УДК 519.217.1

Пуассонівські періодичні кусково стаціонарні потоки та оцінка їх інтенсивності

О. В. Маєвський, О. В.Мацюк, М. В. Приймак, О. М. Приймак
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

Періодичні пуассонівські потоки не рідкість у реальному житті. Проте питання оцінки їх періодичної інтенсивності залишається відкритим. В роботі встановлено, що: побудова однозначної оцінки нестаціонарних потоків з використанням методу максимальної правдоподібності неможлива, коли інтенсивність залежить від двох чи більше параметрів; побудова однозначної оцінки, що є незміщеною, слушною та ефективною, можлива лише на окремих інтервалах нестаціонарного потоку, на яких потік є стаціонарним. Виділено клас потоків, для яких розробка методів оцінки інтенсивності є можливою. Отримані результати відкривають можливості для оцінки інтенсивності емпіричних стохастичних періодичних потоків пуассонівського типу, наприклад, дзвінків до станції невідкладної допомоги, потоків даних в Інтернеті і т. ін.

Ключові слова: *періодичний пуассонівський потік, кусково стаціонарний потік, інтенсивність потоку, оцінка інтенсивності періодичного потоку.*

Периодические пуассоновского потоки не редкость в реальной жизни. Однако вопрос оценки их периодической интенсивности остается открытым. В работе установлено, что: построение однозначной оценки нестационарных потоков с использованием метода максимального правдоподобия невозможно, когда интенсивность зависит от двух или более параметров; построение однозначной оценки, являющейся несмещенной, удобной и эффективной, возможно лишь на тех отдельных интервалах нестационарного потока где поток является стационарным. Выделен класс потоков, для которых разработка методов оценки интенсивности возможна. Полученные результаты открывают возможности для оценки интенсивности эмпирических стохастических периодических потоков пуассоновского типа, например, звонков на станцию неотложной помощи, потоков данных в Интернете и т. д.

Ключевые слова: *периодический пуассоновский поток, кусочно стационарный поток, интенсивность потока, оценка интенсивности периодического потока.*

The periodic Poisson flows are not rare in real world. But evaluation of their periodic intensity still is an open question. The investigation under dicussion has proved that: it is impossible to use the method of maximum likelihood to build the unique estimate of unsteady flow intensity depending on two or more parameters; the unique estimate, which is unbiased, opportune and effective, is possible only for certain stream sections where an unsteady in general flow is nevertheless stationary. The class of flows is separated, for which development of methods for their intensity evaluation is possible. The investigation results open the way for evaluation of intensity of empirical stochastically periodical Poisson's type streams, for example calls to first aid station, data streams in the Internet, etc.

Key words*: Poisson flow, periodic Poisson flow, piecewise linear Poisson flow, flow's intensity, assessment of the flow's intensity.*

1. Вступ

В повсякденному житті нам постійно зустрічаються потоки – потоки машин на трасах, потоки звернень в системи масового обслуговування (наприклад, в суди, перукарні), в останні роки неможливо уявити існування людини без **інформаційних потоків**. Вважається, що історія дослідження потоків методами теорії ймовірностей і математичної статистики бере свій початок із робіт датського інженера А.К. Ерланга. Проте, якщо звернутися до одного із прикладів потоків – моментів появи сонячних плям, то виявляється, що вивчення потоків має набагато глибшу історію [1]. Аналізуючи сонячні плями, в 1843 році Г. Швабе відкрив, що для інтенсивності їх появи характерна періодичність із середнім періодом 10 років. Дещо пізніше Р. Вольф отримав більш точне значення цього періоду – приблизно 11 років.

Окремий етап в дослідженні сонячних плям, а по суті стохастично періодичних потоків, посідають дослідження А. Шустера. Виходячи із наглядної «періодичності» послідовності (ряду) чисел сонячних плям, А. Шустер запропонував спосіб їх аналізу, що отримав назву періодограманалізу. Ще один підхід до дослідження потоку сонячних плям запропонував Дж. Юл (1928 рік), для цього він за модель потоку використав процес авторегресії і всі подальші дослідження здійснював на базі цієї моделі.

Новий етап в дослідженні потоків з використанням ймовірнісних методів розпочався з робіт А. Ерланга. Хоча основною причиною появи його робіт, а пізніше робіт інших авторів – К.Пальма (Швеція), Ф. Плачека (Франція), В Феллера (США), О. Хінчина (СРСР)), було дослідження систем масового обслуговування, проте значна увага приділялася і потокам, як однієї із складових цих систем. Особливої уваги заслуговують роботи О. Хінчина (СРСР), зокрема робота [2], в якій закладені основи теорії потоків, в першу чергу найпростіших потоків, які з часом отримали назву стаціонарних пуассонівських потоків. Для цих потоків розроблені методи оцінки їх інтенсивності [3].

Узагальненням стаціонарних потоків є пуассонівські нестаціонарні потоки [2, с.15-18], інтенсивність яких вже є деякою функцією часу $\lambda(t)$. Проте ці потоки якогось особливого інтересу не мають. Привертають увагу частинні випадки нестаціонарних потоків, в першу чергу **стохастично періодичні потоки пуассонівського типу**, інтенсивність яких змінюється періодично. Причина в тому, що крім сонячних плям, про які згадувалося вище, стохастична періодичність характерна для вхідних потоків більшості систем масового обслуговування.

