УДК 519.6, 51-76

Влияние памяти на эволюцию популяций

В. М. Куклин, А. В. Приймак, В. В. Яновский
*Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61000, Харьков, Украина
Институт монокристаллов, Национальная
Академия Наук Украины, пр. Науки, 60, 61001 Харьков, Украина*

В рамках обобщенной «дилеммы заключенных» рассмотрена эволюция популяции с полным набором стратегий поведения, ограниченных только глубиной памяти. Каждое последующее поколение популяции последовательно утрачивает наиболее невыгодные стратегии поведения предыдущего поколения. Показано, что увеличение памяти в популяции эволюционно выгодно. Победители эволюционного отбора неизменно относятся к агентам с максимальной памятью. Вводится понятие сложности стратегии. Показано, что стратегии, побеждающие в естественном отборе, имеют максимальную или близкую к максимуму сложность.

Ключевые слова: *дилемма заключенного, эволюция, популяция, стратегии, сложность, кооперация.*

В рамках узагальненої «дилеми ув'язнених» розглянута еволюція популяції з повним набором стратегій поведінки, обмежених тільки глибиною пам'яті. Кожне наступне покоління популяції послідовно втрачає найбільш невигідні стратегії поведінки попереднього покоління. Показано, що збільшення пам'яті в популяції еволюційно вигідно. Переможці еволюційного відбору незмінно виявляються агентами з максимальною пам'яттю. Вводиться поняття складності стратегії. Показано, що стратегії, які перемагають в природному відборі, мають максимальну або близьку до максимуму складність.

Ключові слова: *дилема ув'язнених, еволюція, популяція, стратегія, складність, кооперація.*

The evolution of the population that possesses the full range of behavioral strategies and is limited only by the depth of memory has been considered within the framework of the generalized "Prisoners' Dilemma". Each successive generation in this population consistently loses the most disadvantageous behavior strategies pertained to the previous generation. Increase of memory depth is shown to be evolutionarily advantageous for the population. The winners in evolutionary selection always have the maximum memory. The concept of the strategy complexity has been introduced. It is shown that the strategies, which win in natural selection, have the maximum or almost maximum complexity.

Key words: *prisoner's dilemma, evolution, population, strategy, complexity, cooperation.*

1. Введение

Понимание природы возникновения кооперативного поведения в разных системах интересует исследователей уже на протяжении нескольких десятилетий. Эволюционная теория игр [1]-[3] обеспечивает гибкие основания и эффективные методы для изучения появления сотрудничества. Среди многих игровых моделей, которые используются для объяснения кооперативного поведения, особое место занимают игры, которые можно рассматривать как обобщение дилеммы заключенных [4], [5]. Выбор матрицы выплат (выигрышей) в этом случае определяется простым практическим соображением. Кооперация всегда требует дополнительных затрат ресурсов по сравнению с отказом от кооперации. Склонность к экономиии ресурсов или усилий проявляется в матрице выплат. Полагается, что при каждом отдельном взаимодействии индивидуальный выигрыш при отказе от кооперации превышает выигрыш при согласии на кооперацию. На каждом этапе процесса эволюции (или поколении) популяция отказывается от применения наименее успешных стратегий предыдущего поколения.

Эти игры служат в качестве парадигмы, которая привела к открытию механизма кооперативного поведения, как в теории, так и экспериментальных наблюдениях. Начиная с работы Новак и Мей [7], эволюционные игры были широко изучены в структурированных популяциях, в том числе на регулярных решетках [8]-[13] и сложных сетях [14]-[23]. Используя такой подход, можно выяснить появление множества разнообразных свойств у эволюционирующих популяций. Под эволюционными популяциями, следуя Дарвину, будем понимать множество объектов, которые подчиняются следующим принципам. Это 1) принцип наследственности, 2) принцип изменчивости и 3) естественного отбора.

В этой работе мы проанализируем влияние памяти на процесс эволюции. Если действие объекта зависит не только от наблюдаемой ситуации, а и от предшествующих событий, то будем считать, что объект обладает памятью. В этом смысле большинство биологических объектов обладают памятью. Основной вопрос, который мы будем обсуждать в работе, это насколько выгодно для популяции увеличивать память в процессе эволюции и к каким следствиям это приводит. Естественно, глубина памяти объектов популяции и определяет число всех возможных стратегий, доступных популяции. Важным элементом работы является конкуренция в исходной популяции всех возможных стратегий с ограниченной сверху памятью.

Второй вопрос, который затрагивается в работе, связан с обсуждением свойств конкурирующих стратегий, приводящих к изменению доминирующих стратегий популяции в процессе эволюции. В качестве характеристики стратегий вводится и используется их сложность. Основной вопрос сводится: является ли сложность стратегий эволюционно выгодной? На интуитивном уровне ответы на эти вопросы кажутся очевидными. При моделировании взаимодействия стратегий использовалось одночастичное приближение, при котором все агенты популяции, исповедующие одну из возможных стратегий, объединялись в единый кластер. Взаимодействие осуществлялось между кластерами или стратегиями. Другими словами, взаимодействуют именно стратегии. При этом каждая стратегия взаимодействует с каждой, включая себя. Рассмотрено 3 типа популяций. Популяции без памяти (0), популяции с глубиной памяти 0 и 1, а также 0; 1 и 2.

В каждом случае в начальной популяции присутствуют все стратегии с памятью, не превышающей указанную. Так, например, при глубине памяти 2 присутствуют все стратегии с памятью 2, 1 и 0. В результате численного моделирования показано, что увеличение памяти в популяции эволюционно выгодно. Победители эволюционного отбора неизменно относятся к агентам с максимальной памятью. Стратегии, побеждающие в естественном отборе, имеют максимальную или близкую к максимуму сложность. Попутно обнаружено, что в таких популяциях победившие стратегии относились к «добропорядочным» стратегиям, склонным к кооперации, то есть такие, в которых акты кооперации превалируют над отказами сотрудничать. В определенном смысле можно сказать, что кооперативное поведение в таких случаях устанавливается самопроизвольно. Можно ожидать, что в этом и состоит универсальная тенденция. В популяциях с конечной ограниченной сверху памятью конкуренция всех возможных стратегий в начальной популяции приводит к доминированию в ходе эволюции «добропорядочных» стратегий. Дальнейшее увеличение глубины памяти приводит к новой проблеме, когда число агентов популяции окажется меньше числа возможных стратегий. Последствия этого также обсуждаются в заключении этой работы.

2. Описание стратегий с памятью

Рассмотрим все стратегии, которые используют память. Введем пространство таких стратегий. Стратегия это правило, по которому определяется ход по известным значениям ходов противника. Для их классификации используем глубину памяти. Под глубиной памяти будем понимать число предыдущих ходов, которые использует стратегия для выполнения хода. Начнем с простейших стратегий, которые не используют память. Это означает, что такие стратегии осуществляют ход, основываясь только на наблюдаемом ходе противника. В этом случае возможный наблюдаемый ход это 0 или 1 ($0 =$ отказ, $1 =$ кооперация). Соответственно, для описания отдельной стратегии нам нужно описать определенное правило ответа на эти хода. Начнем со способа записи некоторой стратегии при глубине памяти 0. Ясно, что такую стратегию можно задать следующей таблицей

Возможный ход противника	0	1
	$\Downarrow$	$\Downarrow$
Ответ стратегии	0	0

Легко понять, что если договориться о порядке записи возможных значений ходов противника, например, в лексикографическом порядке (как в таблице в верхней строке), то для описания правил действия стратегии достаточно знать нижнюю строку или последовательность нулей и единиц. В приведенном выше примере это последовательность «00». Так как каждой стратегии соответствует определенная последовательность, то ее можно использовать и в качестве имени соответствующей стратегии. В этом случае имя и определяет правило действия стратегии. Таким образом, стратегии с нулевой глубиной памяти определяются 0,1-последовательностями из двух элементов. Тогда имя каждой стратегии с нулевой глубиной памяти определяется двоичным числом с двумя знаками.

Ясно, что имена всех стратегий при отсутствии памяти это числа от 00 до 11, откуда очевидно, что таких стратегий 4 (00, 01, 10, 11). В качестве примера приведем стратегию с именем 10, которая действует по следующим правилам

Возможный ход противника	0	1
	$\Downarrow$	$\Downarrow$

Ответ стратегии	1	0

Среди стратегий с нулевой глубиной памяти две тривиальные. Это крайне агрессивная стратегия 00 и бездумно соглашательская 11. Остается только обсудить выбор первого хода, который осуществляется не по указанным выше правилам. Его выбор происходит из двух вариантов. Первый ход может быть 1 или 0. Поэтому удобно включить первый ход в описание стратегии. Для этого укажем его в скобках перед именем стратегии. Например, имя [1]10 и [0]10 означает, что первый ход соответственно 1 и 0, и дальнейшие действия осуществляются согласно стратегии 10. Удобно рассматривать каждую стратегию с указанием первого хода как отдельную стратегию. Тогда при отсутствии памяти число всех стратегий равно 8.

