалізуються лише для окремих рівнів енергії. Отримано нові, актуальні для віброгасіння, результати щодо стійкості і біфуркацій нелінійних нормальних форм та їхньої взаємодії в околі резонансу. Чисельні експерименти підтверджують достовірність отриманих аналітичних результатів.

**Ключові слова:** *нелінійні нормальні форми, внутрішній резонанс, біфуркація, перехідна форма коливань.*

Исследуется резонансная динамика диссипативной пружинно-маятниковой системы под внешним периодическим воздействием. Анализ проведен на основе обобщенной концепции нелинейных нормальных форм колебаний Каудерера-Розенберга. Применена трансформация к редуцированной системе относительно энергии системы, арктангенса отношения амплитуд и разности фаз искомым решений в резонансной окрестности. Выделены новые режимы колебаний, *переходные нелинейные нормальные формы*, которые реализуются только для отдельных уровней энергии. Получены новые, актуальные для виброгашения, результаты относительно устойчивости и бифуркаций нелинейных нормальных форм и их взаимодействия в окрестности резонанса. Численные эксперименты подтверждают достоверность полученных аналитических результатов.

**Ключевые слова:** *нелинейные нормальные формы, внутренний резонанс, бифуркация, переходная форма колебаний.*

Resonance dynamics of the dissipative spring-pendulum system under periodic external excitation is studied. Analysis is based on the generalized concept of nonlinear normal vibration modes by Kauderer and Rosenberg. The transformation to the reduced system with respect to the system energy, an arctangent of the amplitudes ratio and a difference of phases of required solutions in the resonance vicinity is applied. New vibration regimes, *transient nonlinear normal modes*, which are realized only for the separate energy levels, are selected. New results, which are actual for vibration absorption, concerning stability and bifurcations of nonlinear normal modes and their interaction in the resonance vicinity are obtained. Numerical simulations confirm reliability of obtained analytical results.

**Key words:** *nonlinear normal modes, internal resonance, bifurcation, transient vibration mode.*

### 1. Вступ

Наявність зовнішніх та внутрішніх резонансів у нелінійних коливальних системах зазвичай приводить до небажаного росту амплітуд коливань на одній із координат. Постає актуальне питання про можливість гасіння таких коливань за допомогою використання віброгасника малої маси. Окрім того, резонанс може призводити до втрати стійкості встановленого режиму коливань та виникнення

нових режимів коливань, так званих біфуркацій [1]. Виникнення нових режимів коливань визначає динаміку системи в умовах резонансу, тому аналітичні дослідження резонансної динаміки коливальних систем є важливим етапом розв'язання багатьох прикладних задач механіки. Поява таких ефектів як одночасне існування кількох стійких режимів коливань в резонансному околі обумовлює виникнення режиму так званої перекачки енергії [2] між підсистемами нелінійної коливальної системи. Також постає питання про можливість локалізації [3] значної частини енергії коливань в одній із підсистем основної системи, що може бути як негативним для конструкції в цілому і призводити до її руйнування, так і бути успішно використаним в задачі віброгасіння. Наявність дисипації енергії у системі може як підвести систему до внутрішнього резонансу, так і відстроїти її від нього. Зовнішнє збурення може підтримувати певний режим коливань і суттєво впливати на стійкість і біфуркації. З огляду на це важливим постає розгляд саме неконсервативних систем.

Успіх аналітичного дослідження нелінійних систем в значній мірі визначається вибором розв'язків, які можна обрати за нульове наближення для побудови більш складних рухів. В якості таких розв'язків в багатьох випадках можна вибрати саме нормальні форми коливань, коли всі позиційні координати системи є однозначними функціями однієї з них (коливання в унісон). В роботі використовується концепція нелінійних нормальних форм коливань Каудерера-Розенберга [1-5], яка була вперше запропонована для консервативних систем. При наявності малої дисипації енергії, а також малого зовнішнього збурення залишається можливим розгляд рухів системи, що є подібні до нелінійних нормальних форм коливань відповідної консервативної системи. В даній роботі аналіз резонансної динаміки пружинно-маятникової дисипативної системи проведений з використанням узагальненої концепції нелінійних нормальних форм Каудерера-Розенберга.

Застосована при дослідженні *методика зведення до редукованої системи* відносно її повної енергії, арктангенса відношення амплітуд та різниці фаз розв'язків в околі резонансу [6] дозволяє успішно дослідити стійкість та біфуркації нелінійних нормальних форм в околі резонансу без повного аналітичного відшукування розв'язків. Дана методика узагальнена для випадків наявності дисипації енергії і зовнішнього збурення у коливальних системах [7-10].

Динаміка дисипативної нелінійної пружинно-маятникової системи досліджена для випадків зовнішнього резонансу на частоті коливання пружини та у випадку одночасного зовнішнього та внутрішнього резонансів. Проаналізована можливість віброгасіння коливань.

Розглядається пружинно-маятникова система в умовах малого тертя та під впливом зовнішнього періодичного збурення, зображена на рис. 1.

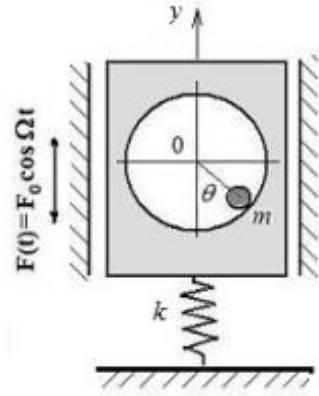


Рис.1. Пружинно-маятникова система.