Яким же є стан досліджень періодичних пуассонівських потоків? Часто обмежуються лише згадками про наявність таких потоків та прикладами їх періодичної інтенсивності [4, с. 107], наголошується на важливості їх дослідження [5, с. 48-50]. Заслуговує уваги робота [6], в якій введено клас випадкових процесів з незалежними періодичними приростами, частинним випадком яких і є пуассонівські періодичні процеси або те саме, що потоки. Проте, що стосується чи не основного питання періодичних пуассонівських потоків – оцінки їх інтенсивності, то ця задача залишається невирішеною.

2. Мета роботи

Навести основні поняття пуассонівських потоків, в тому числі періодичних пуассонівських потоків; розглянути питання щодо можливості використання для побудови оцінки інтенсивності періодичного пуассонівського потоку методів статистичного аналізу періодично корельованими процесами та нестаціонарних пуассонівських потоків і на основі зроблених висновків виділити із множини періодичних пуассонівських потоків клас періодичних пуассонівських кусково стаціонарних потоків та побудувати оцінку інтенсивності.

Щоб перейти до розгляду цих питань і при цьому уникати певних роз'яснень, нагадувань, застережень, спочатку нагадаємо деякі поняття, пов'язані з потоками

3. Потоки, їх задання та основні види пуассонівських потоків

В загальному випадку потоком називають послідовність подій, що відбуваються в деякі моменти часу, причому ці моменти в переважній більшості є випадковими. Якщо подіями є замовлення в систему обслуговування, такий потік називається потоком замовлень (звернень, вимог), вхідним потоком або просто потоком.

3.1. Способи задання потоків

Є три основних способи опису потоків. Нагадаємо їх, дотримуючись при цьому [2-4].

Потік можна розглядати як випадковий процес

$$\xi(t),\ t \ge 0\,, \tag{3.1}$$

що визначає число подій, що відбулися за проміжок часу $(0,t)$.

Нехай $t_1,\cdots,t_i,\cdots,t_0=0$ – випадкові моменти часу, в які надходять замовлення. Якщо ці моменти розглядати як послідовність випадкових величин (точок) $t_1,\cdots,t_i,\cdots$, задану на осі часу $0t,\ t\ge 0$, причому $0<t_1<t_2<\cdots$, то таку послідовність називають потоком [4], іноді точковим процесом.

Якщо послідовність $t_1,\cdots,t_i,\cdots$ – це моменти надходження замовлень, тоді різниці $t_i - t_{i-1} \overset{df}{=} \tau_i$, $i=1,2,\cdots$, визначають інтервали (проміжки) часу між $i-1$-м і i-м замовленнями. Сам же потік розглядається як послідовність випадкових величин (інтервалів) τ_i, $i=1,2,\cdots$.

Розглянуті способи задання потоків взаємопов'язані, тобто потік, описаний одним із трьох способів, може бути описаний і в розумінні двох інших [2, с. 41; 4]. В подальшому ми будемо розглядати потік у вигляді (3.1), тобто як випадковий процес $\xi(t),\ t\ge 0$

3.2. Найпростіший потік

За своїми властивостями потоки можуть бути різних типів. Найбільш вивченими є найпростіші потоки, тобто потоки, що задовольняють умовам стаціонарності, відсутності післядії та ординарності [2, с. 8]. Показано [2, с. 8-10; 4], що для найпростішого потоку $\xi(t)$ ймовірність того, що за довільний проміжок часу $(t,t+\tau)$ відбудеться s подій, визначається за формулою

$$P(\xi(\tau)=s)=\frac{(\lambda\tau)^s}{s!}e^{-\lambda\tau},\ \ s=0,1,\cdots. \tag{3.2}$$

Параметр λ називається інтенсивністю потоку, іноді густиною потоку.

Оскільки розподіл (3.2) є розподілом Пуассона, найпростіший потік називають стаціонарним пуассонівським потоком або стаціонарним потоком Пуассона. Варто також відзначити, що замість назви «пуассонівський потік» більш точною є назва «пуассонівський процес», проте враховуючи, що ця робота має пряме відношення до теорії масового обслуговування, замість назви пуассонівських процес ми будемо переважно вживати термін пуассонівський потік. Загалом же, потрібно пам'ятати, що **пуассонівський потік – це теж саме, що пуассонівський процес** [7, с.763]

3.3. Нестаціонарні пуассонівські потоки

Критичне вивчення умов, які приводять до найпростішого потоку, в практичних ситуаціях зустрічаються не так часто [5, с.20]. Якщо потоки розглядати на достатньо тривалих інтервалах часу, то серед них досить часто зустрічаються потоки, для яких умова стаціонарності вже не виконується, хоча умови ординарності і відсутності післядії залишаються справедливими. Перші вагомі результати з теорії нестаціонарних потоків пуассонівського типу отримані у відомій роботі О. Хінчина [2, с.15-18, 75-78].

Нестаціонарність потоку проявляється в тому, що його інтенсивність λ вже є деякою функцією часу і визначається за формулою

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M[\xi(t+\Delta t)-\xi(t)]}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{M\xi(t,\Delta t)}{\Delta t}=m'(t), \tag{3.3}$$

де $\xi(t,\tau)=\xi(t+\tau)-\xi(t)$ – приріст потоку, тобто число подій потоку, що відбулися на інтервалі $[t,t+\Delta t)$, $m(t)=M\xi(t)$ – математичне сподівання потоку. Зауважимо, що приріст $\xi(t,\tau)$ можна розглядати як випадкову величину.

