УДК 004.652

Математические основания алгоритмов линеаризации: рефлексивно-транзитивные замыкания бинарных отношений

Д. Б. Буй, Е. В. Шишацкая, S. Fabunmi, K. Mohammed
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина

Работа посвящена математическим основаниям алгоритмов линеаризации – одного из методов разрешения конфликта имен, возникающего при множественном наследовании в объектно-ориентированных языках программирования. Основным объектом исследования выступает рефлексивно-транзитивное замыкание бинарного отношения. Приведен критерий того, что оно является частичным порядком; само замыкание является монотонным, возрастающим (по теоретико-множественному включению) и идемпотентным оператором. Приведены два неявных представления рассматриваемого замыкания, полученные исходя из его свойств, и еще одно – в виде наименьшего решения характеристического уравнения (при этом установлена структура множества всех решений этого уравнения).

Ключевые слова: *объектно-ориентированный язык программирования, разрешение конфликта имен, алгоритмы линеаризации, рефлексивно-транзитивное замыкание.*

Робота присвячена математичним основам алгоритмів лінеаризації – одного з методів розв‘язання конфлікту імен, що виникає при множинному успадкуванні в об‘єктно-орієнтованих мовах програмування. Основним об‘єктом дослідження є рефлексивно-транзитивне замикання бінарного відношення. Наведений критерій для перевірки, чи воно є частковим порядком; замикання як таке є монотонним, зростаючим (за теоретико-множинним включенням) та ідемпотентним оператором. Для розглянутого замикання наведено два його неявних вирази, отримані виходячи з його властивостей, і ще один - у вигляді найменшого рішення характеристичного рівняння (при цьому встановлено структуру множини всіх рішень цього рівняння).

Ключові слова: *об'єктно-орієнтована мова програмування, розв'язання конфлікту імен, алгоритми лінеаризації, рефлексивно-транзитивне замикання.*

The paper is devoted to mathematical foundations of linearization algorithms – one of the methods of the names conflict resolution that occurs in object-oriented programming languages, which support multiple inheritance. The main object of the study is a reflexive-transitive closure of a binary relation. The criterion for such a closure to be the partial order is presented; the closure itself is monotone, increasing (in terms of the set-theory inclusion) and idempotent operator. Two implicit representations of the closure were derived from its properties and one more representation was obtained in the form of the least solution of some characteristic equation (together with this, the structure of the set of all solutions to this equation is found).

Key words: *Object-oriented programming language, names conflict resolution, linearization algorithms, reflexive-transitive closure.*

Введение

В объектно-ориентированных языках программирования, которые поддерживают множественное наследование (multiple inheritance), возможен конфликт имен (conflict of names). Такая ситуация возникает, когда один и тот же метод (либо поле), имея различную реализацию, присутствуют в нескольких родительских классах данного класса.

Существует два основных подхода к разрешению конфликта имен [1]. Во-первых, конфликт разрешается тривиально с помощью явного указания одного соответствующего родительского класса из нескольких возможных (такой подход реализован, например, в языке C++). Во-вторых, применяется специальный алгоритм для выбора нужного родительского класса, что реализовано, например, в языках CLOS, LOOPS, Python, Perl, Dylan [2-5]). Основное преимущество второго подхода заключается в разрешении конфликта имен при выполнении программы, т.е. динамически.

По сути, основная идея второго подхода заключается в линеаризации всех предков класса (для которого надо разрешить конфликт имен), т.е. в линейном упорядочении всех предков с последующим выбором первого (в том или ином смысле) требуемого предка. По существу речь идет об алгоритмах обхода ациклического подграфа, построенного по иерархии классов (подробности см., например, в [6]).

Несмотря на то, что алгоритмы линеаризации были предложены еще в начале 90-х годов XX столетия, они (алгоритмы), строго говоря, на сегодняшний день не имеют формального математического обоснования, т.е. алгоритмы формально не верифицированы.

Предлагаемая работа посвящена математическим основам линеаризации: в ней представлен фрагмент математической теории бинарных отношений, касающийся в основном рефлексивно-транзитивных замыканий (остальной материал носит вспомогательный характер), так как именно такие замыкания и применяются при построении соответствующего частичного порядка на классах по иерархии классов.

Теория бинарных отношений занимает важное место в математике вообще, и в дискретной математике, в частности; мы упомянем только не очень известные фундаментальные классические работы [7, 8] (отметим, что [7] – перевод, который вышел из печати в 1963 г., оригинальной работы, напечатанной в Бюллетене французского математического общества в 1948 г.), не потерявшие и сейчас свою актуальность .

