

УДК 532.5:519.6

## Математическая модель течения в мелководной акватории

Д. И. Черний

*Институт телекоммуникаций и глобального информационного пространства НАН  
Украины*

*Киевский национальный университет им. Т.Г.Шевченко, Украина*

Рассматривается течения в мелководной акватории. Акватория представлена в виде плоского канала со сложной формой границ (берегов). Глубина канала считается малой. Течение предполагается вязким и слоистым. Модель основана на аналитическом решении уравнений Навье-Стокса для частного случая слоистого течения (для которого течение Хил-Шоу является предельным случаем) с учетом конвективных слагаемых и нестационарности. Задача сводится к определению течения между ограничивающими подвижными поверхностями с заданным распределением параметров.

**Ключевые слова:** *Сингулярные интегральные уравнения, математическая модель, течение.*

Розглядається течія в мілководній акваторії. Акваторія представлена у вигляді плоского каналу зі складною формою кордонів (берегів). Глибина каналу вважається малою. Течія передбачається в'язкою та шаруватою. Модель заснована на аналітичному рішенні рівнянь Нав'є-Стокса для окремого випадку шаруваті течії (для якої течія Хіл-Шоу є частковим випадком) з урахуванням конвективних доданків і нестационарності. Завдання зводиться до визначення течії між обмежують рухливими поверхнями із заданим розподілом параметрів

**Ключові слова:** *Сингулярні інтегральні рівняння, математична модель, течія.*

The flow in the shallow water area. The water area is represented in the form of a flat channel with a complex shape boundaries (coasts). The depth of the channel is considered to be low. Over the estimated viscous and layered. The model is based on an analytical solution of the Navier-Stokes equations for the particular case of the layered flow (for which for the Hele-Shaw is pridelnynh case), taking into account the convective terms and unsteadiness. The problem is reduced to the determination of the flow between the movable limiting surface with a given distribution of the parameters.

**Key words:** *Singular integral equations, mathematical model, flow.*

### 1 Введение

Наибольшую потребность в прогнозе эволюции таких процессов, как распространение загрязнений в атмосфере и массоперенос (с учетом загрязнений) в ограниченных акваториях под воздействием изменяющихся гидрологических и атмосферных условий испытывают службы, призванные оперативно предупреждать развитие природных и техногенных катастроф и уменьшать/предотвращать их воздействие на окружающую среду.

Инструментом для прогнозирования эволюции широкого спектра процессов в области гидрологии, метеорологии, экологии и геодинамики являются компьютерные системы. Эффективность системы прогнозирования определяется эффективностью используемых математических моделей.

Построение математических моделей гидрологических процессов в акваториях на основе 3D уравнений Навье-Стокса [5] сопряжено с математическими проблемами, вычислительными трудностями и значительными затратами машинного времени для самого процесса

моделирования. Это при том, что наиболее важным фактором для обеспечения оперативного реагирования является минимизация времени для определения тенденций развития посткатастрофического процесса (время на моделирование, время на рассмотрение возможных «сценариев» развития процессов и принятие решений). Именно оперативность является необходимым условием для обеспечения возможных упреждающих и спасательных мероприятий. Причем, в подавляющем большинстве случаев, достаточной информацией является структура поверхностных течений (визуально контролируемых процессов), либо осредненных по глубине (по толщине слоя, расходных) характеристик течений.

Использование упрощенных математических моделей (без существенных потерь адекватности) для компьютерных систем уменьшит время экспресс прогнозирования, что повысит оперативность принятия решения спасательными службами при оптимизации действий, направленных на локализацию и ликвидацию последствий техногенных катастроф.

Целью работы является расширение применимости метода дискретных особенностей на спектр гидрологических (русловых задач) путем построения анизотропно-вязкой (точнее, «стратифицировано идеальной») модели потока жидкости, для которой возможно применение теории потенциала, а значит и метода дискретных особенностей.