Для характеристики пуассонівськогопотоку крім його інтенсивності $\lambda(t)$ використовується також **провідна функція** $\Lambda(t,\tau)$, що визначається як **середнє число подій**, які відбулися за інтервал часу $[t,t+\tau]$:

$$\Lambda(t,\tau)=\int_{t}^{t+\tau}\lambda(t)dt.$$

Враховуючи (3.3), провідна функція $\Lambda(t,\tau)=M\xi(t,\tau)=M[\xi(t+\tau)-\xi(t)]$. Відношення $\dfrac{\Lambda(t,\tau)}{\tau}$ – це середнє значення інтенсивності потоку в інтервалі $(t,t+\tau)$.

Оскільки для стаціонарного потоку інтенсивність $\lambda(t)=\lambda$, провідна функція $\Lambda(t,\tau)=\int_{t}^{t+\tau}\lambda dt=\lambda\tau\overset{df}{=}\Lambda(\tau)$, тобто залежить лише від довжини інтервалу.

Показано [2, с.15-18, 75-78], що для нестаціонарного потоку з інтенсивністю $\lambda(t)$ число подій $\xi(t,\tau)=\xi(t+\tau)-\xi(t)$ розподілено за законом Пуассона із параметром $\Lambda(t;\tau)$, тобто

$$P\{\xi(t,\tau)=k\}=\frac{\int\limits_t^{t+\tau}\lambda(t)dt}{k!}e^{-\int\limits_t^{t+\tau}\lambda(t)dt}=\frac{[\Lambda(t,\tau)]^k}{k!}e^{-\Lambda(t,\tau)}.$$

3.4. Пуассонівські періодичні потоки

Серед нестаціонарних потоків увагу спеціалістів-практиків привертають стохастично періодичні потоки. Нагадаємо [8, 9], що в загальному випадку потік називається **стохастично періодичним**, якщо періодичними (з одним і тим же періодом) є його певні параметри, ймовірнісні характеристики. Що стосується стохастично періодичних потоків пуассонівського типу, то періодичною є [3-5] їх інтенсивність $\lambda(t), t \geq 0$, тобто існує таке число T , що

$$\lambda(t)=\lambda(t+T).$$

При цьому сам потік називається **періодичним пуассонівським потоком**.

Хоча в прикладних дослідженнях ці потоки зустрічаються досить часто, проте основному питанню їх дослідження – оцінці періодичної інтенсивності практично ніякої уваги не приділялося. Щоб розглянути це питання, спочатку зупинимось на аналізі можливостей використання для побудови оцінки періодичної інтенсивності методів теорії оцінювання інших класів процесів, в першу чергу стаціонарних і періодично корельованих процесів.

4. Про відмінності у визначеннях періодично корельованих процесів і періодичних пуассонівських потоків та в постановці задач оцінювання їх характеристик

На даний час достатньо глибоко розроблені методи статистичного аналізу для різних класів процесів, зокрема для стаціонарних та періодично корельованих процесів, періодичних ланцюгів Маркова. І тут виникає цілком закономірне питання: чи можливо для побудови оцінки періодичної інтенсивності використати ті чи інші елементи методів оцінювання ймовірнісних характеристик, розроблених для процесів, що теж характеризуються стохастичною періодичністю, в першу чергу періодично корельованих процесів?

Виявляється, безпосередньо не можна. Основна причина такої відповіді полягає в різних вихідних позиціях щодо визначення цих процесів. При визначенні періодично корельованого процесу [10-12] використовуються ймовірнісні характеристики **значень процесу** $\xi(t)$ в точках $t\in(-\infty,\infty)$. В основі визначення періодичного пуассонівського потоку лежать **прирости потоку** $\eta(t,\tau)$, взяті на певних часових інтервалах $[t,t+\tau)\in[0,\infty)$. Відмінності у визначеннях періодично корельованих процесів і періодичних пуассонівських потоків (процесів) є причиною відмінностей і в постановці зворотних задач – оцінці їх ймовірнісних характеристик, через властивості яких ці процеси визначаються.

Для періодично корельованого процесу $\xi(t), t\in(-\infty,\infty)$ з періодом T ми можемо знаходити оцінки його локальних характеристик, тобто оцінки в деякі моменти часу. Ось одна із типових задач: побудувати оцінку математичного сподівання $M\xi(t_i)$ в точках $t_i \in [0,T),\ i = 1,2,\cdots,n$.

Для періодичних пуассонівських потоків, як і нестаціонарних пуассонівських потоків загалом, мова може йти про інтегральні оцінки їх інтенсивності, тобто про оцінки на деяких часових інтервалах. При цьому задача для періодичного з періодом T пуассонівського потоку $\xi(t),\ t \in [0,\infty)$, може бути сформульована таким чином: побудувати оцінку інтенсивності $\lambda(t)$ на інтервалах $[t_i, t_i + \tau_i) \subseteq [0,T),\ i = 1,2,\cdots,n$, що не перетинаються.