Рівняння руху цієї суттєво нелінійної коливальної системи представляються у вигляді:

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega_u^2 u + \eta_u \dot{u} - \mu(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) = f \cos \tau \\ \ddot{\theta} + \eta_\theta \dot{\theta} + p^2 \sin \theta - \ddot{u} \sin \theta = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де позначено  $u = \frac{y}{R}$ ,  $\tau = \Omega t$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$ ,  $p^2 = \frac{g}{R\Omega}$ ,  $\mu = m/(m+M)$ ,

$$\omega_u^2 = 1/\Omega^2, \quad f = \frac{F_0}{(M+m)R\omega^2\Omega^2}, \quad \eta_u = \frac{\beta_u}{(M+m)\Omega}, \quad \eta_\theta = \frac{\beta_\theta}{m\Omega}, \quad \beta_x \text{ і } \beta_\theta -$$

коефіцієнти тертя.

У системі (1) за відсутності тертя та зовнішнього збурення існують дві нелінійні нормальні форми коливань Каудерера-Розенберга [6], а саме: суто вертикальні коливання – так звана пружинна форма, або  $u$ -форма ( $u = u(\tau)$ ,  $\theta = 0$ ), що є локалізованою, та маятникова форма, або  $\theta$ -форма, коли змінюються і вертикальна, і кутова координати ( $u = u(\tau)$ ,  $\theta = \theta(\tau)$ ), і яка є нелокалізованою. Зауважимо, що  $u(\tau)$  – парна функція, а  $\theta(\tau)$  – непарна.

В умовах малої дисипації енергії та малого збурення аналогічні узагальнені форми коливань системи (1) вже не будуть формами Каудерера-Розенберга, але будуть подібними до них. Такі узагальнені форми залишаються придатні для якісного аналізу поведінки системи.

## 2. Випадок зовнішнього резонансу на частоті коливань пружини

Застосуємо метод багатьох масштабів [11] для побудування розв'язків. Промасштабуємо координати  $u \rightarrow \varepsilon u$ ,  $\theta \rightarrow \varepsilon \theta$  і будемо шукати розв'язки у формі асимптотичного розкладення, утримуючи члени порядку  $O(\varepsilon^2)$ :

$$\begin{cases} \varepsilon u = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \dots \\ \varepsilon \theta = \varepsilon \theta_0 + \varepsilon^2 \theta_1 + \dots \end{cases} \quad (2)$$

Будемо розглядати масштаби часу включно до членів порядку  $O(\varepsilon^{-2})$ :

$$T_0 + T_1 + T_2 = \tau + \varepsilon\tau + \varepsilon^2 + \dots \quad (3)$$

В такому разі перша та друга похідні набувають вигляду

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots, \quad (4)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial T_0} \dots \quad (5)$$

Підставимо (2), (3), (4) та (5) у рівняння коливань (1). Щоб дослідити резонансу поведінку системи, застосуємо методику зведення до редукованої системи. Щоб дослідити динаміку системи (1) в околі зовнішнього резонансу на частоті коливання пружини, введемо у систему (1) розлад між частотами у вигляді:

$$\omega_u^2 = 1 + \varepsilon\Delta. \quad (6)$$

Враховуючи, що для малих коливань  $\sin \theta = \theta$ ,  $\cos \theta = 1$  з точністю до  $O(\theta)$  та прирівнюючи відповідні члени при  $\varepsilon^1$  та  $\varepsilon^2$ , отримаємо рівняння у частинних похідних для першого та другого наближень:

$$\varepsilon^1: \begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0, \\ \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_0^2} + p^2 \theta_0 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\varepsilon^2: \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -\Delta_1 u_0 - 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_1 \partial T_0} + \mu \left( \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_0^2} \right) \theta_0 + \mu \left( \frac{\partial \theta_0}{\partial T_0} \right)^2 - \eta_u \frac{\partial u_0}{\partial T_0} + \\ + \frac{f}{2} (e^{iT_0} + e^{-iT_0}), \\ \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial T_0^2} + p^2 \theta_1 = -2 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_1 \partial T_0} + \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} \right) \theta_0 - \eta_\theta \frac{\partial \theta_0}{\partial T_0}. \end{cases} \quad (8)$$

Загальний розв'язок системи (7) запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} u_0 = C_u(T_1)e^{iT_0} + \bar{C}_u(T_1)e^{-iT_0}, \\ \theta_0 = C_\theta(T_1)e^{piT_0} + \bar{C}_\theta(T_1)e^{-piT_0}. \end{cases} \quad (9)$$

Підставляючи розв'язок (9) у систему рівнянь (8) для відшукування других наближень розв'язків  $u_1$  та  $\theta_1$ , приходимо до умови виключення вікових членів

у правих частинах системи (8). Покладаючи в умові виключення вікових членів  $C_u = a_u e^{i\beta_u}$ ,  $C_\theta = a_\theta e^{i\beta_\theta}$ , запишемо систему рівнянь відносно амплітуд  $a_u$ ,  $a_\theta$  та фаз  $\beta_u$ ,  $\beta_\theta$  шуканих розв'язків:

$$\begin{cases} a'_u = -\frac{\eta_x}{2} a_x - \frac{f}{4} \sin \beta_u, \\ a'_\theta = -\frac{\eta_\theta}{2} a_\theta, \\ \beta'_u = \frac{\Delta}{2} - \frac{f}{4a_u} \cos \beta_u, \\ \beta'_\theta = 0. \end{cases} \quad (10)$$