В предлагаемой статье получены такие основные результаты: установлены свойства двух вспомогательных операций (инверсии бинарного отношения и произведения бинарных отношений), а также рефлексивно-транзитивного замыкания бинарного отношения. Для указанного замыкания: (1) установлен критерий быть частичным порядком; (2) замыкание является оператором замыкания относительно теоретико-множественного включения; (3) замыкание является наименьшим (относительно теоретико-множественного включения) рефлексивным и транзитивным отношением, содержащим исходное отношение; (4) замыкание является множеством, порожденным диагональю на универсуме в построенной частичной алгебре всех пар; (5) замыкание U^* является наименьшим решением параметрического характеристического уравнения $X = \Delta_D \cup X \cup U \circ X$, где Δ_D – диагональ на универсуме, а $\circ$ – произведение бинарных отношений (а также наименьшим решением более простого параметрического уравнения $X = \Delta_D \cup U \circ X$), (6) установлена структура множества всех решений указанного уравнения. Отметим, что в перечисленных выше результатах (3)-(5) речь идет о неявных (денотативных) заданиях рефлексивно-транзитивного замыкания.

Все стандартные понятия для бинарных отношений понимаются в смысле [9], для замкнутости изложения и удобства читателя приведены основные определения.

Зафиксируем универсум D, элементы которого обозначим $x, y, z, \ldots$; бинарные отношения на D обозначим $U, V, \ldots$ Всюду далее символ ■ обозначает конец формулировки утверждения и доказательства, а символ □ – конец логической части доказательства.

2. Вспомогательные операции инверсии и произведения бинарных отношений

В следующем предложении приведены нужные далее свойства инверсии бинарного отношения, которое вводятся стандартно: $U^{-1} = \{\langle y, x\rangle | \langle x, y\rangle \in U\}$. Ниже $U \circ V = \{\langle x, y\rangle | \exists z(\langle x, z\rangle \in U \wedge \langle z, y\rangle \in V)\}$ – обычное произведение отношений U и V (в указанном порядке).

Предложение 1 (свойства инверсии). Выполняются следующие утверждения:

1) $U \subseteq V \Rightarrow U^{-1} \subseteq V^{-1}$ (монотонность инверсии относительно теоретико-множественного включения);

2) $\Delta_D^{-1} = \Delta_D$, где $\Delta_D = \{\langle x, x\rangle | x \in D\}$ – диагональ на D (диагональ – неподвижная точка для инверсии[1]);

3) $\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^{-1} = \bigcup_{i\in I} U_i^{-1}$ (дистрибутивность инверсии относительно объединений);

4) $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1}$ (инверсия произведения отношений);

5) $(U^{-1})^{-1} = U$ (инверсия инверсии). ■

Доказательство проводится непосредственно. ■

Отметим, что инверсия является дистрибутивной и относительно пересечений.

В следующем предложении приведены необходимые далее свойства произведения отношений.

Предложение 2 (свойства произведения). Выполняются следующие утверждения:

1) $U \subseteq V \wedge U' \subseteq V' \Rightarrow U \circ U' \subseteq V \circ V'$ (монотонность относительно теоретико-множественного включения по каждому аргументу[2]);

---

[1] Это утверждение можно усилить: все неподвижные точки инверсии и только они имеют вид поддиагоналей – Δ_L, где $L \subseteq D$.

[2] А, значит, и по совокупности аргументов.

2) $\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)\circ\left(\bigcup_{j\in J} V_j\right)=\bigcup_{i\in I,\, j\in J} U_i\circ V_j$ (дистрибутивность относительно объединений по каждому аргументу);

3) $\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right)\circ\left(\bigcap_{j\in J} V_j\right)\subseteq\bigcap_{i\in I,\, j\in J} U_i\circ V_j$ (верхняя оценка произведения пересечений[3]);

4) $U\circ\Delta_D=\Delta_D\circ U=U$ (диагональ Δ_D – правая (левая) единица по произведению). ■

Доказательство проводится непосредственно. ■

3. Вспомогательные результаты: рефлексивность, антисимметричность и транзитивность

Рефлексивность бинарного отношения понимается стандартно:

$$U \text{ – рефлексивно} \Leftrightarrow \forall x\left(\langle x,x\rangle\in U\right).$$

Очевидно, что U – рефлексивно $\Leftrightarrow \Delta_D\subseteq U \Leftrightarrow \Delta_D\subseteq U^{-1}$.

Первая эквивалентность очевидна, а вторая вытекает из очевидной эквивалентности $\Delta_D\subseteq U \Leftrightarrow \Delta_D\subseteq U^{-1}$ (надо применить монотонность инверсии (п. 1 предложения 1), а также пп. 2, 5 предложения 1).