Рассмотрим теперь все стратегии с памятью об одном предыдущем ходе. Такие стратегии для определения хода должны учитывать два хода противника. Предыдущий и наблюдаемый. Снова расположим все возможные пары ходов противника в лексикографическом порядке:

Возможный ход противника	00	01	10	11
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
Ответ стратегии	.	.	.	.

Для описания стратегии каждой паре ходов противника нужно сопоставить 0 или 1. Другими словами, заменить точки в таблице на символы 0 или 1. Снова при фиксированном порядке записи возможных ходов противника каждая стратегия определяется теперь 0,1-последовательностью, но теперь из 4 элементов. Имя стратегии удобно выбрать совпадающим с правилом ее действия. Таким образом, имена стратегий с глубиной памяти 1 совпадают с двоичным числом с 4 знаками, или с 0,1-последовательностью с 4 элементами.

Тривиальная агрессивная стратегия называется 0000. Всего таких стратегий снова столько, сколько чисел от 0000 до 1111. Другими словами их 16. Абсолютно аналогично можно определить стратегии с глубиной памяти k. Такие стратегии будут определяться двоичным числом с 2^{k+1} знаками. Таким образом, пространство стратегий с глубиной памяти k составляют 0,1-последовательности 2^{k+1} элементов.

Однако приведенное выше описание стратегий с глубиной памяти $k \geq 1$ не является полным. Причина в том, что после первого хода противника мы знаем только одно наблюдаемое значение и отсутствует значение предыдущего хода. Поэтому нет данных для применения указанных правил стратегии. Таким образом, мы должны указать правило, как делать ход при неполноте данных. Для этого естественно использовать одну из стратегии с памятью 0. Другими словами, следует указать стратегию, не использующую память, которую будем применять, прежде чем появится информация о предыдущем ходе противника. Тогда полное число стратегий естественно увеличивается и меняется имя стратегии. В имени мы должны указать сначала стратегию определения первого хода при отсутствии данных о предыдущем ходе (т.е. имя стратегии с памятью 0) а затем имя стратегии с памятью 1. Таким образом, название (и правила) стратегии с памятью об одном предыдущем ходе противника выглядит, например, как [01]01110. Первые две цифры в скобках это имя (и правила) стратегии с памятью 0, а четыре последующие - правила ходов игрока с памятью об одном ходе противника. Для удобства стратегии с меньшей памятью будем приписывать слева и заключать в квадратные скобки. Рассматривая каждое такое правило как отдельную стратегию, можно легко вычислить число таких стратегий. Следовательно, общее число стратегий с памятью об одном предыдущем ходе противника равно $2^2 \times 2^4$. Кроме этого каждая стратегия может начинать игру с некоторого первого хода. Другими словами, она может начать с 0 или с 1. Удобно рассматривать стратегии, совершающие разные первые хода 0 или 1 как разные стратегии. Тогда число стратегий увеличится вдвое $2 \times 2^2 \times 2^4 = 128$. Имя таких стратегий будет выглядеть, например, как [0][01]0111, эта стратегия начнет игру с хода 0. В частности, известная стратегия «око за око» в этих обозначениях соответствует стратегии [1][01]0011. Следует отметить, что при знании глубины памяти, в данном случае равной $k = 1$, можно даже не использовать скобки. Даже при их отсутствии по известной записи стратегии однозначно устанавливается правило действия стратегий.

Абсолютно аналогично перечисляются все стратегии с памятью о двух ходах противника, или в общем случае с памятью о k ходах противника. Важно подчеркнуть, что число стратегий $N_k = 2 \times 2^2 \times 2^3 \cdots 2^{2^{k+1}} = 2^{(2^{k+2}-1)}$ растет сверх экспоненциально с увеличением глубины памяти k.

Вернемся к рассмотрению стратегий с глубиной памяти 1. Обратим внимание, что среди этих стратегий присутствуют стратегии с нулевой глубиной памяти. Действительно, если стратегия действует одинаково при различных предыдущих ходах противника, то она фактически не использует информацию о предыдущем ходе или теряет память о предыдущем ходе. Соответственно, такие стратегии совпадают со стратегиями с нулевой глубиной памяти. Правила действий стратегий эквивалентных стратегиям с нулевой памятью определятся следующей таблицей

Возможный ход противника	00	01	10	11
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
Ответ стратегии	x_1	x_2	x_1	x_2

Где x_1 и x_2 принимают значения $\{0,1\}$. Легко заметить из таблицы, что такие стратегии действуют независимо от предыдущего хода противника. Это означает, что стратегии $x_1x_2x_1x_2$ эквивалентны стратегиям с нулевой памятью x_1x_2. Таким образом, среди стратегий с именами четырехзначных двоичных чисел присутствуют стратегии эквивалентные всем стратегиям с отсутствием памяти. Так стратегии $0000 \sim 00$, $0101 \sim 01$, $1010 \sim 10$ и $1111 \sim 11$. Следовательно, при записи имен стратегий четырехзначными двоичными числами среди них присутствуют все стратегии с глубиной памяти меньше или равной 1. Легко понять, что это удобное свойство сохранится и при описании стратегий с большей глубиной памяти. Так имена стратегии с глубиной памяти k содержат все стратегии эквивалентные стратегиям с глубиной памяти $k-1$, ... 0. Это свойство следует учитывать при проведении игр между стратегиями. Таким образом, мы определили и перечислили все стратегии с определенной конечной глубиной памяти. Поэтому далее, если говорится о стратегиях с глубиной памяти k, то будем помнить, что в них включены все стратегии с меньшей глубиной памяти. Среди этих стратегий присутствуют как примитивные, так и сложные стратегии. Теперь обсудим более детально понятие сложности стратегий.

3. Сложность стратегий

В предыдущем разделе было показано, что стратегии описываются 0,1-последовательностями определенной длины или содержащими определенное число членов. Так для глубины памяти 0 таких последовательностей 4, а для глубины памяти k их $N_k = 2^{2^{k+1}}$, длина имен таких стратегий равна 2^{k+1}. Разумеется, среди этих стратегий присутствуют стратегии эквивалентные всем стратегиям с меньшей глубиной памяти. Число таких стратегий также определяется их глубиной памяти. Для последующих целей обсудим такое свойство 0,1-последовательностей как сложность. Это исключительно глубокое понятие, которое находит важные применения в физике и математике. В частности, понятие хаотичности тесно связано с понятием сложности (см. например [24]). В современной литературе существует множество различных определений сложности [25]. Однако большинство из них основаны на трех общих идеях: 1) как сложно объект описать, 2) как сложно его создать и 3) как сложно он организован.

В работе используем подход к описанию сложности конечных 0,1-последовательностей, который основан на сравнительной сложности функций, в частности многочленов. В основе лежит понимание, что многочлены более высокой степени сложнее, чем более низкой степени.

Для более последовательной формулировки сложности используем, следуя [26], теорию монад. Под монадой будем понимать конечное множество M и отображение A этого конечного множества в себя. Другими словами, каждой точке этого конечного множества сопоставляется другая его точка. Монадам сопоставляется граф, вершины которого конечное множество M, а ориентированные ребра связывают вершины в соответствии с их отображением A. Из каждой вершины x в этом графе выходит ровно одно ребро, и оно ведет в вершину Ax.

В нашем случае точками являются стратегии или 0,1-последовательности конечной длины $n = 2^{k+1}$. Тогда множество M таких последовательностей, можно представлять как множество вершин единичного n-мерного куба. Так, например, стратегии с нулевой памятью являются вершинами единичного квадрата.

0,1-последовательности $x = x_1 x_2 \dots x_n$ можно рассматривать и как функцию, которая сопоставляет целочисленному значению i значение $x_i \in \{0,1\}$. Как правило, при записи последовательности мы не будем использовать в качестве разделителя запятую. При выбранном бинарном алфавите это не приводит к недоразумениям. Введение сложности функций восходит еще к идеям Ньютона. Для этого он предложил использовать разности функций. В нашем случае определим такое отображение разностным оператором $A: M \to M$

$$y = Ax,$$

где элементы последовательности $y = y_1 y_2 \dots y_n$ определяются разностями

$$y_i = x_{i+1} - x_i.$$

Здесь $i = 1, 2, \dots, n$ номер элемента в последовательности. При вычислении элементов последовательности y будем использовать условие цикличности последовательности x, считая $x_{n+1} = x_1$. Другими словами, можно говорить о периодических последовательностях периода n. Таким образом, приходим к монаде стратегий. Стратегия x отображается в стратегию y. Рассмотрим графы стратегий, начиная с малой глубины памяти. Главное свойство этих графов состоит в том, что из каждой вершины выходит только оно ребро. Для последовательностей длины n граф содержит 2^n вершин. Начнем с нулевой глубины памяти $k = 0$. Такие стратегии совпадают с последовательностями двух элементов $n = 2^{0+1}$. Граф стратегий, соответствующий этому случаю, приведен на Рис.1. Здесь в целях компактности вершины показаны окружностями, внутри которых закодированы в десятичной системе исчисления имена стратегий. Так последовательность 00 обозначена как 0, вершина 01 как 1, вершина 10 как 2 и, наконец, 11 как 3.