У системі (10) введемо заміну змінних  $a_u = \frac{\sqrt{\mu}}{2} K \cos \psi$ ,  $a_\theta = K \sin \psi$ , яка приводить до так званої редукованої системи відносно змінної повної енергії  $K$ , арктангенса відношення амплітуд  $\psi$  та фаз розв'язків:

$$\begin{cases} K' = -K \left( \frac{\eta_u}{2} \cos^2 \psi + \frac{\eta_\theta}{2} \sin^2 \psi \right) - \frac{f}{4} \sin \beta_u \cos \psi, \\ \psi' = \sin \psi \left( \frac{\eta_u - \eta_\theta}{2} \cos \psi + \frac{f}{4K} \sin \beta_u \right), \\ \beta'_u = \frac{\Delta}{2} - \frac{f}{4K \cos \psi} \cos \beta_u, \\ \beta'_\theta = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Зазначимо, що у випадку наявності зовнішнього збурення, повна редукція не можлива, адже не можна виділити різницю фаз розв'язків у правих частинах рівнянь системи (1), але можливо формально записати рівняння відносно різниці фаз, при цьому аналіз рівнянь редукованої системи залишається ефективним. Оскільки різниця фаз зв'язаних коливань системи (1) має вигляд  $\varphi = \beta_u - 2\beta_\theta$ , рівняння відносно різниці фаз запишеться наступним чином:

$$\varphi' = \Delta - \frac{f}{2K \cos \psi} \cos \beta_u. \quad (12)$$

Проаналізуємо його сукупно з першим та другим рівняннями системи (1) на положення рівноваги. Саме такі розв'язки редукованої системи за визначенням відповідають нелінійним нормальним формам системи (1), адже описують коливання в унісон.

Умова  $\sin \psi \equiv 0$  відповідає коливанням лише однієї пружини, які є локалізованими. Локалізована форма коливань не потребує додаткової умови для фази, тому достатньо проаналізувати положення рівноваги лише рівняння відносно арктангенса амплітуд  $\psi$ . Друге рівняння системи (11) обертається за

цих умов на тотожність, отже ця форма коливань існує для будь-яких рівнів енергії  $K$ , та їй відповідає пряма  $\psi = 0$  у просторі  $(\psi, \varphi)$ . Даній формі коливань відповідає рівняння енергії  $K' = -K \frac{\eta_u}{2} \mp \frac{f}{4} \sin \beta_u$ . Через наявність функції  $\beta_u(K)$  у правій частині даного рівняння не можна однозначно сказати про стійкість локалізованих коливань пружини. Необхідним стає аналіз траєкторій у просторі  $(\psi, \varphi)$ .

Локалізація енергії на маятнику, очевидно, не можлива з міркувань конструкції системи (1). Аналітично вона б потребувала умови  $\cos \psi = 0$ .

Таким коливанням відповідала б пряма  $\psi = \frac{\pi}{2}$  у просторі  $(\psi, \varphi)$ . Положення рівноваги другого рівняння системи (11) вимагало б у даному випадку рівності  $\pm \frac{f}{4K} \sin \beta_u = 0$ . Дана рівність можлива, якщо фаза  $\beta_u = 0 + \pi n$ . Також дана форма коливань могла б бути реалізована за умов досить високих енергій, які не розглядаються. Такій формі коливань відповідає функція енергії  $K' = -\frac{\eta_\theta}{2} K$ .

Енергія коливань у даному випадку буде спадаючою, отже такі коливання з локалізацією на маятнику будуть нестійкими в околі резонансу і така форма коливань не буде реалізована.

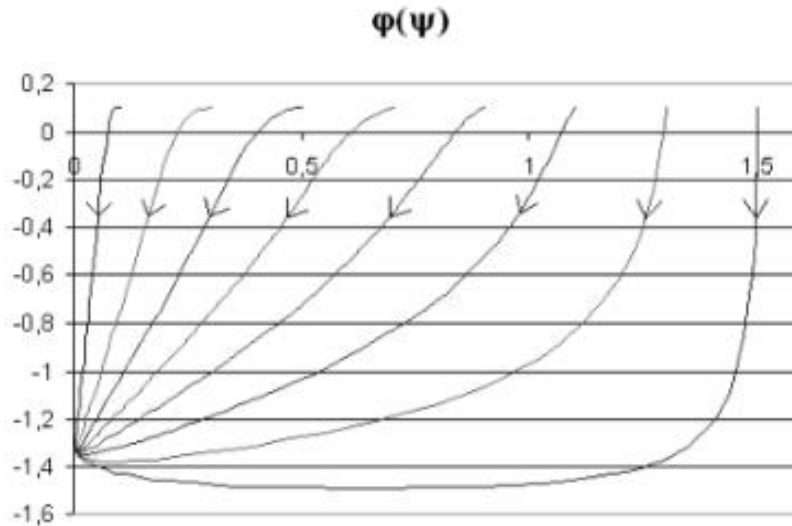
У випадку, коли  $\cos \psi \neq 0$  та  $\sin \psi \neq 0$  одночасно, можлива поява форми зв'язаних коливань системи (1). З другого рівняння редукованої системи (11) та рівняння (12) отримаємо умови існування даної форми:

$$\cos \psi = \pm \frac{f}{2K \sqrt{(\eta_u - \eta_\theta)^2 + \Delta^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta_u = \frac{\eta_\theta - \eta_u}{\Delta}.$$

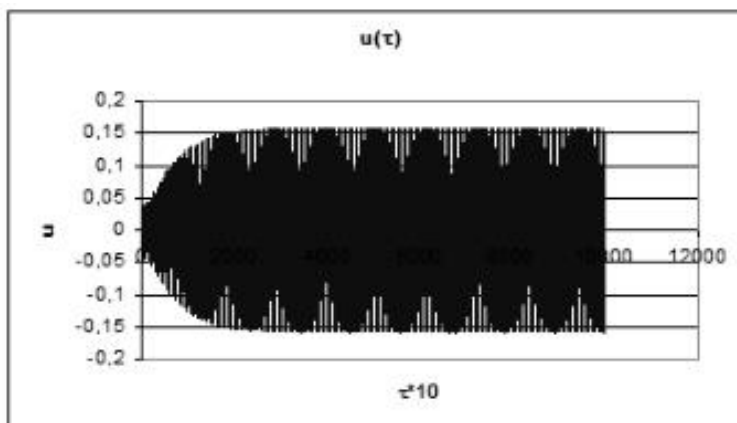
Як бачимо, умова існування даної форми залежить від рівня енергії. Для виявлення появи та визначення стійкості форми зв'язаних коливань в даному випадку необхідним стає аналіз траєкторій у просторі  $(\psi, \varphi)$ .