Ниже понятие антисимметричности отношения понимается стандартно:

$$U \text{ – антисимметрично} \Leftrightarrow \forall xy\left(\langle x,y\rangle\in U\wedge\langle y,x\rangle\in U\Rightarrow x=y\right).$$

Ниже приведен критерий антисимметричности без использования предметных переменных.

Предложение 3 (критерий антисимметричности). Выполняется эквивалентность:

$$U \text{ – антисимметрично} \Leftrightarrow U\cap U^{-1}\subseteq\Delta_D. \ ■$$

Доказательство. Необходимость. Пусть U – антисимметрично. Рассмотрим $\langle x,y\rangle\in U\cap U^{-1}$, тогда $\langle x,y\rangle\in U$ и $\langle x,y\rangle\in U^{-1}$. Таким образом, $\langle x,y\rangle\in U$ и $\langle y,x\rangle\in U$, т.е., ввиду антисимметричности U, $x=y$, следовательно, $\langle x,y\rangle\in\Delta_D$. □

Достаточность. Пусть $\langle x,y\rangle\in U$ и $\langle y,x\rangle\in U$, т.е. $\langle x,y\rangle\in U$, а $\langle x,y\rangle\in U^{-1}$. Отсюда $\langle x,y\rangle\in U\cap U^{-1}\subseteq\Delta_D$. □■

Простые примеры показывают, что заменить включение на равенство в правой части эквивалентности из предложения 3 нельзя.

Включение из правой части эквивалентности предложения 3 переходит в равенство в точности для рефлексивных и антисимметричных отношений.

---

[3] Другими словами, произведение не является, вообще говоря, дистрибутивным относительно пересечений.

Следствие 1 (критерий антисимметричности и рефлексивности). Выполняется эквивалентность:

U – антисимметрично и рефлексивно $\Leftrightarrow U \cap U^{-1} = \Delta_D$. ■

Доказательство. Необходимость. Пусть U – антисимметрично и рефлексивно. По предложению 3 $U \cap U^{-1} \subseteq \Delta_D$ и остается показать обратное включение. Ввиду рефлексивности U выполняются включения $\Delta_D \subseteq U$, $\Delta_D \subseteq U^{-1}$, из которых и вытекает требуемое включение $\Delta_D \subseteq U \cap U^{-1}$. □

Достаточность. Пусть $U \cap U^{-1} = \Delta_D$. Ввиду предложения 3 U антисимметрично. Кроме того, очевидно, что $\Delta_D \subseteq U$,(а также $\Delta_D \subseteq U^{-1}$) т.е. U и рефлексивно. □■

Переходим к транзитивности отношений, которое понимается стандартно:

$$U \text{ – транзитивно} \Leftrightarrow \forall xyz\left(\langle x, y\rangle \in U \wedge \langle y, z\rangle \in U \Rightarrow \langle x, z\rangle \in U\right).$$

Ниже приведен критерий транзитивности без использования предметных переменных. Далее $U^2 = U \circ U$.

Предложение 4 (критерий транзитивности). Выполняется эквивалентность:

$$U \text{ – транзитивно} \Leftrightarrow U^2 \subseteq U . ■$$

Доказательство проводится непосредственно. ■

Отметим, простые примеры показывают, что заменить в правой части эквивалентности из предложения 4 включение на равенство, вообще говоря, нельзя.

Действительно, пусть $U = \{\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle, \langle x, z\rangle\}$, где элементы x, y, z попарно различны (см. рис. 1).

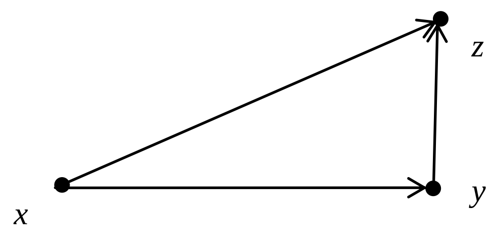

Рис. 1. Пример транзитивного отношения, такого, что $U \not\subseteq U^2$

Очевидно, что $U^2 = \{\langle x, z\rangle\}$, т.е. U – транзитивно; при этом $U \not\subseteq U^2$, таким образом, равенство $U = U^2$ не выполняется.

Включение из правой части эквивалентности предложения 4 переходит в равенство для рефлексивных отношений.