## 2 Постановка проблемы

Рассматривается течение (в плоском канале с криволинейной боковой границей) вязкой несжимаемой жидкости, которое описывается уравнениями Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{1}{2} \vec{V}^2 + \frac{p}{\rho} + U \right) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) = \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{V} \quad (1)$$

$$\nabla \vec{V} = 0, \quad (2)$$



Рис.1  
Фото течения в акватории

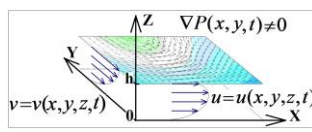


Рис.2  
Схема течения в слое

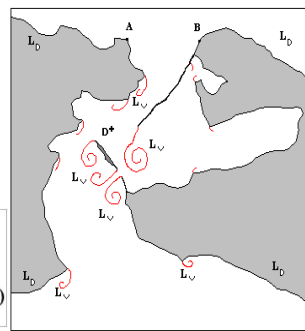


Рис.3  
Схема течения в плоском в канале

Предполагается, что течение в канале является слоистым (Рис.2, компонента скорости перпендикулярная плоскости  $OXY$  полагается равной нулю:  $w(x, y, z, t) \equiv 0$ ), а для компонент скорости  $u(x, y, z, t)$  и  $v(x, y, z, t)$  при любых  $z$  и

$t$  существует непрерывно дифференцируемая функция  $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$  такая, что справедливо:

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y, z, t), \quad w(x, y, z, t) \equiv 0. \quad (3)$$

Тогда для уравнения Навье-Стокса (1), с учетом уравнения неразрывности (2), получается интегральное представление вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, y, z, t) + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z, t) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y, z, t) \right)^2 \right) + \\ + \frac{P(x, y, t)}{\rho} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi(x, y, z, t) = q(z, t) \end{aligned} \quad (4)$$

Что позволяет сформулировать начально-краевые задачи для нахождения функции  $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$  и  $\vec{V}(x, y, z, t) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z, t), \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y, z, t), 0 \right)$ .

Последнее слагаемое в правой части (4) может трактоваться как вклад «вязкой анизотропии» течения с существующим потенциалом для каждого отдельного слоя «идеальной жидкости». Проблема состоит в нахождении решения для такого течения.

### 3. «Расщепление течений» для «анизотропно-вязкой» жидкости.

Для «анизотропно-вязкого» течения возможны постановки задач в терминах  $z, t$  ( $x, y$  – являются параметрами):

Задача1 (для  $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ )

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \left\{ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{P(x, y, t)}{\rho} - q(z, t) \right\} \quad (5)$$

С краевыми условиями на граничных слоях (при  $z = 0; h$ ):

$$\varphi(x, y, 0, t) = \Phi_0(x, y, t), \quad (6)$$

$$\varphi(x, y, h, t) = \Phi_h(x, y, t), \quad (7)$$

И с начальными условиями, при  $t = 0$ :

$$\varphi(x, y, z, 0) = \Phi(x, y, z). \quad (8)$$

Задача2 (для  $\vec{V}(x, y, z, t)$ ):

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2} - \nabla_{xy} \left\{ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{P(x, y, t)}{\rho} - q(z, t) \right\} \quad (9)$$

С краевыми условиями на граничных слоях (при  $z = 0; h$ ):

$$(u, v) \Big|_{z=0} = \nabla_{xy} \varphi(x, y, 0, t) = V_0(x, y, t), \quad (10)$$

$$(u, v)|_{z=h} = \nabla_{xy} \varphi(x, y, h, t) = \vec{V}_h(x, y, t), \quad (11)$$

и с начальными условиями, при  $t = 0$ :

$$\vec{V}(x, y, z, 0) = \vec{V}(x, y, z). \quad (12)$$

Решение любой из задач (5)-(8) или (9)-(12) в переменных  $(z, t)$ , определяет  $\varphi$  и  $\vec{V}$  как функции координаты  $z$  (т. е., по толщине слоя, Рис.2,) и времени  $t$ . Эти решения можно получить методом разделения переменных (методом Фурье) при уже заданных значениях функций  $\varphi$  и  $\vec{V}$  (в виде  $\Phi_0, \Phi_h, V_0, \vec{V}_h$ ) на граничных слоях (6),(7) и (10),(11). Зависимости от  $x$  и  $y$  считаются "замороженными".