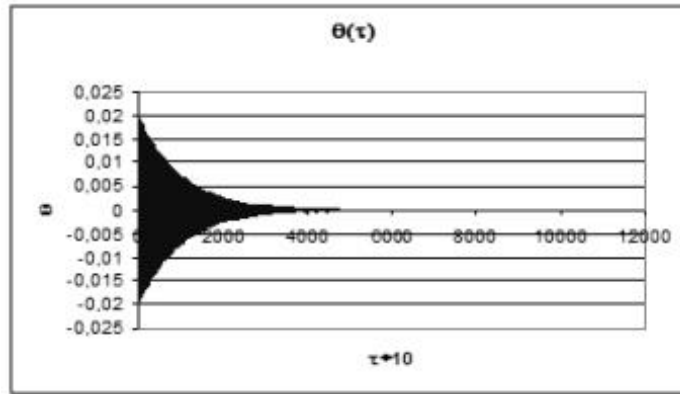
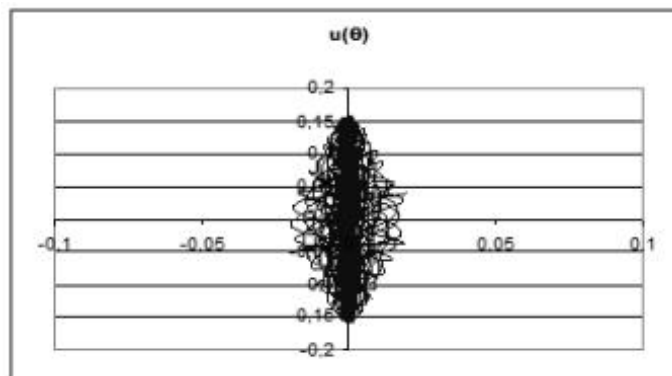
Для аналізу траєкторій у просторі  $(\psi, \varphi)$  проінтегруємо чисельно методом Рунге-Кутта 4-го порядку з кроком  $h = 0,01$  редуковану систему (11), змінюючи значення арктангенса амплітуд на відрізку  $0 \leq \psi(0) \leq \frac{\pi}{2}$  при початкових умовах  $K(0) = 0,5$ ,  $\Delta = 0,2$ ,  $\eta_u = 0,4$ ,  $\eta_\theta = 0,4$  та  $f = 0,2$ . На рис. 2 побудовані траєкторії в просторі  $(\psi, \varphi)$ .

Траєкторії на рис. 2 з плином часу наближаються до прямої  $\psi = 0$ , яка відповідає формі коливань з локалізацією енергії на пружині. Отже, аналіз траєкторій дозволяє зробити висновок, що дана форма коливань залишається стійкою в околі резонансу в той час, як не спостерігається появи стійких зв'язаних коливань системи.

Рис.2. Траєкторії в просторі  $(\psi, \varphi)$ .

Щоб проілюструвати поведінку пружинно-маятникової системи (1) в околі резонансу, проінтегруємо чисельно систему відносно амплітуд і фаз розв'язків (10) методом Рунге-Кутта 4-го порядку на відрізку  $\tau \in [0; 100]$  з кроком  $h = 0,01$  при початкових умовах  $a_u(0) = 0,2$ ,  $a_\theta(0) = 0,1$ ,  $\beta_u(0) = 0,01$ ,  $\beta_\theta(0) = 0,02$  та при  $\eta_u = 0,3$ ,  $\eta_\theta = 0,3$ ,  $f = 0,5$ ,  $\mu = 0,3$ ,  $\Delta = 0,1$ ,  $p = 1,7$ . Перше наближення розв'язків може бути записане у вигляді  $u_0 = 2a_u \cos(\tau + \beta_u)$ ,  $\theta_0 = 2a_\theta \cos(p\tau + \beta_\theta)$ . На рис. 3-5 представлені залежності координат від часу та залежність у конфігураційному просторі відповідно.

Рис.3. Залежність  $u(\tau)$ .

Рис.4. Залежність  $\theta(\tau)$ .Рис.5. Залежність  $u(\theta)$ .

Аналіз графіків 3-5 дозволяє зробити висновок, що форма локалізації енергії на пружині є стійкою в режимі резонансу, що підтверджує аналітичне дослідження за редукованою системою: відхилення траєкторій на рис. 5 від форми коливань пружини нехтовно менші за основні коливання, а самі траєкторії з плином часу згущуються вздовж прямої  $\theta = 0$ .

### 3. Випадок одночасного зовнішнього і внутрішнього резонансів

Для того, щоб розглянути рухи системи в околі внутрішнього та зовнішнього резонансу одночасно, введемо в рівняння (1) два параметри  $\Delta_1$  та  $\Delta_2$ , що характеризують розлади частот, наступним чином:

$$\omega_u^2 = 1 + \varepsilon \Delta_1, \quad (13)$$

$$p^2 = \frac{1}{4} + \varepsilon \Delta_2. \quad (14)$$

Умова (13) відповідає потраплянню в околі зовнішнього резонансу, а умова (14) в околі головного параметричного резонансу системи (1).