5. Можливості статистичного аналізу нестаціонарних пуассонівських потоків

Оскільки для побудови оцінки інтенсивності періодичного пуассонівського потоку на інтервалі $[t, t+\tau) \subseteq [0,T)$ потрібно буде використовувати прирости потоку на цьому інтервалі (і можливо на спеціально підібраних інших інтервалах), причому потік на цих інтервалах є нестаціонарним, то в цій ситуації виникає ще одне принципове запитання: що зроблено в напрямку оцінки інтенсивності нестаціонарних потоків, і що із цього можна використати для оцінки періодичної інтенсивності?

Щоб відповісти на це запитання, спочатку розглянемо приклади на знаходження оцінки інтенсивності. Перший із прикладів розглядався в [3, с.314-315], проте його розв’язок і особливо висновок до нього, в якому говориться «В більшості випадків розв’язок не може бути знайдений в явному вигляді і тому використовують числові методи», не переконливий.

Приклад 1. Досліджується пуассонівський потік $\xi(t),\ t \ge 0$, з інтенсивністю $\lambda(t,\bar{a})$, де $\lambda(\bullet,\bullet)$ – відома функція, $\bar{a} = (a_0, a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_k)$ – вектор невідомих параметрів. Нехай в результаті спостережень за цим потоком на інтервалі $(t_1, t_1 + \tau_1)$ було зафіксовано s_1 подій, тобто для випадкової величини $\xi(t_1;\tau_1) = \xi(t_1 + \tau_1) - \xi(t_1)$ її реалізація $x(t_1;\tau_1) = x(t_1 + \tau_1) - x(t_1) = s_1$. На основі цих даних дослідити можливості побудови оцінки інтенсивності $\lambda(t,\bar{a}),\ t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$, або те саме, що оцінки вектора $\bar{a} = (a_0, a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_k)$.

Для отримання оцінки використаємо метод максимальної правдоподібності [3, с.314-315]. Для цього запишемо функцію правдоподібності $L(\bullet)$ для випадкової величини $\xi(t_1, \tau_1)$, враховуючи, що вона розподілена за законом Пуассона, параметром якого є провідна функція $\Lambda(t_1, \tau_1; \bar{a}) = \int\limits_{t_1}^{t_1+\tau_1} \lambda(t,\bar{a})dt$:

$$P(\xi(t_1;\tau_1) = s_1) = \frac{\Lambda^{s_1}(t_1, \tau_1; \bar{a})}{s_1!} e^{-\Lambda(t_1;\tau_1)} = \frac{\left(\int\limits_{t_1}^{t_1+\tau_1} \lambda(t,\bar{a})dt\right)^{s_1}}{s_1!} e^{-\int\limits_{t_1}^{t_1+\tau_1} \lambda(t,\bar{a})dt}. \qquad (5.1)$$

Оскільки ми розглядаємо лише одну випадкову величину $\xi(t_1,\tau_1)$, функція правдоподібності співпадає із розподілом (5.1), тобто

$$L(t_1,\tau_1;\bar{a})=\frac{\Lambda^{s_1}(t_1,\tau_1;\bar{a})}{s_1!}e^{-\Lambda(t_1,\tau_1;\bar{a})}.$$

Згідно методу максимальної правдоподібності за оцінку $\hat{\bar{a}}$ вектора $\bar{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_k)$ приймається така функція $\hat{\bar{a}}=\hat{\bar{a}}(x(t_1,\tau_1))$ від спостереження $x(t_1,\tau_1)$, що надає максимум функції правдоподібності $L(t_1,\tau_1;\bar{a})$ або її логарифмові $\ln L(t_1,\tau_1;\bar{a})$. Поставлену задачу оцінки вектора $\bar{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_k)$ можна тепер записати у вигляді

$$\arg\max_{\bar{a}} L(t_1,\tau_1;\bar{a})=\arg\max_{\bar{a}}\left(\frac{\Lambda^{s_1}(t_1,\tau_1;\bar{a})}{s_1!}e^{-\Lambda(t_1,\tau_1;\bar{a})}\right)$$

або те саме, що

$$\arg\max_{\bar{a}}\ln\left(\frac{\Lambda^{s_1}(t_1,\tau_1;\bar{a})}{s_1!}e^{-\Lambda(t_1,\tau_1;\bar{a})}\right),$$

тобто знайти вектор $\bar{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_k)$, який доставляє максимальне значення функції правдоподібності $L(t_1,\tau_1;\bar{a})$ або її логарифмові

$$\ln L(t_1,\tau_1;\bar{a})=s_1 ln\Lambda(t_1,\tau_1;\bar{a})-\ln(s_1!)-\Lambda(t_1,\tau_1;\bar{a}).$$

Для знаходження оцінки максимальної правдоподібності, потрібно розв'язати систему рівнянь правдоподібності

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\ln L(t_1,\tau_1;\bar{a})=\frac{\partial}{\partial a_i}\left(s_1\ln\Lambda(t_1,\tau_1;\bar{a})-\ln(s_1!)-\Lambda(t_1,\tau_1;\bar{a})\right)=0,\ \ i=0,1,\cdots,k. \quad (5.2)$$

Доданки $\ln(s_1!)$ в системі (5.2) не залежать від $\bar{a}$, тому вона набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial a_i}\left(s_1\ln\Lambda(t_1,\tau_1;\bar{a})-\Lambda(t_1,\tau_1;\bar{a})\right)=0,\ \ i=0,1,\cdots,k,$$