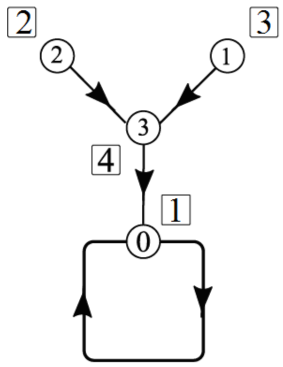

Рис.1. Граф стратегий с нулевой памятью (в кружках закодированы имена стратегий, в квадратах - их места при соревновании в первом поколении).

Характерной особенностью этого графа является наличие цикла единичной длины. Длина цикла равна числу вершин, входящих в цикл. Обозначение для этого графа $O_1 * T_4$ используем в соответствии с [26]. Где O_1 означает цикл единичной длины, а T_4 - бинарное дерево с 4 вершинами. Можно доказать, что граф стратегий будет обладать только одним циклом O_1.

Вернемся теперь к наблюдению Ньютона, которое состояло в том, что если функция константа, то первые разности будут нули. Если первые разности будут константой, то функция будет многочленом первой степени. А если вторые разности константа, то не больше второй... Это наблюдение позволяет сформулировать сложность, как удаленность вершин графа от корня дерева или цикла [26]. Чем более удалена вершина от корня дерева, тем сложнее стратегия. Таким определением сложности мы будем пользоваться в этой работе.

В соответствии с этим среди стратегий с нулевой памятью самая простая стратегия это самая агрессивная стратегия 00 (см. Рис.1). Эта стратегия соответствует постоянной функции аргумента i, принимающей нулевое значение. Более сложная стратегия 11 - бездумно соглашательская стратегия. Эта стратегия совпадает с постоянной функцией аргумента i, принимающей значение 1. «Дифференцирование» A этой функции переводит ее в функцию, принимающую 0 значение. Стратегии 01 и 10 определяют линейные функции. Действительно, стратегия 01 соответствует линейной функции $x(t) = (t+1) \mod 2$, а стратегия 10 линейной функции $x(t) = t \mod 2$. Легко проверить, например, что значения функции $x(t) = t+1 \mod 2$ при целых t дает периодическую последовательность с периодом 2 и $x_1 = x(1) = 0$, $x_2 = x(2) = 1$. Аналогично легко проверить, что последовательность 10 соответствует значениям $x(t) = t \mod 2$ в целых точках $x_1 = x(1) = 1$, $x_2 = x(2) = 0$. Это совпадает с интуитивно понятным выводом, что постоянные функции проще линейных. Линейные функции - частный случай многочленов степени меньше p. Как было доказано еще Ньютоном, если функция удовлетворяет $A^p x = 0$, то x многочлен степени меньше p. Это свойство будем использовать, ниже для определения многочленов, соответствующих более сложным стратегиям.

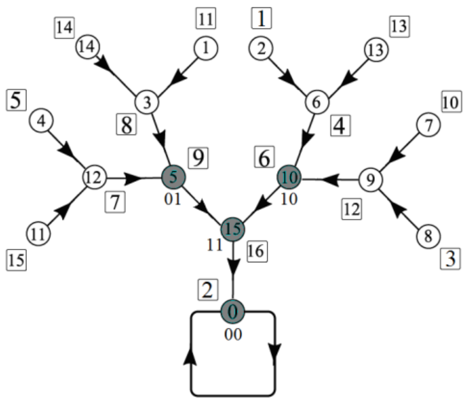

Рис.2. Граф стратегий с глубиной памяти 1 и 0 (в кружках закодированы имена стратегий, в квадратах - их места при соревновании в первом поколении).

Перейдем теперь к монаде стратегий с глубиной памяти 1. Ее граф приведен на Рис.2. Вершины графа имеют имена от 0000 до 1111. Легко заметить, что структура графа соответствует $O_1 * T_{16}$. Обсудим расположение на этом графе стратегий, эквивалентных стратегиям с нулевой глубиной памяти. Эти стратегии на Рис.2 показаны вершинами, закрашенными серым цветом. Рядом с ними серым цветом напечатаны имена эквивалентных им стратегий с нулевой памятью. Таким образом, эти стратегии являются самыми простыми в этой монаде. Это в точности совпадает с тем, что сложность стратегий как функций i возрастает по мере удаления от корня графа. Остальные стратегии удалены от корня дальше и, соответственно, более сложные. Можно убедиться, что следующий уровень графа соответствует многочленам степени 2, а верхний многочленам степени 3. Действительно, действуя на вершину 5-го уровня $x^{(5)}$ оператором A по определению, перейдем в вершину 4-го уровня $Ax^{(5)} = x^{(4)}$. Это очевидное следствие устройства дерева. Аналогично вершина $x^{(4)}$ под действием A спустится на уровень ниже $Ax^{(4)} = x^{(3)}$. Снова повторяя действие, перейдем на уровень ниже $Ax^{(3)} = x^{(2)}$ и, наконец, получим $Ax^{(2)} = x^{(1)} = 0$. Объединяя эти равенства, получим $A^4 x^{(5)} = 0$. Можно сказать, что 0 является аттрактором движений на графе, индуцированных отображением A. Тогда в соответствии с доказательством Ньютона вершина пятого уровня $x^{(5)}$ совпадает с многочленом степени меньше 4.

Теперь обсудим граф монады, соответствующий стратегиям с глубиной памяти k. В этом случае длина 0,1-последовательности, определяющей стратегии равна $n = 2^{k+1}$. Общее число таких стратегий $N_k = 2^{2^{k+1}}$. Можно доказать, что при $n = 2^{k+1}$ структура графа стратегий совпадает с $O_1 * T_{2^{2^{k+1}}}$. Естественно, у корня по-прежнему располагаются стратегии, эквивалентные стратегиям с нулевой глубиной памяти. Выше располагаются стратегии с глубиной памяти 1, и так до уровня, соответствующего последнему уровню графа стратегий с глубиной $k-1$, т.е. $O_1 * T_{2^{2^k}}$. Таким образом, число стратегий, использующих глубину памяти k, равно $2^{2^{k+1}} - 2^{2^k} = 2^{2^k}(2^{2^k} - 1)$. По мере удаления от корня стратегии становятся все более сложными и соответствуют многочленам все более высокой степени. В качестве примера на Рис.3 приведем граф соответствующий стратегиям длины $n = 2^3 = 8$ ($k = 2$), который совпадает с $O_1 * T_{256}$. Таким образом, сложность стратегий можно определять по значению уровня графа, которому принадлежит вершина, соответствующая этой стратегии.

Важно отметить, что число возможных стратегий с ростом памяти увеличивается сверхэкспоненциально. Это приводит к глубоким вычислительным трудностям при исследовании взаимодействия таких стратегий, которые связаны с недостатком ресурсов. Кроме этого интересно отметить, что количество реализуемых стратегий в конечных системах ограничено скорее количеством участников, а не числом возможных стратегий. Другими словами, в конечных системах в процессе эволюции всегда может появиться и использоваться новая стратегия. Жизнь полна новыми идеями. Этот вывод играет важную роль при численном моделировании взаимодействия конечного числа объектов популяции.

4. Взаимодействие стратегий

Жизнь в популяции и ее эволюция в определенной степени определяется характером взаимодействия стратегий объектов популяции. Наиболее простой случай это парное взаимодействие стратегий. Существует много вариантов осуществления такого взаимодействия. Самый простой вариант - это каждая стратегия взаимодействует с каждой, включая себя. Этот вариант взаимодействия можно осуществить при относительно небольшом числе объектов. Причина этого в конечности времени жизни объекта популяции.

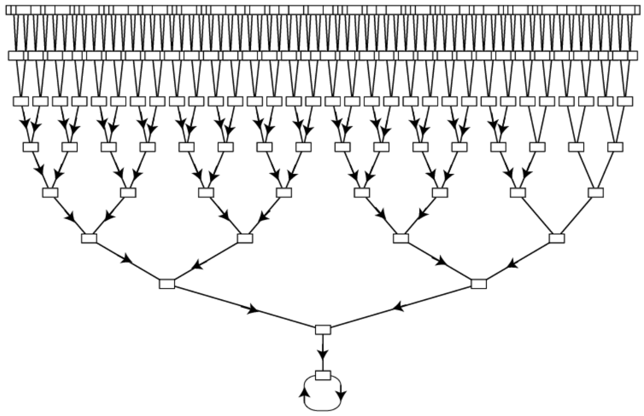

Рис.3. Граф стратегий с глубиной памяти 2.