Застосовуючи аналогічні перетворення, рівняння для першого та другого наближень запишемо у вигляді:



$$\varepsilon^1: \begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0, \\ \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_0^2} + \frac{1}{4} \theta_0 = 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$\varepsilon^2: \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -\Delta_1 u_0 - 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_1 \partial T_0} + \mu \left( \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_0^2} \right) \theta_0 + \mu \left( \frac{\partial \theta_0}{\partial T_0} \right)^2 - \eta_u \frac{\partial x_0}{\partial T_0} + \\ + \frac{f}{2} (e^{iT_0} + e^{-iT_0}), \\ \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial T_0^2} + \theta_1 = -\Delta_2 \theta_0 - 2 \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial T_1 \partial T_0} + \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} \right) \theta_0 - \eta_\theta \frac{\partial \theta_0}{\partial T_0}. \end{cases} \quad (16)$$

Розв'язок системи (15) запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} u_0 = C_u(T_1)e^{iT_0} + \bar{C}_u(T_1)e^{-iT_0}, \\ \theta_0 = C_\theta(T_1)e^{\frac{1}{2}iT_0} + \bar{C}_\theta(T_1)e^{-\frac{1}{2}iT_0}. \end{cases} \quad (17)$$

Підставляючи розв'язок (17) у систему рівнянь для відшукування других наближень розв'язків (16), аналогічно приходимо до виключення вікових членів у правих частинах системи (16). Покладаючи  $C_u = a_u e^{i\beta_u}$ ,  $C_\theta = a_\theta e^{i\beta_\theta}$ , перейдемо від умови виключення вікових членів до системи рівнянь відносно амплітуд та фаз розв'язків:

$$\begin{cases} a'_u = \frac{\mu}{4} a_\theta^2 \sin(2\beta_\theta - \beta_u) - \frac{\eta_x}{2} a_x - \frac{f}{4} \sin \beta_u, \\ a'_\theta = a_u a_\theta \sin(2\beta_\theta - \beta_u) - \frac{\eta_\theta}{2} a_\theta, \\ \beta'_u = \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\mu}{4} \frac{a_\theta^2}{a_u} \cos(2\beta_\theta - \beta_u) - \frac{f}{4a_u} \cos \beta_u, \\ \beta'_\theta = \Delta_2 + a_u \cos(2\beta_\theta - \beta_u). \end{cases} \quad (18)$$

де  $\varphi = \beta_u - 2\beta_\theta$  - різниця фаз розв'язків для форми зв'язаних коливань.

У системі (18) введемо заміну змінних  $a_u = \frac{\sqrt{\mu}}{2} K \cos \psi$ ,  $a_\theta = K \sin \psi$  та отримаємо редуковану систему відносно її повної енергії, арктангенса відношення амплітуд та фаз розв'язків:

$$\begin{cases} K' = -K \left( \frac{\eta_u}{2} \cos^2 \psi + \frac{\eta_\theta}{2} \sin^2 \psi \right) - \frac{f}{2\sqrt{\mu}} \sin \beta_u \cos \psi, \\ \psi' = \sin \psi \left( \frac{\sqrt{\mu}}{2} K \sin(2\beta_\theta - \beta_u) + \frac{\eta_u - \eta_\theta}{2} \cos \psi + \frac{f}{2\sqrt{\mu}K} \sin \beta_u \right), \\ \beta_u' = \frac{\Delta_1}{2} + \frac{\sqrt{\mu}}{2} \frac{K \sin^2 \psi}{\cos \psi} \cos(2\beta_\theta - \beta_u) - \frac{f}{2\sqrt{\mu}K \cos \psi} \cos \beta_u, \\ \beta_\theta' = \Delta_2 + \frac{\sqrt{\mu}}{2} K \cos \psi \cos(2\beta_\theta - \beta_u). \end{cases} \quad (19)$$

Як і раніше, у випадку наявності зовнішнього збурення, повна редукція не можлива, адже не можна виділити різницю фаз  $\varphi$  у правих частинах рівнянь системи (18), але ми запишемо рівняння відносно різниці фаз формально та проаналізуємо його сукупно з першим та другим рівняннями системи (19):

$$\begin{aligned} \varphi' = & \frac{\Delta_1}{2} - 2\Delta_2 + \sqrt{\mu}K \left( \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \psi}{\cos \psi} - \cos \psi \right) \cos(2\beta_\theta - \beta_u) - \\ & - \frac{f}{2\sqrt{\mu}K \cos \psi} \cos \beta_u. \end{aligned} \quad (20)$$

Будемо розглядати положення рівноваги другого рівняння редукованої системи (19) та рівняння (20). Умова  $\sin \psi \equiv 0$ , очевидно, відповідає коливанням самої тільки пружини. Оскільки така форма коливань є локалізованою, то не потребує додаткової умови для фази. Друге рівняння системи (19) обертається за цих умов на тотожність, отже ця форма коливань існує для будь-яких рівнів енергії  $K$ , та їй відповідає пряма  $\psi = 0$  у просторі  $(\psi, \varphi)$ . Даній формі коливань відповідає рівняння енергії  $K' = -K \frac{\eta_u}{2} \mp \frac{f}{2\sqrt{\mu}} \sin \beta_u$ , через наявність

функції  $\beta_u(K)$  у правій частині даного рівняння не можна однозначно сказати про стійкість коливань пружини. Необхідним стає аналіз траєкторій у просторі  $(\psi, \varphi)$ .