або після диференціювання

$$s_1\frac{\Lambda'_{a_i}(t_1,\tau_1;\bar{a})}{\Lambda(t_1,\tau_1;\bar{a})}-\Lambda'_{a_i}(t_1,\tau_1;\bar{a})=\Lambda'_{a_i}(t_1,\tau_1;\bar{a})\left(\frac{s_1}{\Lambda(t_1,\tau_1;\bar{a})}-1\right)=0,\ \ i=0,1,\cdots,k.$$

Прирівнюючи множник $\left(\frac{s_1}{\Lambda(t_1,\tau_1;\bar{a})}-1\right)$ кожного рівняння цієї системи до нуля, отримаємо еквівалентну систему із $k+1$ рівнянь:

$$\Lambda(t_1,\tau_1;\bar{a})=s_1,\ \ i=0,1,\cdots,k. \quad (5.3)$$

Оскільки всі її $k+1$ рівняння системи (5.3) співпадають, замість системи рівнянь достатньо розглядати лише одне рівняння

$$\Lambda(t_1,\tau_1;\bar{a})=\Lambda(t_1,\tau_1;a_0,a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_k)=s_1. \quad (5.4)$$

Рівняння (5.4) із невідомими параметрами $a_0,a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_k$ будемо називати **розрахунковим**. Щоб знайти його розв'язок, виберемо головний параметр (компоненту) із невідомих $a_0,a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_k$, наприклад, a_0, при цьому всі інші параметри є вільними. Надавши вільним параметрам певні значення та підставивши їх в рівняння (5.4), знайдемо розв'язок відносно головного параметра. Отримані значення вільних і головного параметрів позначимо через $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_i, \cdots, \hat{a}_k$. В сукупності вони утворюють вектор $\hat{\bar{a}} = (\hat{a}_0, \hat{a}_1, \cdots, \hat{a}_i, \cdots, \hat{a}_k)$, який і є оцінкою вектора $\bar{a} = (a_0, a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_k)$. Якщо тепер компоненти цього вектора підставити у вираз для інтенсивності $\lambda(t, \bar{a}), t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$, отримаємо її оцінку $\hat{\lambda}(t, \hat{\bar{a}}), t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$.

Оскільки значення вільних параметрів можна вибирати довільно, то множина розв'язків рівняння (5.4), тобто множина оцінок $\hat{\bar{a}} = (\hat{a}_0, a_1, \cdots, \hat{a}_i, \cdots, \hat{a}_k)$ є нескінченою. Звідси виходить, що нескінченою, а значить і неоднозначною, є також множина оцінок інтенсивності $\hat{\lambda}(t, \hat{\bar{a}}), t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$. Отже в сформульованому вигляді ця задача однозначного рішення не має. Однозначну оцінку інтенсивності нестаціонарного пуассонівського потоку можливо знаходити лише на окремих інтервалах часової напівосі $[0, \infty)$ і при умові, що інтенсивність на цих інтервалах залежить лише від одного параметра.

Приклад 2. Досліджується пуассонівський потік $\xi(t), t \ge 0$, причому припускається, що його інтенсивність залежить лише від одного параметра. В результаті спостережень за потоком на інтервалі $(t_1, t_1 + \tau_1)$ було зафіксовано s_1 подій. Побудувати оцінку інтенсивності потоку для випадків, коли: а) $\lambda(t) = a_0$; б) $\lambda(t) = a_1 t$.

Випадок а). Якщо $\lambda(t) = \lambda = a_0$, провідна функція $\Lambda(t_1, \tau_1) = \int\limits_{t_1}^{t_1 + \tau_1} a_0 dt = a_0 \tau_1$.

При цьому розрахункове рівняння (5.4) набуває вигляду $\Lambda(t_1, \tau_1) = a_0 \tau_1 = s_1$. Звідси виходить, що оцінкою інтенсивності є величина $\bar{a}_0 = {s_1}/{\tau_1}$, $t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$, або, використовуючи традиційне для інтенсивності позначення, $\hat{\lambda}(t) = \hat{\lambda} = {s_1}/{\tau_1}$, $t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$.

Випадок б). Якщо $\lambda(t) = a_1 t$, то провідна функція $\Lambda(t_1, \tau_1) = \int\limits_{t_1}^{t_1 + \tau_1} a_1 t dt = \frac{a_1 \tau_1}{2}(2t_1 + \tau_1)$, відповідно розрахунковим є рівняння $\frac{a_1}{2}\left(2t_1\tau_1 + \tau_1^2\right) = s_1$. Із нього знаходимо, що $a_1 = \frac{2s_1}{\tau_1(2t_1 + \tau_1)}$. Отже оцінкою інтенсивності є функція $\hat{\lambda}(t) = \frac{2s_1}{\tau_1(2t_1 + \tau_1)} t$, $t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$.

Відзначимо, що для розглянутих випадків а) і б) оцінка інтенсивності визначається однозначно. Проте якщо для випадку а) оцінка інтенсивності

$\hat{\lambda}(t) = {s_1}/{\tau_1}$, $t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$, не залежить від розміщення інтервалу $[t_1, t_1 + \tau_1)$ на осі $[0, \infty)$, тобто не залежить від значення t_1, ситуація у випадку б) є іншою.