Действительно, на взаимодействие пары стратегий затрачивается некоторое характерное время Δt и, соответственно, на взаимодействие n стратегий друг с другом будет затрачено время $n^2\Delta t$. При увеличении n время $n^2\Delta t$ может превысить время жизни объекта. Другой способ парного взаимодействия, когда противник выбирается случайным образом среди всего множества стратегий, предполагая их равновероятными. Еще один общий способ, не использующий случайность, можно осуществить, используя сеть взаимодействий. В графе этой сети будут соединены взаимодействующие стратегии. Ее можно обобщить, учитывая взаимодействия удаленных вершин с некоторым весом, включая вероятностный. Можно также учитывать пространственное структурирование популяций [2], [8], [12], в этом случае в пространстве могут возникать геометрические структуры сотрудничества [7]. Еще одно важное обстоятельство, которое влияет на характер взаимодействия стратегий, уже отмечалось ранее. Это конечность множества объектов, составляющих популяцию. В этом случае количество стратегий может значительно превышать количество объектов общества. Тогда взаимодействие может происходить только между частью стратегий. В этой работе будем предполагать, что объект в процессе жизни не меняет стратегию и взаимодействует с каждой стратегией популяции включая себя. Другими словами, можно сказать, что рассматривается одночастичное приближение взаимодействия стратегий - без учета числа носителей стратегии.

Для того чтобы установить результат взаимодействия стратегий, определим матрицу выплат.

Напомним, что дилемма заключенного двух игроков состоит в том, что каждый игрок может выбрать между сотрудничеством (1) или отказом (0). В зависимости от стратегии соперника, выбранный игрок получает a_{11}, если оба сотрудничают; a_{22} - если оба отказываются; a_{12} - если выбранный сотрудничает и противник отказывается; и a_{21} - если выбранный отказывается а противник сотрудничает, где $a_{21} > a_{11} > a_{22} > a_{12}$ и $2a_{11} > a_{21} + a_{12}$. В работе мы используем значения матрицы выплат Аксельрода M_1 [27],

A\B	кооперация	отказ
кооперация	3,3	0,5
отказ	5,0	1,1

Таким образом, результат взаимодействия стратегий будет определяться этой матрицей. Используя взаимодействие между всеми стратегиями с конечной глубиной памяти, установим, прежде всего, получают ли стратегии с большей памятью эволюционное преимущество. Кроме этого интересно изучить, как влияет сложность стратегий на эволюционные преимущества стратегий. Другими словами, есть ли причина усложнения систем.

Ниже смоделируем процесс эволюции стратегий с памятью. Для простоты принцип изменчивости учтем в простом варианте, предполагая, что в популяции реализованы все стратегии с глубиной памяти меньше или равной k. Так как в этом случае учтены все стратегии, то в процессе эволюции не будут появляться другие стратегии. Принцип наследственности будет состоять в передаче выигрышных стратегий потомкам. Принцип естественного отбора реализуем исключением или уничтожением проигрышных стратегий. Естественно, такой упрощенный вариант эволюции можно усложнить многими способами. Некоторые из них обсудим позже.

Естественный отбор реализуем следующим образом. Пусть все стратегии взаимодействуют друг с другом по круговой системе в соответствии с итерированной игрой с дилеммой заключенных. Число взаимодействий двух стратегий в одном поколении выберем одинаковым для всех, равным n. Собственно выбор большого числа взаимодействий между двумя стратегиями призван исключить влияние первого хода. В результате такого соревнования стратегии набирают очки в соответствии с приведенной выше матрицей выплат. После этого проигравшая стратегия, а возможно и несколько стратегий, набравших минимальное число очков, выбывают из следующего поколения. Далее очки эволюционных преимуществ обнуляются, и проводится следующий круг взаимодействий между оставшимися стратегиями, соответствующий формированию стратегий нового поколения.

5. Мир без памяти

Начнем с взаимодействия стратегий с глубиной памяти 0 в рамках одного поколения. Другими словами, стратегии не появляются и не исчезают в этом поколении. Исходно в популяции присутствуют все возможные стратегии, не использующие память. Пусть каждая стратегия взаимодействует с другой стратегией $n=100$ раз в рамках итерированной дилеммы заключенных. Набор очков определяется матрицей выплат, приведенной выше, и суммируется. Каждая стратегия в одной игре отвечает на первый ход выбранного противника, а в другой начинает, делая первый ход в игре с тем же противником. В тех играх, которые она начинает, есть две возможности сделать первый ход - это выбрать 0 или 1. Стратегия, делающая определенный первый ход, рассматривается как отдельная стратегия (см. раздел 2). После проведения игр между всеми такими стратегиями, включая себя, стратегии распределяются по занятым местам в соответствии с набранными очками. Первое место занимает стратегия, набравшая самую большую сумму очков. Далее можно исключить влияние первого хода, усредняя результаты стратегии, отличающиеся только первым ходом. Полученное среднее значение приписывается соответствующей стратегии. По этим средним данным устанавливается число очков, набранных каждой стратегией с глубиной памяти 0. Распределение стратегий по местам показано на Рис.1 в квадратиках возле каждой вершины графа. Согласно данным численного моделирования среди стратегий без памяти в первом поколении побеждает самая простая и агрессивная стратегия 00. Последнее место занимает бездумно сотрудничающая стратегия 11, имеющая большую сложность, чем стратегия 00. Самые сложные стратегии 10 и 01 в этой категории (см. Рис.1) занимают соответственно 2 и 3 места.

Увеличение числа взаимодействий между стратегиями до $n=500$ не влияет на распределение мест (см. Рис.4).

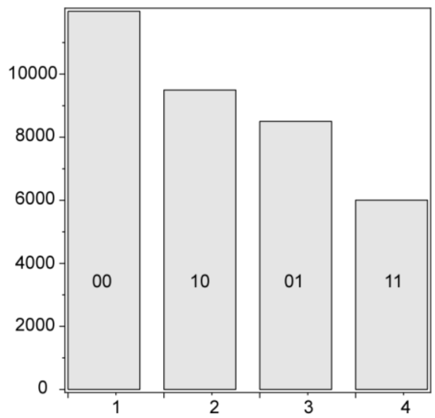

Рис.4. Набор очков в первом поколении для стратегий с нулевой памятью при $n=500$ *(имя стратегии указано в соответствующей колонке гистограммы).*

Таким образом, в мире без памяти в первом поколении самая выгодная стратегия - это самая примитивная и самая агрессивная. Смоделированное взаимодействие стратегий описывает набор очков эволюционных преимуществ в течение одного поколения. Следующее поколение будет определяться естественным отбором, который приводит к «вымиранию» проигравшей стратегии. Выбор проигравшей стратегии можно осуществить по-разному. Можно отбраковывать стратегии с учетом первого хода или отбрасывать стратегии 11 независимо от первого хода. В последнем варианте уменьшается число поколений в процессе эволюции до выхода на доминирующую стратегию популяции. Начнем с отбрасывания проигравших стратегий без учета первых ходов. Тогда во второе поколение после репликации перейдут в силу естественного отбора только 3 стратегии 00, 10 и 01. Другими словами, отбраковуются стратегии [0]11 и [1]11. Теперь аналогичная игра будет проводиться между этими оставшимися стратегиями. Набранные очки предыдущего поколения зануляются. Набор очков эволюционных преимуществ во втором поколении распределяются следующим образом

Стратегия	Очки	Сложность
00	1399.5	0
01	1101.5	2
10	905.5	2

Во втором поколении по-прежнему выгодна самая агрессивная и примитивная стратегия. Естественный отбор отбраковывает проигравшую стратегию 10 и в третье поколение передаст только две стратегии. Снова результат соревнования этих стратегии 3-го поколения определяется набором очков эволюционных преимуществ этими оставшимися стратегиями. Результат соревнований приведен в таблице ниже.

Стратегия	Очки
01	651.5
00	409.5

Замечательным результатом набора очков эволюционных преимуществ в этом поколении является проигрыш самой примитивной и агрессивной стратегии. Это означает, что в четвертое поколение естественный отбор передаст наиболее сложную стратегию 01 (см. Рис.1), которая оказывается и добропорядочной. Эту стратегию можно назвать «око за око» среди стратегий с нулевой глубиной памяти. Таким образом, даже в мире без памяти эволюция приводит к выживанию наиболее сложной и добропорядочной стратегии. В определенном смысле это неожиданное следствие эволюции. Далее стадии, на которых в популяции присутствует самая примитивная и агрессивная стратегия, будем называть агрессивным состоянием популяции. Интересно отметить, что агрессивное состояние популяции, когда побеждала самая агрессивная и примитивная стратегия, заняло 3/4 доли всего времени эволюции до выхода на стационар с одной стратегией.