У випадку, коли  $\cos \psi \neq 0$  та  $\sin \psi \neq 0$  одночасно, можлива поява форми зв'язаних коливань системи (1). З другого рівняння редукованої системи (19) отримуємо одну з умов існування даної форми:

$$\cos \psi = \frac{\sqrt{\mu}}{\eta_\theta - \eta_u} K \sin(2\beta_\theta - \beta_u) + \frac{f}{2\sqrt{\mu}K(\eta_\theta - \eta_u)} \sin \beta_u.$$

Очевидно, умова існування даної форми залежить від рівня енергії. Для виявлення форми зв'язаних коливань та визначення її стійкості в даному випадку необхідним стає аналіз траєкторій у просторі  $(\psi, \varphi)$ .

Побудуємо траєкторії в просторі  $(\psi, \varphi)$ , для чого проінтегруємо чисельно методом Рунге-Кутта 4-го порядку з кроком  $h=0,01$  редуковану систему (19), змінюючи значення арктангенса амплітуд на відрізку  $0 \leq \psi(0) \leq \frac{\pi}{2}$  та при початкових умовах  $K(0)=0,5$ ,  $\eta_u=0,3$ ,  $\eta_\theta=0,2$ ,  $\mu=0,4$ ,  $\Delta_1=0,2$ ,  $\Delta_2=0,1$ ,  $f=0,35$ . На рис. 6 представлені траєкторії у просторі  $(\psi, \varphi)$  для випадку одночасного зовнішнього та внутрішнього резонансу.

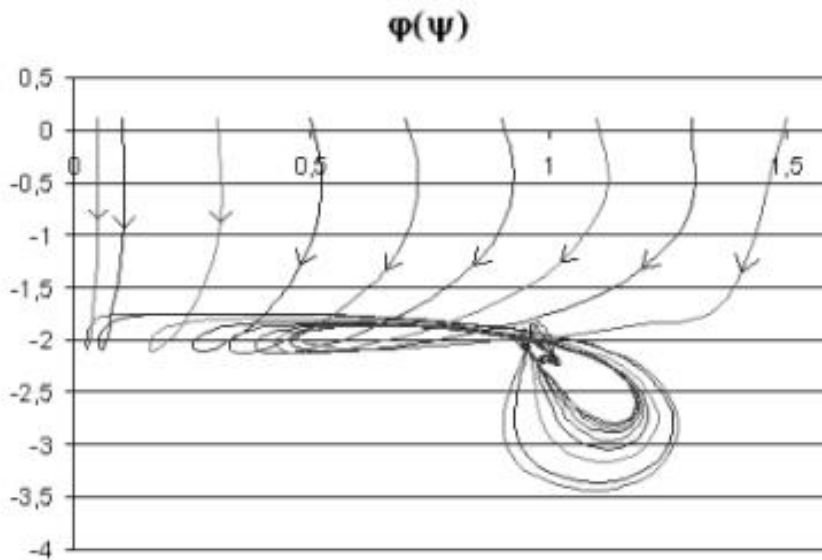
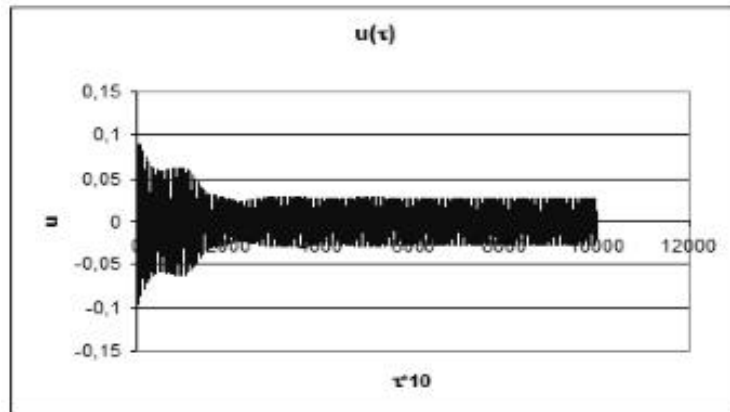
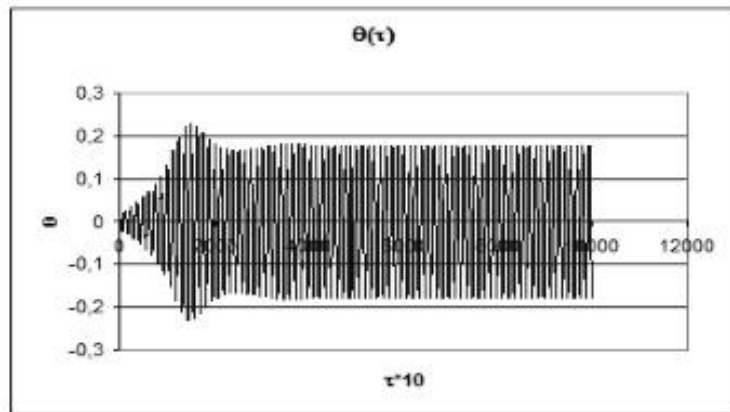
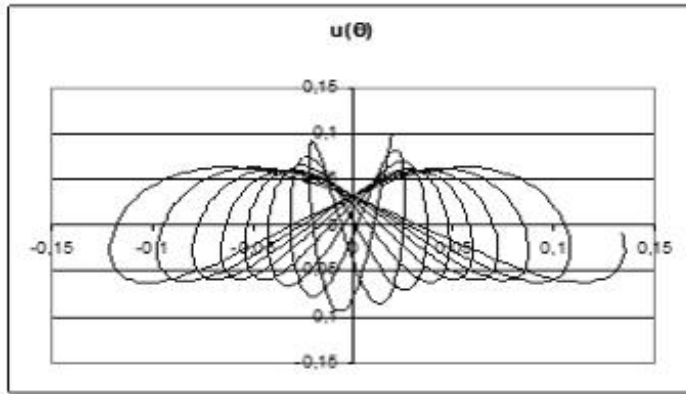
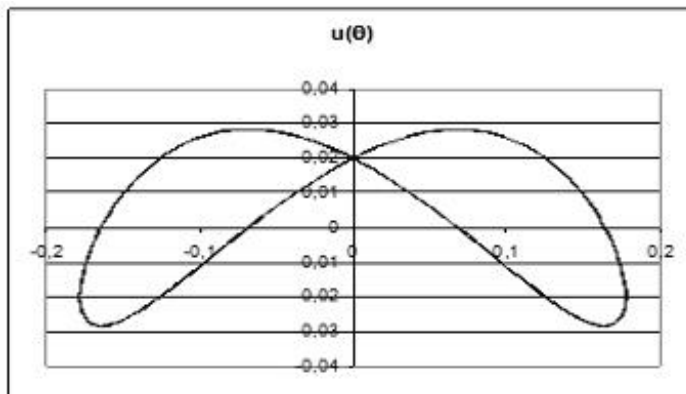
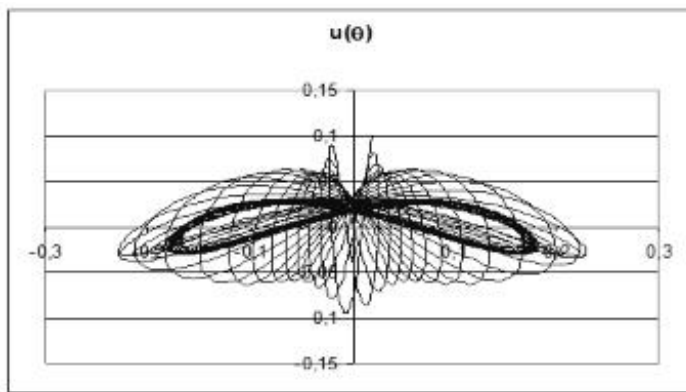