При одних і тих же результатах спостережень, тобто коли τ_1 і s_1 одні і ті ж, графіки оцінки інтенсивності на різних інтервалах спостереження мають різні аналітичні вирази і відрізняються за геометричною формою, тобто при паралельному переносі вони не сумісні. Разом із такою розбіжністю має місце цікавий факт. Враховуючи, що у виразі $\hat{\lambda}(t) = \dfrac{2s_1}{\tau_1(2t_1 + \tau_1)} t,\ t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$, параметр t_1 і аргумент $t \in [t_1, t_1 + \tau_1)$ є величинами однакового порядку, неважко переконатися, що

$$\lim_{t_1 \to \infty} \hat{\lambda}(t), t \in [t_1, t_1 + \tau_1) = \lim_{t_1 \to \infty} \frac{2s_1}{\tau_1(2t_1 + \tau_1)} t, t \in [t_1, t_1 + \tau_1) = \frac{2s_1}{2\tau_1} = \frac{s_1}{\tau_1}.$$

Остання формула показує, що коли інтервал спостереження $[t_1, t_1 + \tau_1]$ зсувається в сторону зростання аргументу t, то при фіксованому s_1 оцінка інтенсивності прямує до величини ${s_1}/{\tau_1}$, яка є оцінкою інтенсивності стаціонарного потоку.

Приклад 3. В результаті спостережень за стаціонарним пуассонівським потоком $\xi(t)$ на інтервалах $[t_i, t_i + \tau_i), i = 1, \cdots, m$, було зафіксовано s_i подій: $\xi(t_i; \tau_i) = \xi(t_i + \tau_i) - \xi(t_i) = s_i, i = 1, \cdots, m$. Сума всіх інтервалів $\sum_{i=1}^{m} \tau_i = \tau$, сума всіх подій $\sum_{i=1}^{m} s_i = s$. Вважається, що інтервали $[t_i, t_i + \tau_i), i = 1, \cdots, m$, не перетинаються. Використовуючи ці результати, побудувати оцінку інтенсивності λ.

Оскільки прирости $\xi(t_i; \tau_i) = \xi(t_i + \tau_i) - \xi(t_i)$ на інтервалах, що не перетинаються, є незалежними величинами, функція правдоподібності

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi(t_i; \tau_i) = s_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(\lambda \tau_i)^{s_i}}{s_i!} e^{-\lambda \tau_i} = \lambda^s e^{-\lambda \tau} \prod_{i=1}^{n} \frac{\tau_i^{s_i}}{s_i!}.$$

Позначимо $\prod_{i=1}^{n} \dfrac{\tau_i^{s_i}}{s_i!} = a$, при цьому функція правдоподібності $L(\lambda) = a \lambda^s e^{-\lambda \tau}$.

Взявши похідну від цієї функції та прирівнявши її до нуля, маємо

$$L'_\lambda = as\lambda^{s-1} e^{-\lambda \tau} - a\tau s \lambda^s e^{-\lambda \tau} = a\lambda^{s-1} e^{-\lambda \tau} (s - \lambda \tau) = 0$$

або те саме, що $s - \lambda \tau$. Звідси отримуємо, що оцінкою інтенсивності λ є величина

$$\hat{\lambda} = \frac{s}{\tau}. \tag{5.5}$$

Аналіз отриманих в роботі теоретичних результатів та розглянутих прикладів дозволяє стверджувати, що побудова однозначної оцінки періодичної інтенсивності можлива не для всіх загалом періодичних пуассонівських потоків, а лише для потоків, що задовольняють певним умовам. Сформулюємо їх наступним чином.

Будемо вважати, що періодичний пуассонівський потік $\xi(t), t \in [0,\infty)$ з періодом T є таким, що на інтервалі $[0,T)$ можна виділити окремі інтервали $[t_i, t_i + \tau_i), i = 1,\cdots,m$, які не перетинаються, їх об'єднання співпадає з інтервалом $[0,T)$, причому на кожному з інтервалів $[t_i, t_i + \tau_i)$ потік є стаціонарним. Це припущення дає змогу виділити із множини періодичних пуассонівських потоків окремий клас потоків, для яких можливо ставити питання про побудову однозначної оцінки їх інтенсивності, що задовольняє умовам незміщеності, слушність і ефективність.

6. Пуассонівські періодичні кусково стаціонарні потоки

Означення 1. Пуассонівський потік $\xi(t)$ називається періодичним кусково стаціонарним потоком, якщо його параметр $\lambda(t)$ є періодичною кусково постійною функцією з періодом T.

У визначенні періодичних пуассонівських кусково стаціонарних потоків можуть бути зроблені певні уточнення, конкретизація. Наприклад, для інтервалу $[0,T)$ можуть вказуватися інтервали стаціонарності потоку

$$[t_0,t_1),\cdots,[t_{j-1},t_j),\cdots,[t_{n-1},t_n),\ t_0 = 0,\ t_n = T,$$

на кожному із яких інтенсивність приймає відповідне значення $\lambda(t) = \lambda_j,\ t \in [t_{j-1},t_j)$. Якщо $\tau_j = t_j - t_{j-1}$ – довжини інтервалів $[t_{j-1},t_j),\ j = 1,\cdots,n$, то в сукупності ці довжини можна подати у вигляді вектора $\bar{\tau} = (\tau_1,\cdots,\tau_j,\cdots,\tau_n)$, для якого $\sum_{j=1}^{n} \tau_j = T$, самі ж інтервали $[t_{j-1},t_j),\ j = 1,\cdots,n$, ще можна записати у вигляді $[t_{j-1},t_{j-1}+\tau_j),\ j = 1,\cdots,n$.