Обсудим влияние на эволюцию первого хода. Кажется естественным, что его влияние с увеличением числа ходов при соревновании двух стратегий уменьшается. Действительно, суммарный выигрыш S_n при числе ходов n состоит из двух вкладов s_0 - это число очков, получаемых после первого хода, и набора очков уже с использованием стратегии. Пусть стратегия, начиная со второго хода, в среднем за ход набирает $\overline{q}$ очков. Тогда суммарный выигрыш равен $S_n = s_0 + \overline{q}(n-1)$ и при больших $n >> 1$ получаем

$$\frac{S_n}{n} = \frac{s_0 - \overline{q}}{n} + \overline{q} \qquad (1)$$

Учитывая, что s_0 может принимать конечное значение, легко заметить, что вклад первого хода в среднее значение выигрыша за один ход должен быть мал. На Рис.5 показана зависимость от n среднего выигрыша за один ход худшей и лучшей стратегий с глубиной памяти 0. Точками показаны значения, полученные численно. Исходя из этих наблюдений можно считать, что с ростом n влияние первого хода исчезает. Для стратегий с нулевой глубиной памяти уже при $n \sim 100$ этим влиянием можно пренебречь. Следует ожидать, что по аналогичной причине влияние первых ходов будет незначительным и для больших глубин памяти.

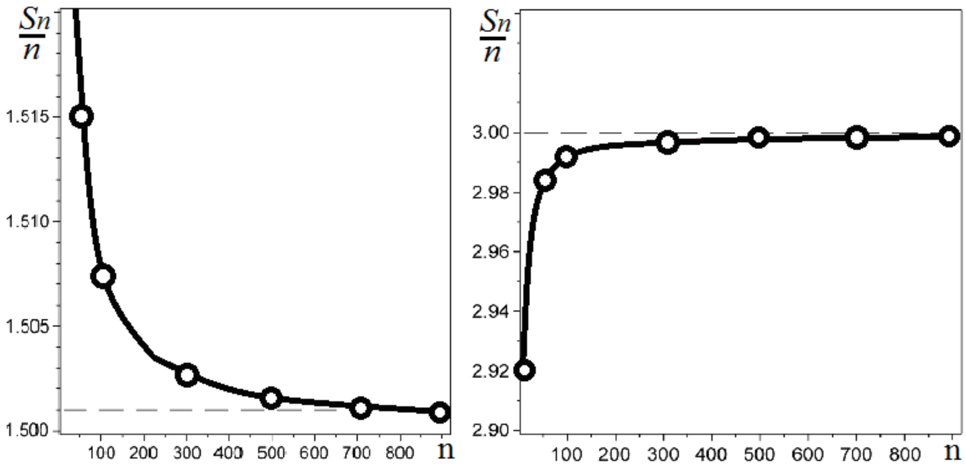

Рис.5. Зависимость от n выигрыша (1) для худшей стратегии 11 с $\overline{q} = 1.500$ и $s_0 - \overline{q} = 0.8$ (слева) и лучшей стратегии 01 с $\overline{q} = 3.00$ и $s_0 - \overline{q} = -0.8$ (справа).

Интересно отметить, что в мире без памяти характер эволюции стратегий не зависит от выбора матрицы выплат и носит универсальный характер. Так сохраняется распределение стратегий по эволюционным очкам в каждом поколении, а соответственно и порядок их выбывания для других матриц выплат. Численное моделирование эволюции, например, с M_2

A\B	кооперация	отказ
кооперация	2,2	0,3
отказ	3,0	1,1

и с матрицей выплат M_3

A\B	кооперация	отказ
кооперация	4,4	0,7
отказ	7,0	1,1

приводят к совпадающим с описанной выше эволюцией. Естественно, при взаимодействии стратегий отличие состоит только величинах набранных очков.

Вернемся теперь к рассмотрению эволюции с отбраковкой стратегий с учетом первых ходов. Другими словами, после набора эволюционных очков отбраковывается одна стратегия с учетом первого хода. Пусть набор очков определяется матрицей выплат M_3. В первом поколении минимальное число очков набирает стратегия [1]11. Именно ее и отбракует естественный отбор. После репликации во втором поколении остается 7 стратегий, и конкуренция начинается между ними. Набор очков в этом поколении указан в таблице

место	стратегия	очки	сложность
1	[0][00]	2500	0
2	[1][00]	2487	0
3	[0][10]	2250	2
4	[1][01]	1950	2
5	[0][01]	1655	2
6	[1][10]	1545	2
7	[0][11]	1213	1

Таким образом, в третьем поколении исчезает стратегия [0][11]. В четвертом поколении исчезает [1][10]. В пятом поколении естественный отбор отбраковывает стратегию [0][10], в шестом самую примитивную и агрессивную стратегию [0][00], в седьмом [1][00] и, наконец, в 8 исчезает [0][01]. Соответственно, в мире без памяти эволюцию выигрывает стратегия «око за око» [1][01]. Сложность, выигравшей стратегии максимальна в этом классе стратегий. Рассматривая ход эволюции при такой реализации естественного отбора, можно заметить, что характер эволюции не изменился. Просто удвоилось число поколений в соответствии с числом стратегий. В остальном все протекает по прежнему сценарию. Следовательно, можно использовать более быструю отбраковку проигравших стратегий без учета различия в первых ходах, по среднему набору очков каждой стратегией. Для стратегий с большой памятью это значительно сокращает требуемые для моделирования ресурсы.

6. Мир с глубиной памяти 1

Перейдем теперь к анализу эволюции стратегий с минимальной глубиной памяти 1. Всего таких стратегий 128. Разумеется, в их число входят и 8 стратегий, эквивалентные стратегиям с глубиной памяти 0 (см. Рис.2). Пусть матрица выплат будет M_1. В первом поколении распределение очков эволюционных преимуществ имеет следующий вид

Табл.1.Распределение стратегий в первом поколении.

место	стратегия	очки	сложность
1	0010	39372.0	4
2	0000	38208.0	0
3	1000	36755.0	4
4	0110	32308.5	3
5	0100	31347.0	4
6	1010	29684.0	2
7	1100	29665.5	3
8	0011	27934.5	3
9	0101	27916.0	2
10	0111	27351.5	4
11	0001	27181.0	4
12	1001	25291.5	3
13	1101	25014.5	4
14	1110	23912.5	4
15	1011	19466.5	4
16	1111	19392.0	1

В крайней правой колонке таблицы приведена сложность соответствующей стратегии (см. раздел 3). Легко заметить, что сложность победившей стратегии в этом поколении максимальна. Проигравшая стратегия имеет малую сложность. На Рис.2 показаны в квадратных рамках места, занимаемые соответствующими стратегиями в первом поколении. Величина сложности совпадает с уровнем дерева, на котором располагается соответствующая стратегия. Стратегии, имеющие сложность меньше или равную 2, совпадают со стратегиями с нулевой глубиной памяти. Легко заметить, что при возникновении памяти самая примитивная и агрессивная стратегия 0000 не является победителем даже в первом поколении. Она занимает 2 место. Однако, как и при отсутствии памяти, последнее место занимает бездумно соглашательская стратегия 1111. Даже такая известная стратегия как «око за око» занимает всего 9 место. Победителем является стратегия максимальной сложности в рассматриваемой категории стратегий. Следует подчеркнуть, что среди отстающих стратегий присутствуют стратегии такой же сложности. Другими словами, сложность стратегии сама по себе еще не гарантирует высокий рейтинг по эволюционным очкам.

Влияние первых ходов на суммарный набор очков с увеличением числа ходов n уменьшается по гиперболическому закону

$$\frac{S_n}{n} = \frac{c}{n} + \overline{q} \qquad (2)$$

где c - постоянная, учитывающая вклад 2 первых ходов. На Рис.6 показано сравнение зависимостей, полученных численно с теоретической зависимостью (2). Легко заметить, что именно первый ход определяет значение c. Приведенный характер зависимости на Рис.6 указывает на влияния малого числа ходов n на занимаемые места стратегий. Так, при сравнении итоговых мест всех 256 стратегий для разного числа ходов $n = 100$ и $n = 200$ места отличаются у более чем половины стратегий. Причина этого эффекта состоит в том, что ряд стратегий набирают близкие значения, и добавление числа ходов приводит к осцилляциям значений в окрестности среднего значения. С увеличением n такая зависимость уменьшается. Например, при $n = 700$ и $n = 900$ занимаемые места отличаются у 22 стратегий.