Рис.6. Траєкторії в просторі  $(\psi, \varphi)$ .

Кожна з траєкторій робить петлю навколо квазіположення рівноваги редукованої системи. Це положення рухається у просторі  $(\psi, \varphi)$  та відповідає *перехідній формі коливань*. *Перехідні форми коливань*, що були описані в [7-10], є формами коливань, що існують лише для окремих рівнів енергії системи, тобто лише в окремі моменти часу, що відповідають цим рівням енергії. Важливим є те, що *перехідні форми* притягують інші траєкторії руху. В околі значення часу, що відповідає появі *перехідної форми коливань*, рухи системи є близькими до неї. Далі на рис. 6 бачимо, що коли енергія спадає і *перехідна форма* зникає, траєкторії у просторі  $(\psi, \varphi)$  притягуються до положення рівноваги, що відповідає стійкій в резонансному околі нелінійній нормальній формі зв'язаних коливань системи. Зазначимо, що це положення рівноваги розташоване у просторі  $(\psi, \varphi)$  скоріш ближче до прямої  $\psi = \frac{\pi}{2}$ , яка відповідає локалізації коливань на маятнику, аніж до прямої  $\psi = 0$ , яка відповідає локалізованим коливанням пружини. Траєкторії на рис. 6 не залишаються поблизу прямої  $\psi = 0$ , що означає, що форма локалізованих коливань пружини не є стійкою у режимі резонансу.

Для ілюстрації поведінки пружинно-маятникової системи (1) в околі резонансу, проінтегруємо чисельно систему відносно амплітуд і фаз розв'язків (18) методом Рунге-Кутта 4-го порядку на відрізку  $\tau \in [0; 5000]$  з кроком  $h = 0,01$  при початкових умовах  $a_u(0) = 0,05$ ,  $a_\theta(0) = 0,01$ ,  $\beta_u(0) = 0,1$ ,  $\beta_\theta(0) = 0,2$  та при  $\eta_u = 0,3$ ,  $\eta_\theta = 0,2$ ,  $f = 0,35$ ,  $\Delta_1 = 0,2$ ,  $\Delta_2 = 0,1$ . Перше наближення розв'язків може бути записане у вигляді  $u_0 = 2a_u \cos(\tau + \beta_u)$ ,  $\theta_0 = 2a_\theta \cos(\frac{1}{2}\tau + \beta_\theta)$ . На рисунках 7-8 представлені залежності координат від часу на інтервалах часу  $\tau \in [0; 1000]$ , рис. 9-11 демонструють залежність у конфігураційному просторі для проміжків часу  $\tau \in [0; 100]$ ,  $\tau \in [4800; 5000]$  та  $\tau \in [0; 5000]$  відповідно.

Рис.7. Залежність  $u(\tau)$ .Рис.8. Залежність  $\theta(\tau)$ .

Рис.9. Залежність  $u(\theta)$  при  $\tau \in [0; 100]$ .Рис.10. Залежність  $u(\theta)$  при  $\tau \in [4800; 5000]$ .Рис.11. Залежність  $u(\theta)$  при  $\tau \in [0; 5000]$ .