**4. Завершение построения математической модели,** которая позволит использовать метод дискретных особенностей для численного моделирования на компьютере

Для «анизотропно идеальной», т.е. для послойной моделей течения «идеальной жидкости» необходимая информация о  $\varphi, \vec{V}, \Phi_0, \Phi_h, V_0, \vec{V}_h$  может быть получена из решения задачи о течении «идеальной жидкости» в слое – в плоском канале (Рис. 3), задачи для определения функции  $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ , как функции от переменных  $x, y$ , (при фиксированном параметре  $z$ ):

Задача 3 (для  $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$  и  $\vec{V} = \nabla \varphi$ , при фиксированном параметре  $z$ ):

$$\Delta \varphi = 0, \text{ в } D^+ \quad (13)$$

с краевыми условиями

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{L_d=AB} = W_n \text{ на входе в канал} \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{L_d} = W_n = 0 \text{ на боковых стенках канала } L_d, \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} \right|_{L_v} = \left. \frac{\partial \varphi^-}{\partial n} \right|_{L_v} \text{ на свободной границе } L_v, \quad (16)$$

$$\left[ \varphi \right]_{\vec{r}_v}^+ = \Gamma(\vec{r}_v) = Const|_{\vec{r}_v} \text{ на свободной границе } L_v, \quad (17)$$

с начальными условиями:

$$t = t_0 : L_d(t_0) = L_{od}, L_v(t_0) = L_{ov}, \varphi^+|_{t=t_0} = \varphi_0^+. \quad (18)$$

Краевая задача (13)-(18), с условиями Неймана (14),-(16) и Дирихле (17) на разных ее частях, является (нелинейной) задачей со свободной (подвижной (16), (17)) границей.

Разыскивается ее решение, которое определено в классе функций:

$$|\nabla \varphi^+| < \infty. \quad (19)$$

Решение математической задачи (13)-(19) для эллиптического уравнения в деформирующейся области с частично неизвестными границами и нестационарными, смешанными краевыми условиями, в пространственно-двумерном случае имеет (в качестве математической модели) интегральное представление (в терминах комплексной переменной  $z = x + iy$  и аппарата аналитических функций). Такая математическая модель, при заданных значениях подинтегральных функций  $f(\omega, t)$  и заданных форме, взаиморасположении и законе изменения границ  $L_d(t)$  и  $L_v(t)$  определяет численные значения неизвестных функций  $\varphi$  и  $\bar{V}$ .

Интегральные представления на ограниченном контуре

$$L(t) = L_d(t) + L_v(t):$$

$$\Phi(z, t) = \varphi + i\psi = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} f(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} f(\omega, t) \ln(z - \omega) d\omega + Const \quad (20)$$

$$\bar{V}(z, t) = u + iv = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d(t)} \frac{f(\omega, t)}{z - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t)}{z - \omega} d\omega, \quad (21)$$

рассматриваются в смысле главного значения.

Для определения значений  $f(\omega, t)$  и их изменения на подвижных границах  $L_d(t)$ ,  $L_v(t)$  уравнения (20), (21) требуют ещё, чтобы удовлетворялись интегральные соотношения (22), полученные из краевых условий (14), (15), а также следующее за ними уравнение (23), роль которого аналогична краевым условиям (16), (17):