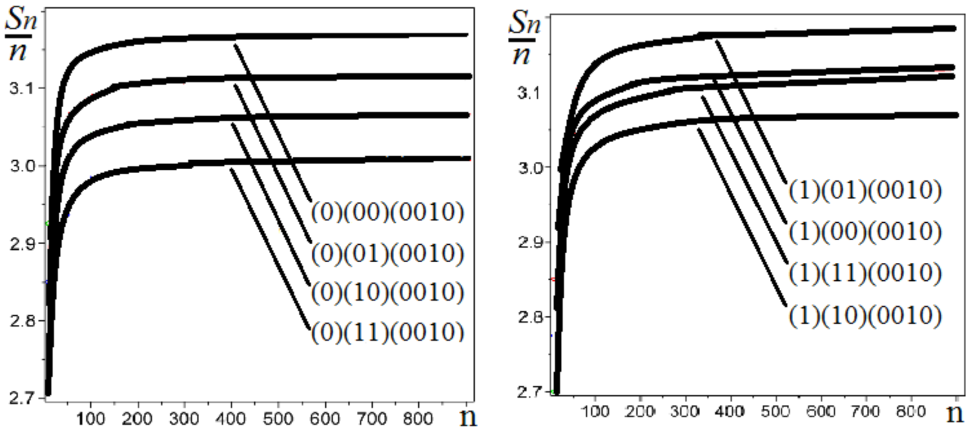

Рис.6. Зависимость от n *выигрыша (2) для стратегии, имеющей* $c = 3$ *(слева) и* $c = 5$ *(справа).*

Далее, как и в предыдущем разделе, эволюция отбраковывает проигравшую стратегию и в новое поколение переходят все стратегии кроме нее. Новое поколение вступает в соревнование за очки эволюционного отбора с нуля. На протяжении шести поколений стратегия 0000 удерживает второе место. Ситуация меняется в седьмом поколении, где 10 оставшихся стратегий располагаются в следующем порядке по набору эволюционных очков.

место	стратегия	очки	сложность
1	0010	18554	4
2	0011	15659.5	3
3	0101	15590	2
4	0110	15013.5	3
5	0111	15001	4
6	0000	14576	0
7	1000	14333.5	4
8	0100	13272	4
9	1010	13038	2
10	0001	12954	4

Из результатов численного моделирования следует, что первое место сохраняется за стратегией максимальной сложности, когда стратегия 0000 скатывается на 6 место среди 10 оставшихся стратегий. Агрессивность в этом поколении снижается. Продолжая эволюционный отбор, получим в 10 поколении

место	стратегия	очки	сложность
1	0011	11215.5	3
2	0101	11174.0	2
3	0010	10809.0	4
4	0111	10735.0	4
5	0110	10639.0	3
6	0100	7755.5	4
7	0000	5892.0	0

Другими словами, в 11 поколении исчезает самая агрессивная и примитивная стратегия 0000. В 15 поколении остаются только 2 стратегии, которые набирают одинаковое число очков эволюционного отбора, и изменение стратегий популяции прекращается. Снова можно сказать, что агрессивная стадия развития популяции с глубиной памяти 1 занимает 11/15 времени эволюции до выхода в стационарное состояние. Интересно заметить, что при появлении памяти стадия агрессивности популяции занимает меньшую часть времени эволюции.

место	стратегия	очки	сложность
1	0011	3600.0	3
2	0110	3600.0	3

Победителями естественного отбора оказались стратегии достаточно сложные, но не имеющие максимальную сложность. Эти стратегии имеют глубину памяти 1. Среди победивших стратегий присутствует стратегия «око за око» [1][01]0011. Стратегия 0011 относится к добропорядочным. Это можно установить, анализируя ее реакцию на ходы противника. Действие стратегии 0110 сомнительной добропорядочности. Следует подчеркнуть, что в результате естественного отбора вымерли все стратегии с нулевой глубиной памяти, не выдержав конкуренции со стратегиями, имеющими память. Кроме этого, можно заметить, что победившие стратегии занимали 4 и 8 места в соревновании первого поколения. Это демонстрирует сложность предсказания стратегий победителей эволюционного отбора на ранних стадиях эволюции. Ниже мы рассмотрим эволюцию стратегий с большей глубиной памяти и проверим, какие выводы сохранятся с ростом глубины памяти.

Обсудим влияние выбора числа игр n между двумя стратегиями. Интересно отметить наличие специфического механизма чувствительности к n, который связан с наличием осцилляций по n, занимаемых мест некоторыми группами стратегий, в частности их парами. Так суммарный набор при $n = 200$ в 12 поколении стратегий 0101 и 0011 равен 18200.0 и 18199.0, соответственно. Разница составляет всего 0.0055%. Ясно, что при увеличении n такой тонкий баланс может разрушиться. Для выбранной матрицы выплат период такого баланса наблюдается от $n = 1000$ до $n = 1011$. Различия на этапе 12 от n, которые обсуждались выше, тем не менее, не сказываются на списке победителей и проигравших в результате эволюции.

Перейдем теперь к обсуждению влияние выбора матриц выплат. Для этого снова смоделируем эволюцию, используя матрицу выплат M_2. В первом поколении стратегии распределяются по местам следующим образом

Табл.2. Распределение мест в первом поколении.

место	стратегия	очки	сложность
1	0010	25512.0	4
2	0000	25472.0	0
3	1000	23171.0	4
4	0100	21634.0	4
5	0110	21539.0	3
6	0001	19453.0	4
7	0011	19200.0	3
8	0101	19200.0	2
9	1010	19200.0	2
10	1100	19200.0	3
11	0111	18947.0	4
12	1001	16861.0	3
13	1101	16766.0	4
14	1110	15229.0	4
15	1111	12928.0	1
16	1011	12888.0	4

Сравнивая таблицу 1 и 2 можно отметить, что победитель сохраняется, но проигравшей оказывается другая стратегия. Другими словами, могут происходить изменения между некоторыми стратегиями, набирающими близкое число очков с некоторой матрицей выплат. Первые два места удерживаются стратегиями 0010 и 0000 до седьмого поколения. В восьмом поколении стратегия 0000 переходит на 6 место, а 0010 продолжает лидировать. В девятом поколении самая агрессивная и примитивная стратегия занимает последнее место

место	стратегия	очки	сложность
1	0111	8810.0	4
2	0101	8792.0	2
3	0011	8791.0	3
4	0010	8466.5	4
5	0110	8361.5	3
6	0001	7456.5	4
7	0100	7169.5	4
8	0000	6544.0	0

Таким образом, самая примитивная и агрессивная стратегия исчезает уже в 10 поколении. Соответственно, стадия агрессивности популяции занимает $\frac{10}{15}$ долю эволюции до стационарного состояния. Можно считать, что выбор матрицы выплат может влиять на время существование агрессивной стадии популяции. В 15 поколении остаются две стратегии со следующим набором очков

место	стратегия	очки	сложность
1	0011	2400.0	3
1	0110	2400.0	3

Хотя оставшиеся стратегии в точности совпадают с оставшимися стратегиями в этом поколении при матрице выплат M_1. Однако, в следующее поколение перейдут обе стратегии как набравшие одинаковое число очков эволюционных преимуществ. В этом смысле стационарное состояние будет состоять из двух стратегий. Разумеется, такой тонкий баланс может разрушаться многими способами. Рассмотрим теперь эволюцию стратегий с глубиной памяти 1 с матрицей выплат M_3. В первом поколении побеждает та же стратегия 0010, а 0000 занимает второе место. Стратегия 0000 исчезает в 11 поколении, и, следовательно, доля агрессивности популяции такая же, как и при матрице выплат M_1. В 15 поколении выходят те же стратегии, что и при других значениях матриц выплат

место	стратегия	очки	сложность
1	0011	4800.0	3
1	0110	4800.0	3

Снова стационарное состояние состоит и этих двух стратегий. Основной вывод из моделирования эволюции с разными матрицами выплат состоит в универсальности победивших стратегий, среди которых присутствует стратегия «око за око». Все победившие стратегии имеют максимальную глубину памяти 1 среди участвующих в эволюции стратегий и большую сложность 3 близкую к максимальной.

7. Мир с глубиной памяти 2

Перейдем к случаю стратегий с большей глубиной памяти, достигающей 2. Напомним, что среди всех этих стратегий, как отмечалось ранее, присутствуют стратегии с памятью 2 и стратегии эквивалентные стратегиям с глубиной памяти 1 и 0. Рассмотрим, какие изменения в эволюции стратегий будут наблюдаться в этом случае. Число стратегий с такой глубиной памяти с учетом первого и второго хода составляет 32768 стратегий. Рассмотрим результат численного моделирования соревнований первого поколения, в котором участвуют все стратегии. При подсчете очков эволюционного отбора используем матрицу выплат M_1, а число ходов при взаимодействии двух стратегий $n = 100$. Каждая стратегия взаимодействует со всеми стратегиями, включая себя. В первом поколении побеждает не самая агрессивная стратегия 00000000, а менее агрессивная 00001000. Самая агрессивная и примитивная стратегия 00000000 в этом поколении занимает уже 10 место по эволюционным очкам. Таким образом, с увеличением памяти в популяциях примитивность и агрессивность утрачивает преимущества. Стратегия 00001000 удерживает первенство до 75 поколения эволюции. Далее происходит смена победителя стратегией 00001010, которая удерживается на первом месте до 200-го поколения. Далее победителя сменяет стратегия 01111101. Интересно отметить увеличение числа единиц в названиях побеждающих стратегий в процессе эволюции. В определенном смысле это говорит о росте кооперативности таких стратегий. Самая примитивная и агрессивная стратегия исчезает из популяции в 136 поколении. Можно сказать, что агрессивная стадия развития популяции заканчивается в 136 поколении. Учитывая, что эволюция до стационарного состояния занимает 256 поколений, то агрессивная стадия популяции занимает уже $\frac{136}{256} \approx 0.53$ часть времени эволюции популяции. В результате эволюции в 254 поколении побеждает стратегия 11010001, выигрывая по эволюционным очкам у стратегии 01111111. Выигравшая в ходе эволюции стратегия вполне добропорядочная стратегия. Только один ход отвечает на предложение кооперации отказом и то после предварительного отказа от нее противником.