Сукупний аналіз рис. 7-11 дозволяє зробити наступні висновки щодо резонансної динаміки пружинно-маятникової системи (1): в околі одночасного зовнішнього та внутрішнього резонансу з'являється *перехідна форма коливань*. На початку процесу руху системи є близькі до цієї форми, на графіках

залежностей у конфігураційному просторі дана форма має вигляд параболи з рогами, направленими вгору. *Перехідну форму* можна побачити на рис. 9, що демонструє початок процесу, та на рис. 11, на якому представлена залежність на всьому часовому проміжку, що розглядається. На рис. 9 бачимо, як траєкторії роблять рухи поблизу *перехідної форми* коливань, що є такою, що притягує в момент свого існування, а далі швидко розвивається її нестійкість. На рис. 11 бачимо весь процес в цілому – коли *перехідна форма* перестає існувати, траєкторії наближуються до постійно стійкої в околі резонансу формі зв'язаних коливань. Як бачимо, траєкторії на рис. 11 з плином часу згущуються на стійкій формі зв'язаних коливань, яка має дещо викривлену внаслідок дисипації та зовнішнього збурення форму у конфігураційному просторі. Коли перехідний процес закінчується, коливання системи стабілізуються і відбуваються в режимі стійкої форми, що демонструє рис. 10, де показаний кінець процесу. Сама стійка зв'язана форма коливань в даному випадку є досить близькою до локалізованої форми розкачки маятника, що може бути використано з ціллю віброгасіння коливань системи (1): вживаючи допоміжні засоби демпфування на маятнику, можна забезпечити відтік енергії з пружини. Таким чином, чисельно-аналітичний експеримент у повній мірі підтверджує результати аналітичного дослідження за методикою редукованої системи.

#### 4. Висновки

Динаміка дисипативної пружинно-маятничової системи (1) під впливом зовнішнього періодичного збурення досліджена в околі зовнішнього резонансу на частоті коливання пружини та в околі одночасного зовнішнього та внутрішнього резонансів. Аналіз резонансної динаміки проведений на основі концепції нелінійних нормальних форм Каудерера-Розенберга, що була узагальнена для систем з малою дисипацією енергії та при наявності малого зовнішнього збурення [7-10]. Застосована *методика зведення до редукованої системи* відносно енергії системи, арктангенса відношення амплітуд та різниці фаз розв'язків в околі резонансу, що була раніше поширена на системи з малою дисипацією енергії та в умовах зовнішнього збурення [7-10]. За допомогою даної методики були отримані наступні аналітичні результати: в околі зовнішнього резонансу на частоті коливання пружини локалізовані коливання пружини системи (1) залишаються стійкими, тоді як стійких зв'язаних коливань не виникає. В околі одночасного зовнішнього та внутрішнього резонансу спостерігаються стійкі зв'язані коливання системи (1), локалізація ж енергії навпаки не відбувається. Окрім того під час перехідного процесу з'являється новий тип форм коливань - так звана *перехідна нелінійна форма коливань*. Таким чином, у системі (1) було виявлено появу нової нелінійної форми коливань. Оскільки така форма є такою, що притягує рухи системи під час свого існування, поява її під час перехідного процесу від нестійких коливань до стійких вносить додаткову нестабільність у систему і робить перехідний процес довшим. Таким чином, виявлення *перехідної форми коливань* є важливим результатом дослідження динаміки системи. Нові, актуальні для задач віброгасіння, результати щодо стійкості та біфуркацій форм коливань в режимі резонансу та залежності їх існування від часу отримані. Розглянуто еволюцію

положень рівноваги редукованої системи внаслідок дисипації енергії та глобальну поведінку траєкторій руху в околі резонансу. Особливості застосування *методики зведення до редукованої системи* обговорюються. Достовірність отриманих аналітичних результатів підтверджено за допомогою чисельно-аналітичних експериментів, реалізованих мовою C++.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Rosenberg R.M., Atkinson C.P. On the natural modes and their stability in nonlinear two-degree-of-freedom systems // *Journal of Applied Mechanics*. - 1959. - V. 26 – P. 377-385.
2. Аврамов К.В., Михлин Ю.В. Нелинейная динамика упругих систем. Том 1. Модели, методы, явления - М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2010. – 704 с.
3. Vakakis A., Manevitch L., Mikhlin Yu., Pilipchuk V., Zevin A. Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems - New York: Wiley Interscience. - 1996. - 552~P.
4. Каудерер Г. Нелинейная механика - М.: Иностран. литер., 1961. – 777 с.
5. Rosenberg R. On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom // *Advances of Applied Mechanics*. - 1966. - V. 9. - P. 156–243.
6. Wang F., Bajaj A., Kamiya K. Nonlinear Normal Modes and Their Bifurcations for an Inertially-Coupled Nonlinear Conservative System // *Purdue university* - 2005. – 54 p.
7. Plakhsy K.Y., Mikhlin Yu.V., Dynamics of nonlinear dissipative systems in the vicinity of resonance // *Journal of Sound and Vibration*. - 2015. – V. 334. – P. 319-337.
8. Михлин Ю.В., Клименко А.А., Плаксий Е.Ю. Резонансные колебания в системе с ограниченным возбуждением, содержащей гаситель колебаний // *Вестник Запорожского национального университета «Математическое моделирование и прикладная механика»*. - 2015. - 2. - С. 135-141.
9. Plakhsy K.Y., Mikhlin Yu.V. Resonance behavior of the limited power-supply system coupled with the nonlinear absorber // *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace*. - 2015. - V. 6, 3. - P. 475-495.
10. Плаксий К.Ю., Михлин Ю.В. Дослідження поведінки пружної коливальної системи з нелінійним віброгасником в околі резонансу // *Вісник Запорізького національного університету «Математичне моделювання і прикладна механіка»*. - 2014. - 2. – С. 116-125.
11. Найфэ А.Х. Методы возмущений. – М: Мир, - 1973. – 446 с.