Якщо врахувати, що інтенсивність потоку є періодичною функцією з періодом T, то інтервали стаціонарності $[t_0,t_1),\cdots,[t_{j-1},t_j),\cdots,[t_{n-1},t_n)$, розміщені на періоді $[0,T)$, можна періодично розмістити з тим же періодом T на всій напівосі $[0,\infty)$ у вигляді:

$$[t_{j-1}+iT,t_j+iT),\ j = 1,\cdots,n;\ i = 0,1,\cdots. \qquad (6.1)$$

Оскільки за нашими припущеннями на довільному періоді $[iT,(i+1)T)$ розміщується n інтервалів стаціонарності, то використавши позначення $t_j + iT = t_{j+in}$, інтервали (6.1) можна пере позначити таким чином:

$$[t_{j-1+in},t_{j+in}),\ j = 1,\cdots,n;\ i = 0,1,\cdots.$$

Крім задання інтервалів стаціонарності також можуть бути вказані значення інтенсивностей потоку на цих інтервалах, наприклад, у вигляді вектора

$$\overline{\lambda} = \left(\lambda_1, \cdots, \lambda_j, \cdots, \lambda_n\right),$$

де λ_j, $j = 1, \cdots, n$ – інтенсивність потоку на інтервалі $\left[t_{j-1}, t_j\right)$, а значить і на інтервалах $\left[t_{j-1} + iT, t_j + iT\right)$, $i = 0, 1, \cdots$.

У випадках, коли про пуассонівський періодичний кусково стаціонарний потік відома деяка додаткова інформація, наприклад, відомими можуть бути період потоку, його інтервали стаціонарності, інтенсивності потоку на цих інтервалах тощо, ця інформація може вказуватися при задані потоку. Якщо, наприклад, відомими є:

- ✓ період T, то потік може бути поданий у вигляді $\{\xi(t), T\}$;
- ✓ вектор $\overline{\tau}$ – у вигляді $\{\xi(t), \overline{\tau}\}$;
- ✓ вектор $\overline{\lambda}$ – у вигляді $\{\xi(t), \overline{\lambda}\}$;
- ✓ період T і вектор $\overline{\lambda}$ – у вигляді $\{\xi(t), T, \overline{\lambda}\}$;
- ✓ вектори $\overline{\tau}$ і $\overline{\lambda}$ – у вигляді $\{\xi(t), \overline{\tau}, \overline{\lambda}\}$.

Подання періодичного пуассонівського кусково стаціонарного потоку в тому чи іншому вигляді дозволяє робити постановки конкретних, чітко сформульованих задач. Наприклад, для потоку $\{\xi(t), \overline{\lambda}\}$ такими задачами можуть бути оцінка періоду T і вектора $\overline{\tau}$; для потоку $\{\xi(t), \overline{\tau}\}$ – оцінка вектора $\overline{\lambda}$.

7. Оцінка інтенсивності періодичного пуассонівського кусково стаціонарного потоку

Розглянемо питання побудови оцінки інтенсивності пуассонівського періодичного кусково стаціонарного потоку $\{\xi(t), T, \overline{\tau}\}$, тобто потоку, для якого відомими є його період T та вектор інтервалів стаціонарності $(t_0, t_1), \cdots, \left(t_{j-1}, t_j\right), \cdots, (t_{n-1}, t_n)$, де $t_0 = 0, t_n = T$, або відповідний їм вектор тривалостей стаціонарності $\overline{\tau} = \left(\tau_1, \cdots, \tau_j, \cdots, \tau_n\right)$, де $\tau_j = t_j - t_{j-1}$. При цьому вектор інтенсивностей $\overline{\lambda} = \left(\lambda_1, \cdots, \lambda_j, \cdots, \lambda_n\right)$ є невідомим.

Спостереження за потоком здійснювалися на інтервалі $\left[0, T'\right]$, $T' >> T$, $\left[{T_0}/{T}\right] = m$, де $[\bullet]$ – ціла частина. Весь інтервал спостереження $\left[0, T'\right]$ розіб’ємо на окремі T_i-інтервали $\left[(i-1)T, iT\right)$, $i = 1, \cdots, m$, довжина кожного з яких рівна періоду T.