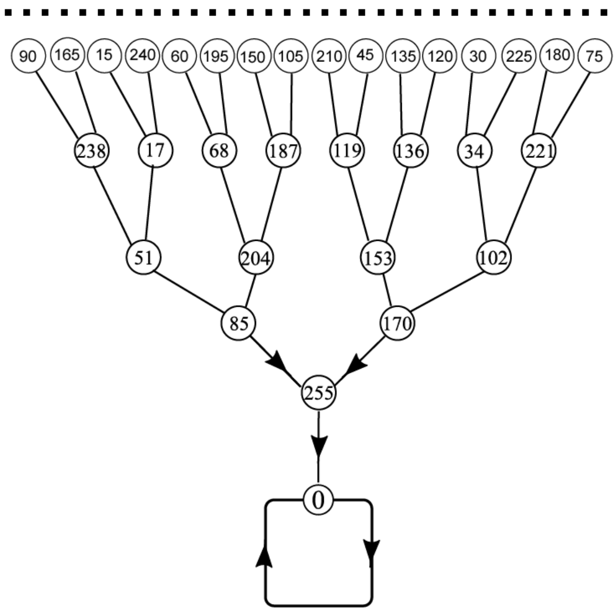

Рис.7. Пять нижних уровней графа (полный граф показан на Рис.3).

Перейдем теперь к обсуждению сложности победивших стратегий, которая определяется уровнем графа (см. Рис.7). Согласно графу стратегий (см. Рис.3), победившая стратегия имеет сложность равную 7. Другими словами, выигрывает в эволюции стратегия, имеющая сложность 7 - близкую к максимальной, но не максимальную. Среди этого класса стратегий максимальная сложность равна 8. Примитивных стратегий, участвующих в эволюции, было 4. Это 00000000, имеющая 0 сложность, одна стратегия

11111111 имеющая 1 сложность, и две стратегии 01010101 и 10101010 сложности 2. В четвертом поколении исчезла стратегия 11111111, следующей исчезла в 62 поколении стратегия 10101010, а затем в 136 поколении 00000000 и, наконец, стратегия 01010101 исчезла в 232 поколении. Эта стратегия, несмотря на свою малую сложность, равную 2, долго удерживалась в популяции. Следует ожидать, что при увеличении глубины памяти эта стратегия будет исчезать раньше. Интересно отметить, что стратегия 00110011, эквивалентная стратегии «око за око», исчезла в 216 поколении и ни в одном поколении не являлась победителем. Таким образом, при достаточной глубине памяти больше 2 стратегия «око за око» не является эволюционно выгодной. Возможно, по этой причине она редко встречается в природных популяциях. На Рис.8 показаны сложности стратегий, победивших на каждом этапе эволюции. Интересно отметить, что сложность выигравших стратегий в каждом поколении не ниже 6 в подавляющем числе поколений. Это соответствует стратегиям, обладающим в точности памятью 2. Стратегии, обладающие памятью глубиной не более 1, имеют сложность меньшую или равную 4. Другими словами, победители в подавляющем числе поколений имеют большую сложность, близкую к максимальной или равную ей.

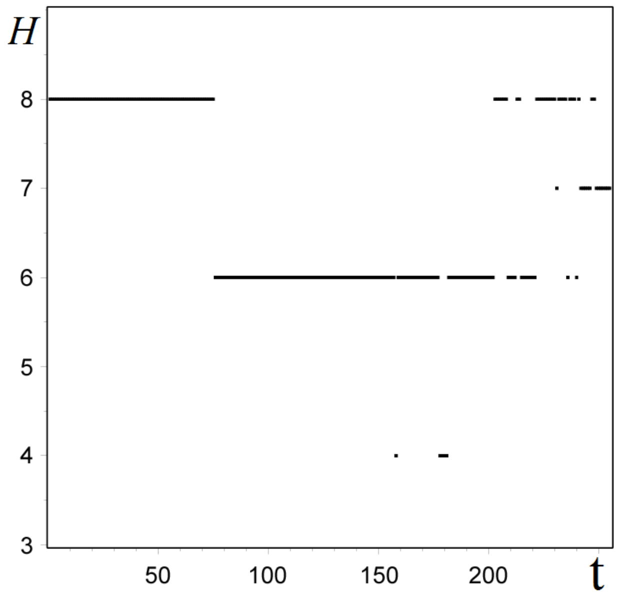

Рис.8. Сложность выигравшей стратегии в поколении t.

Основной вывод состоит в том, что эволюционно выгодные стратегии в любом поколении имеют близкую к максимуму или равную ему сложность.

Рассмотрим теперь влияние выбора матриц выплат на характер эволюции стратегий с глубиной памяти 2. При выборе матрицы выплат M_2 в процессе эволюции выигрывает стратегия 00111101, которая имеет максимальную сложность 8. Примитивные стратегии исчезают в следующем порядке: 11111111 в 7 поколении, 10101010 в 59 поколении, 00000000 в 142 и поколении 01010101 в 230 поколении. Порядок исчезновения примитивных стратегий совпадает с предыдущим случаем. Агрессивная стадия популяции занимает несколько большую долю $\frac{142}{256} \approx 0.56$ времени эволюции. Стратегия 00110011 «око за око» исчезает в 227 поколении и также ни в одном поколении не является победителем. Характер эволюции сложности выигрывающих стратегий в разных поколениях показан на Рис.9 для матриц выплат M_2 и M_3. В обоих случаях победившая в эволюции стратегия имеет максимальную сложность 8.

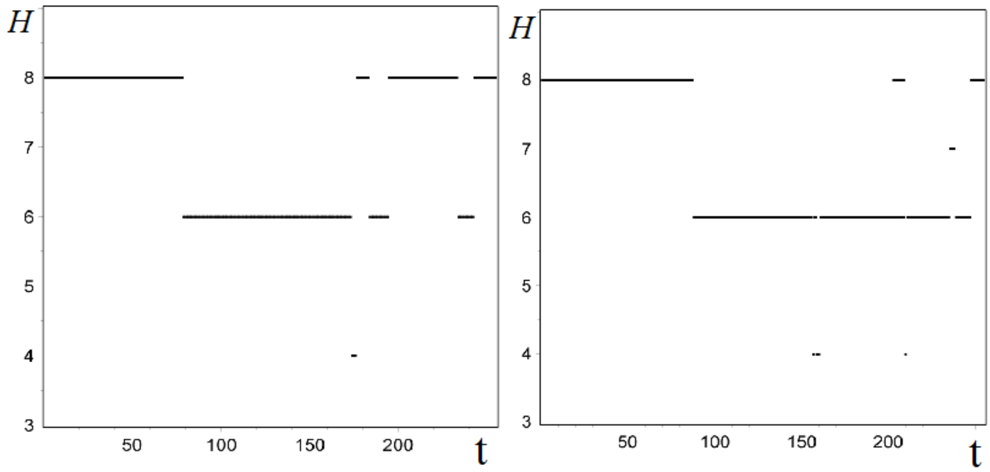

Рис.9. Сложность выигравшей стратегии в поколении t для матрицы выплат M_2 (слева) и M_3 (справа).

Аналогично происходила эволюция стратегий и при матрице выплат M_3. Примитивные стратегии исчезали в том же порядке: 11111111 в 4 поколении, 10101010 в 67 поколении, 00000000 в 131 и поколении 01010101 в 236 поколении. Другими словами, характер эволюции стратегий популяции сохраняется прежним (см. Рис.9). Побеждает в эволюции стратегия 00111101, имеющая максимальную сложность. Примитивные стратегии были победителями всего в 0.02 доле поколений при M_1, в 0.012 при M_2 и в 0.16 при M_3.

8. Выводы

Таким образом, несмотря на признание того, что выигрыш при отказе от кооперации превышает выигрыш при согласии на кооперацию, универсальным правилом эволюции популяций является доминирование сложных стратегий с максимальной глубиной памяти. Причем, как показано выше, эти выигравшие конкурентную борьбу стратегии оказываются в большой степени «добропорядочными» стратегиями, склонными к сотрудничеству, где акты кооперации явно превалируют над отказами. Конкурентная борьба здесь проявляется в том, что на каждом этапе эволюции (или в каждом поколении) популяция отказывается от применения стратегий, выигрыш которых в предыдущем поколении оказался минимальным.