На  $L_d(t)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \omega_d(t) \in L_d, \quad t \geq t_0: \\ \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f(\omega, t) n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)} d\omega \right\} = W_n - \operatorname{Re} \left\{ \bar{V}_\infty n(\omega_d) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t) n(\omega_d)}{(\omega_d - \omega)} d\omega \right\}, \quad (22) \\ \int_{L_{d_j}} f(\omega_d, t) d\omega_d = - \int_{L_{v_j}(t)} f(\omega_v, t) d\omega_v + C_j, \quad j = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

На  $L_v(t)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \omega_v(t) \in L_v(t), \quad t > t_0 : \\ \frac{d\bar{\omega}_v(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f(\omega, t) d\omega}{(\omega_v - \omega)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(\omega, t) d\omega}{(\omega_v - \omega)}, \\ \omega_v = \omega_d \Rightarrow f(\omega_v, t) = f(\omega_d, t), \\ t = t_0 : \\ L_v(t_0) = L_{v0} \end{array} \right. \quad (23)$$

Задача (22),(23) может быть решена численно (например, МДО- методом дискретных особенностей [3,4]), для чего производится разбиение кусочно-

гладкой границы на совокупность граничных элементов  $L = \sum_{j=1}^M L_j$ , где

$\omega_{0j} \in L_j$ , так, что справедливы тождества

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \ln(z - \omega_{0j}) \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \int_{L_j} f(\omega) \ln\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right) d\omega, \quad (25)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{z - \omega} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})} \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})} \int_{L_j} f(\omega) \left( \left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right)^{-1} - 1 \right) d\omega, \quad (26)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega)}{(z - \omega)^n} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) \left( \left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right)^{-n} - 1 \right) d\omega \quad (27)$$

В силу того, что для точки  $z$ , вне покрытия границы  $L = \sum_{j=1}^M L_j$  системой

окружностей (каждая из которых покрывает свой граничный элемент  $L_j$ ), по

отношению ко всем элементам  $L_j$ , справедливо  $\left| \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}} \right| \leq \frac{\Delta}{\rho_0} = \varepsilon < 1$ , то для

последних слагаемых правых частей (25)-(27) справедливы оценки:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \int_{L_j} f(\omega) \ln\left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left( \ln^2\left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right) + \left(\frac{\Delta}{\rho_0}\right)^2 \right)^{1/2} \quad (28)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})} \int_{L_j} f(\omega) \left( \left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right)^{-1} - 1 \right) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi\rho_0} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left( \left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right)^{-1} - 1 \right) \quad (29)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \frac{1}{(z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) \left( \left(1 - \frac{\omega - \omega_{0j}}{z - \omega_{0j}}\right)^{-n} - 1 \right) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi\rho_0^n} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left( \left(1 - \frac{\Delta}{\rho_0}\right)^{-n} - 1 \right) \quad (30)$$

В силу чего справедливо

Утверждение[6]:

Пусть аналитическая по  $z$  функция допускает одно из интегральных представлений вида (25)-(27), где функция  $f$  определена и непрерывна на конечной жордановой кривой  $L$ , тогда для  $\forall z: \min_{\omega \in L} |z - \omega| = \rho_{\min} > \rho_0 > 0$ ,

$\exists M$  (число),  $\exists E, E_0$  (согласованное разбиение кривой  $L$ ), что справедливы оценки:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L f(\omega) \ln(z - \omega) d\omega - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^M \ln(z - \omega_{0j}) \int_{L_j} f(\omega) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left( \ln^2 \left( 1 - \frac{\Delta}{\rho_0} \right) + \left( \frac{\Delta}{\rho_0} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (31)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega) d\omega}{z - \omega} - \sum_{j=1}^M \frac{1}{2\pi i (z - \omega_{0j})} \int_{L_j} f(\omega) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi \rho_0} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left( \left( 1 - \frac{\Delta}{\rho_0} \right)^{-1} - 1 \right) \quad (32)$$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\omega) d\omega}{(z - \omega)^n} - \sum_{j=1}^M \frac{1}{2\pi i (z - \omega_{0j})^n} \int_{L_j} f(\omega) d\omega \right| \leq \frac{M\Delta}{2\pi \rho_0^n} \max_{\omega \in L} |f(\omega)| \left( \left( 1 - \frac{\Delta}{\rho_0} \right)^{-n} - 1 \right) \quad (33)$$