Результати спостережень розмістимо у вигляді $m \times n$ матриці, поданої в таб.1, де m – число T_i-інтервалів $\left[(i-1)T, iT\right)$, на протязі яких велися спостереження за потоком, n – кількість інтервалів стаціонарності потоку на кожному T_i-інтервалові. Елемент $s(i, j)$ матриці – це кількість подій, які були зафіксовані на j-му інтервалі стаціонарності i-го T-інтервалу, тобто $s(i,j)$ – це приріст потоку $\xi(t)$ на інтервалі $\left[t_{j-1}+(i-1)T, t_{j-1}+\tau_j+(i-1)T\right)$:

$$s(i,j)=x\left(t_{j-1}+(i-1)T,\tau_j\right)=x\left(t_{j-1}+\tau_j+(i-1)T\right)-x\left(t_{j-1}+(i-1)T\right).$$

В останній стрічці матриці розміщені суми $S(j)=\sum_{i=1}^{m}s(i,j)$, $j=1,\ldots,n$, кожна з яких рівна сумі подій, що відбулися на всіх інтервалах стаціонарності $\left[t_{j-1}+(i-1)T, t_j+(i-1)T+\tau_j\right)$, $i=1,\ldots,m$, з однією і тією ж інтенсивністю λ_j, оцінку якої і потрібно знайти.

Табл.1. Результати спостережень за пуассонівським періодичним кусково стаціонарним потоком

Номер інтервалу на T-періоді / Номер T-періоду	1	...	j	...	n
1	$s(1,1)$	...	$s(1,j)$	...	$s(1,n)$
...	...	...	...	...	...
i	$s(i,1)$	...	$s(i,j)$	...	$s(i,n)$
...	...	...	...	...	...
m	$s(m,1)$	...	$s(m,j)$	...	$s(m,n)$
	$S(1)$	...	$S(j)$	...	$S(n)$

Оскільки при фіксованому j на кожному із інтервалів $\left[t_{j-1}+(i-1)T, t_j+(i-1)T+\tau_j\right)$, $i=1,\ldots,m$, потік є стаціонарним із поки що невідомою інтенсивністю λ_j, то приймаючи до уваги метод оцінки інтенсивності в прикладі 3, зокрема формулу (5.5), неважко бачити, що оцінкою інтенсивності λ_j, $j=1,\ldots,n$ буде статистика

$$\hat{\lambda}_j=\frac{S(j)}{m\tau_j},\ j=1,\cdots,n,$$

де, як зазначалося раніше, $S(j)$ – це сума подій, що відбулися на всіх інтервалах стаціонарності $\left[t_{j-1}+(i-1)T, t_j+(i-1)T+\tau_j\right)$, що мають однакову довжину τ_j і кожному з яких одна і та ж інтенсивність λ_j, m – число інтервалів стаціонарності. Вектор $\overline{\tilde{\lambda}}=\left(\tilde{\lambda}_1,\cdots,\tilde{\lambda}_j,\cdots,\tilde{\lambda}_n\right)$ буде оцінкою вектора інтенсивностей $\overline{\lambda}=\left(\lambda_1,\cdots,\lambda_j,\cdots,\lambda_n\right)$.

8. Висновки

Наведено основні поняття та властивості пуассонівських потоків – стаціонарних, нестаціонарних і періодичних. Розглянуто питання щодо можливостей використання для побудови оцінки інтенсивності періодичного пуассонівського потоку методів статистичного аналізу періодично корельованих процесів та нестаціонарних пуассонівських потоків. Враховуючи отриману при цьому негативну відповідь, із множини періодичних пуассонівських потоків виділено клас потоків, для яких можлива розробка методів оцінки їх інтенсивності. Це клас періодичних пуассонівських кусково стаціонарних потоків, для яких і побудована оцінка їх періодичної інтенсивності. Отримані результати відкривають шлях до оцінки періодичної інтенсивності емпіричних стохастично періодичних потоків пуассонівського типу, наприклад, викликів на станцію швидкої допомоги, потоків інформації в Інтернет-трафіках тощо

ЛІТЕРАТУРА

1. Брей Р., Лоухед Р. Солнечные пятна. – М.: Мир, 1967. – 384 с.
2. Хинчин А.Я. Математические методы теории массового обслуживания. Труды математического института имени В.А.Стеклова, т.49. М.: Изд. АН СССР, 1955. – 122 с.
3. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М. Случайные процессы. Справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 367 с.
4. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. - М.: Наука, 1966. – 431 с.
5. Гнеденко Б.В. Беседы о теории массового обслуживания. – М.: Знание, 1973. – 64 с.
6. Красильников О.І., Марченко Б.Г., Приймак М.В. Процеси з незалежними періодичними приростами і періодичні білі шуми // Відбір і обробка інформації. – 1996. – Вип. 10(86). – С. 22-27.
7. Математическая энциклопедия, т. 4. – М.: Сов. энцикл., 1981. – 1208 с.
8. Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. дис…докт. техн. наук: 05.13.06 / Київ: НАУ, 2001. – 34 с.
9. Приймак М.В., Мацюк О.В., Маєвський О.В., Прошин С.Ю. Моделі та методи дослідження систем масового обслуговування марківського типу в умовах стохастичної періодичності та їх застосування в енергетиці // Технічна електродинаміка. – 2014. – С.11-16.
10. Коронкевич О.І. Лінійні динамічні системи під дією випадкових сил //Наукові записки Львів. ун-ту. – 1957. - 44, №8. – С. 175-183.
11. Гладышев Е.Г. Периодически и почти периодически коррелированные случайные процессы с непрерывным временем // Теория вероятностей и ее применение. – 1963, 8, вып. 2. – С.84-189.
12. Драган Я.П. Свойства отсчетов периодически коррелированных случайных процессов // Отбор и передача информации, 1972, №33. – С.9-12.
13. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – М.: Наука, 1985. – 640 с.

Надійшла – 06.04.2016.