В работе рассмотрены эволюции популяций со стратегиями с тремя значениями глубины памяти 0; 1 и 2. В этих случаях в эволюции могут участвовать в первом поколении все возможные стратегии, включая и примитивные, причем некоторые примитивные стратегии способны существовать в таких популяциях длительное время, сравнимое со временем эволюции популяции. Более того, при глубине памяти 2 в $0.01 \div 0.02$ долях поколений они даже побеждают на промежуточных стадиях эволюции популяции (см. Рис.8, Рис.9). Разумеется, сложность этих относительно примитивных стратегий не столь мала и равна 4, что все-таки соответствует максимальной сложности при глубине памяти 1. Самые примитивные стратегии в таких популяциях со сложностями 0; 1; 2 отсутствуют в качестве победителей во всех поздних поколениях.

Интересно отметить, что подобное явление наблюдается и при эволюции стратегий с глубиной памяти не выше 1. В этом случае среди победителей в разных поколениях выживают стратегии с максимальной сложностью 4 и 3. Однако в небольшом числе поколений на промежуточной стадии эволюции, тем не менее, присутствуют примитивные стратегии сложности 2, которые при глубине памяти 0 имели максимальную сложность. В частности, для матрицы M_2 доля числа поколений, в которых побеждает примитивная стратегия со сложностью 2, составляет 0.08.

С увеличением глубины памяти число поколений, где доминируют примитивные стратегии, уменьшается. Отметим также, что интервал поколений на начальной стадии эволюции, в которых в популяции присутствует абсолютно агрессивная стратегия, с ростом глубины памяти заметно сокращается.

Кроме того, проведенное рассмотрение поставило и новые вопросы. То есть природа обеспечивает доминирование «добропорядочных» и достаточно сложных стратегий поведения субъектов, склонных в большей степени помнить о своих удачах и неудачах в прошлом. Понятно, что это способно привлечь внимание субъектов к стратегиям с большей памятью. Таким образом, память должна увеличиваться в процессе эволюции. С увеличением глубины памяти количество возможных стратегий растет сверхэкспоненциально, что приводит к недостаточности ресурсов для моделирования эволюции таких стратегий. Кроме этого, для конечных популяций число стратегий, начиная с некоторой глубины памяти, заведомо превысит число особей популяции. Поэтому для таких глубин памяти стратегии популяции фактически теряют замкнутость. В процессе эволюции в популяции могут возникать новые стратегии, отсутствующие в первых поколениях. Такие популяции становятся открытыми системами, в которых кроме «стока» стратегий, который обеспечивает эволюционный отбор, присутствует и источник, приводящий к «вбрасыванию» в популяцию новых стратегий. Таким образом, стационарное состояние таких популяций определяется существенно неравновесными процессами. Среди физических примеров таких неравновесных стационарных состояний можно назвать турбулентность, в которой стационарное состояние возникает в результате баланса источника энергии в крупномасштабной области и стока в мелкомасштабной [28]. Моделирование эволюции таких популяций требует других подходов и поэтому будет рассмотрено отдельно.

Заметим в заключении, что универсальная тенденция к доминированию в процессе эволюции сложных стратегий требует столь же универсального объяснения. В определенном смысле возникает своеобразная стрела времени. Возникает открытый вопрос: это та же энтропийная стрела времени или другая?

ЛИТЕРАТУРА

1. Weibull J.W. Evolutionary Game Theory / J.W.Weibull.- MIT Press, Cambridge, MA, 1993. – 265pp.
2. Nowak M.A. Evolutionary Dynamics / M.A.Nowak. - Cambridge, MA, 2006. - 363pp.
3. Claussen J.C. Discrete stochastic processes, replicator and Fokker-Planck equations of coevolutionary dynamics in finite and infinite populations / J.C.Claussen // Banach Center Publications. - 2008. - v.80. - P.17–31.
4. Traulsen A., Claussen J.C., Hauert C. Coevolutionary dynamics: From finite to infinite populations / A.Traulsen, J.C.Claussen, C.Hauert // Phys. Rev. Lett.-2005. -95, P.238701.
5. Nowak M.A., May R.M. The spatial dilemmas of evolution / M.A.Nowak, R.M.May// Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. - 1993. - 3, P.35.
6. Nowak M.A., Sigmund K. A strategy of win-stay, lose-shift that outperforms tit-for-tat in Prisoner's Dilemma / M.A.Nowak, K. Sigmund//, Nature. - 1993. - 364, P.56.
7. Nowak M.A., May R.M. Evolutionary games and spatial chaos / M.A.Nowak, R.M.May // Nature. - 1992. 359, P.826 – 829.
8. Szab'o G., Hauert C., Phase transitions and volunteering in spatial public goods games / G.Szab'o, C.Hauert // Phys. Rev. Lett. -2002. - v.89, P.118101.
9. Perc M. Chaos promotes cooperation in the spatial prisoner’s dilemma game / M.Perc // Europhys. Lett.-2006. - 75 (6), P.841–846.
10. Perc M., Szolnoki A., Szab'o G. Restricted connections among distinguished players support cooperation / M.Perc, A.Szolnoki, G.Szab'o // Phys. Rev. E -2008. - 78, P.066101(6).
11. Baek S.K., Kim B.J. Intelligent tit-for-tat in the iterated prisoner's dilemma game / S.K.Baek, B.J.Kim // Phys.Rev.E. - 2008. - 78, P.011125.
12. Szolnoki A., Perc M. Reward and cooperation in the spatial public goods game / A.Szolnoki, M.Perc // EPL. - 2010. - 92, P.38003.
13. Szolnoki A., Perc M. Conditional strategies and the evolution of cooperation in spatial public goods games / A.Szolnoki, M.Perc // Phys.Rev.E.-2012. 85, P.026104(7).
14. Szab’o G., F’ath G. Evolutionary games on graphs / G.Szab’o, G.F’ath // Phys Rep.-2007. - 446, P.97–216.

15. Ohtsuki H., Hauert C., Lieberman E., Nowak M.A. A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks / H.Ohtsuki, C.Hauert, E.Lieberman, M.A.Nowak// Nature. - 2005. - 441, P.502.
16. Santos F.C., Pacheco J.M. Scale-Free Networks Provide a Unifying Framework for the Emergence of Cooperation / F.C.Santos, J.M.Pacheco// Phys.Rev.Lett.- 2005.- 95, P.098104.
17. Chen X., Fu F., Wang L. Interaction stochasticity supports cooperation in spatial Prisoner's dilemma / X.Chen, F.Fu, L.Wang,// Phys.Rev.E .-2008.- 78, P.051120.
18. Perc M. Evolution of cooperation on scale-free networks subject to error and attack / M. Perc // New J. Phys.-2009.- 11, P.033027.
19. Fu F., Wang L., Nowak M.A., Hauert C., Evolutionary dynamics on graphs: Efficient method for weak selection / F.Fu, L.Wang, M.A.Nowak, C.Hauert // Phys. Rev. E.-2009.- 79, P.046707.
20. Wang W.X., Yang R., Lai Y.C. Cascade of elimination and emergence of pure cooperation in coevolutionary games on networks / W.X.Wang, R.Yang, Y.C.Lai // Phys. Rev. E.-2010.- 81 P.035102(R).
21. J.Ren, W.X.Wang, F.Qi, Randomness enhances cooperation: A resonance-type phenomenon in evolutionary game / J.Ren, W.X.Wang, F.Qi // Phys.Rev.E. - 2007. - 75, P.045101(R).
22. Rong Z, Yang H X and Wang W X, Feedback reciprocity mechanism promotes the cooperation of highly clustered scale-free networks / Z.Rong H.X.Yang and W.X.Wang // Phys. Rev. E. - 2011. - 82, P.047101.
23. Poncela J., Gomez-Gardens J., Moreno Y. Cooperation in Scale-free networks with limited associative capacities / J.Poncela, J.Gomez-Gardens, Y.Moreno// Phys.Rev. E.-2011. - 83, P.057101.
24. Колмогоров А.Н. Три подхода к определению понятия «количество информации» / А.Н.Колмогоров // Проблемы передачи информации. – 1965.- т.1, No.1. - С. 3-11.
25. Lloyd S. Measures of Complexity: A Nonexhaustive List / S.Lloyd // IEEE Cont. Syst. Mag. – 2001. - v. 21, № 4. - P.7–8.
26. Арнольд В.И. Экспериментальное наблюдение математических фактов / В.И.Арнольд. - М.: МЦНМО, 2006. - 120 с.
27. R.Axelrod. The evolution of cooperation, Basic Books, New York (1984).
28. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности / А.С.Монин, А.М.Яглом. - М.: Наука, 1965. - 640с.

Надійшла – 01.04.2016.