При выполнении условий (31)-(33) допускается замена интегральных представлений (20)-(21) квадратурными, что является в плоском случае основой для МДО-метода дискретных особенностей [1,3,4,6-8]:

$$\Phi(z, t) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j(t)}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - \omega_{0j}) + \sum_p \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^p}{2\pi i} \operatorname{Ln}(z - \omega_{0i}^p) + O(\varepsilon), \quad (34)$$

$$\bar{V}(z, t) = \sum_{j=1}^M \frac{\Gamma_j}{2\pi i (z - \omega_{0j})} + \sum_p \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i^p}{2\pi i (z - \omega_{0i}^p(t))} + O\left(\frac{\varepsilon}{\rho_0}\right) \quad (35)$$

### 5. Результаты моделирования

Ниже представлены результаты численного моделирования, лабораторного эксперимента и спутниковые фото Керченского пролива (Рис.4-Рис.7).



Рис.4.

Математическое моделирование  
мгновенного поля скоростей

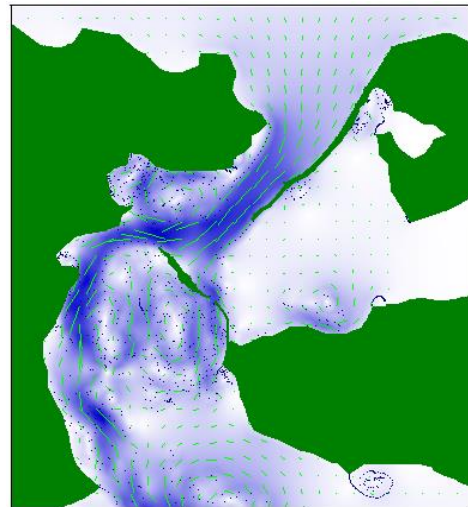


Рис.5.

Математическое моделирование  
распространения загрязнений в  
Керченском проливе.

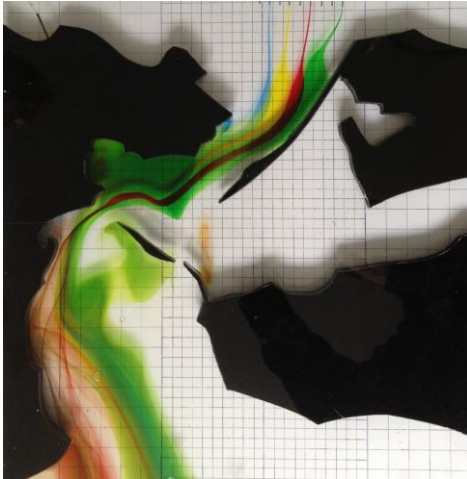


Рис.6.  
Лабораторний експеримент.  
Візуалізація течія в Керченському  
проливі



Рис.7.  
Фото со спутника. Розповсюдження  
забруднень в Керченському  
проливі (11-12.  
2007)

### 6.3. Заключение

Приведенные результаты моделирования (Рис.4, Рис 5), в целом, отображают достаточно хорошее соответствие по доминирующим течениям и проявлениям циркуляции потоков с результатами экспериментов (Рис.6, Рис 7).

Хорошее соответствие следует понимать в смысле визуально контролируемых течений в слое, либо визуально контролируемых осредненных по глубине (по толщине слоя, расходных) характеристик течений.

Данные результаты хорошо согласуются с положениями Н.С. Хе-Шоу [8] (правда, сделанном для медленных и стационарных течений) о том, что для осредненного по толщине слоя течения справедливо предположение о «потенциальном» решении.

Результаты моделирования демонстрируют, что для нестационарного слоистого течения в трехмерной области между двумя плоскими параллельными границами (для задачи о слоистом течении в плоском криволинейном канале) в переменных  $z, \xi, t$  (где для  $\Phi(z, \xi, t)$  комплексная  $\xi = x + iy$ , а  $z$  является параметром толщины слоя) может быть использована математическая модель, которая имеет как интегральное представление

$$\Phi(z, \xi, t) = \varphi + i\psi = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} f(z, \omega, t) \ln(\xi - \omega) d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} f(z, \omega, t) \ln(\xi - \omega) d\omega, \quad (36)$$

$$\bar{V}(z, \xi, t) = \frac{\partial \Phi(z, \xi, t)}{\partial \xi} = u - iv = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_d} \frac{f(z, \omega, t)}{\xi - \omega} d\omega + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_v(t)} \frac{f(z, \omega, t)}{\xi - \omega} d\omega, \quad (37)$$

так и квадратурное (на основе метода дискретных особенностей [3,4]):

$$\Phi(z, \xi, t) = \varphi + i\psi = \sum_{j_d=1}^{M_d} \frac{\Gamma_{j_d}(z, t)}{2\pi i} \ln(\xi - \omega_{j_d}) + \sum_{j_v=1}^{N_v(t)} \frac{\Gamma_{j_v}(z)}{2\pi i} \ln(\xi - \omega_{j_v}(t)), \quad (38)$$



$$\bar{V}(\xi, t) = u - iv = \sum_{j_d=1}^{M_d} \frac{\Gamma_{j_d}(z, t)}{2\pi i(\xi - \omega_{j_d})} + \sum_{j_v=1}^{N_v(t)} \frac{\Gamma(z)_{j_v}}{2\pi i(\xi - \omega_{j_v}(t))}, \quad (39)$$

где

$$\Gamma_{j_d}(z, t) = \int_{L_{j_d}} f(\omega, t) d\omega, \quad \Gamma_{j_v}(z) = \int_{L_{j_v}(t)} f(\omega, t) d\omega \quad j_d = \overline{1, M_d} \quad j_v = \overline{1, N_v(t)}. \quad (40)$$

Причем, по переменным  $z, t$  представления (36)-(40) должны удовлетворять решениям задач 1 и 2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский С.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. /Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М - М.: «Наука», 1988, 232с.
2. Ламб Г. Гидродинамика. - М.,Л.:ОГИЗ ГИТТЛ, 1947.-928 с.
3. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.- Харьков; Харьковский національний університет ім. В.Р.Каразіна, 2000, 90с.
4. Довгий С.О. Метод сингулярних інтегральних рівнянь./Довгий С.О., Ліфанов І.К. - Теорія та застосування. –Київ, “Наукова думка,” 2004р., -510с.
5. Иванов В.А., Фомин В.В. Математическое моделирование динамических процессов в зоне море-суша./НАН Украины, Морской гидрофизический институт.-Севастополь,- НВЦ «ЕКОСИ-Гідрофізика»-2008., 363С.
6. Черний Д.И. Аппроксимация решения начально-краевой задачи с подвижными границами //Обчислювальна та прикладна математика. - Київ: Київський університет. – 1997. – Вип. 2(82). – С.112-123. (Cherniy D.I. Approximation of Solution of Initial-Boundary Problem with Moving Boundary.//Journal of Computational and Applied Mathematics, №2(82), 1997, pp.112-123.)
7. Cherniy D., Dovgiy S., Meleshko V. The Vortex Model of a Viscid Wall's Layer // IUTAM Symposium on "Vortex Dynamics: Formations, Structure and Function", Abstract Book, March 10(Sun)-14(Thu), 2013, Centennial Hall, Kyushu University School of Medicine, Fukuoka, Japan, p.p. 126-127.
8. Hele-Shaw H.S. Investigation of the nature of surface resistance of water and of stream motion under certain experimental conditions. // Trans.Inst. Nav. Arch. XI, 25(1898).