Следствие 2 (критерий транзитивности и рефлексивности). Выполняется эквивалентность:

$$U \text{ – транзитивно и рефлексивно} \Leftrightarrow U^2 = U \wedge \Delta_D \subseteq U . ■$$

Доказательство. Необходимость. Пусть U – транзитивно и рефлексивно. По определению рефлексивности $\Delta_D \subseteq U$. Ввиду предложения 4 $U^2 \subseteq U$ и остается установить обратное включение. Действительно, $U \subseteq U$ и $\Delta_D \subseteq U$, откуда в силу монотонности произведения (п. 1 предложения 2) и п. 4 предложения 2 (Δ_D– единица по произведению) получаем включение $U \circ \Delta_D = U \subseteq U^2$. □■

Достаточность вытекает из определения рефлексивности и предложения 4 (критерий транзитивности). □■

Ниже приведен критерий частичного порядка (рефлексивного, транзитивного и антисимметричного отношения) без использования предметных переменных.

Предложение 5 (критерий частичного порядка). Выполняется эквивалентность:

$$U \text{ – частичный порядок} \Leftrightarrow U \cap U^{-1} \subseteq \Delta_D \wedge \Delta_D \subseteq U \wedge U^2 \subseteq U. \ ■$$

Доказательство вытекает из определения рефлексивности и критериев антисимметричности (предложение 3) и транзитивности (предложение 4). ■

Упростим правую часть эквивалентности предложения 5, учитывая рефлексивность частичного порядка.

Следствие 3 (критерий частичного порядка). Выполняется эквивалентность:

$$U \text{ – частичный порядок} \Leftrightarrow U \cap U^{-1} = \Delta_D \wedge U^2 = U. \ ■$$

Доказательство. Необходимость вытекает из критериев антисимметричности и рефлексивности (следствие 1) и транзитивности и рефлексивности (следствие 2). □

Достаточность также вытекает из этих же критериев. □■

4. Рефлексивно-транзитивное замыкание бинарного отношения

Переходим к основному понятию работы – рефлексивно-транзитивному замыканию отношения U, которое имеет следующее явное определение:

$$U^* = \bigcup_{i=0,1,2,\dots} U^i, \text{ где } U^0 = \Delta_D,\ U^1 = U,\ U^{i+1} = U \circ U^i,\ i = 1,2,\dots$$

Предложение 6 (свойства рефлексивности и транзитивности рефлексивно-транзитивного замыкания). U^* – рефлексивно и транзитивно. ■

Доказательство. Рефлексивность очевидна ($U^0 = \Delta_D$), проверим транзитивность U^*. Для этого ввиду предложения 4 (критерий транзитивности) достаточно проверить включение $U^* \circ U^* \subseteq U^*$ (из-за рефлексивности U^* на самом деле будет установлено равенство). Имеем цепочку равенств:

$$\left(U^*\right)^2 = \left(\bigcup_{i=0,1,\dots} U^i\right) \circ \left(\bigcup_{j=0,1,\dots} U^j\right) = \bigcup_{i=0,1,\dots;j=0,1,\dots} U^{i+j} = \bigcup_{i=0,1,\dots} U^i \cup \bigcup_{i=0,1,\dots;j=1,2,\dots} U^{i+j} = U^*.$$

Здесь воспользовались дистрибутивностью произведения относительно объединений (п. 2 предложения 2) и очевидным включением $\bigcup_{i=0,1,\dots;j=1,2,\dots} U^{i+j} \subseteq U^*$. ■

Таким образом, чтобы быть частичным порядком рефлексивно-транзитивному замыканию необходимо и достаточно обладать антисимметричностью. Соответствующий критерий в терминах исходного (замыкаемого) отношения без использования предметный переменных приведен в следующем предложении.

Предложение 7 (критерий антисимметричности для рефлексивно-транзитивного замыкания). Выполняется эквивалентность:

$$U^* \text{ – антисимметрично} \Leftrightarrow \forall i, j = 1,2,\ldots U^i \cap \left(U^{-1}\right)^j \subseteq \Delta_D \,.\ \blacksquare$$

Доказательство. Необходимость. Пусть U^* – антисимметрично, тогда по критерию антисимметричности (предложение 3) $U^* \cap \left(U^*\right)^{-1} \subseteq \Delta_D$. Распишем левую часть этого включения:

$$U^* \cap \left(U^*\right)^{-1} = \bigcup_{i=0,1,\ldots} U^i \cap \left(\bigcup_{i=0,1,\ldots} U^i\right)^{-1} = \bigcup_{i=0,1,\ldots} U^i \cap \bigcup_{i=0,1,\ldots} \left(U^{-1}\right)^i = \bigcup_{i=0,1,\ldots;j=0,1,\ldots} U^i \cap \left(U^{-1}\right)^j \,.$$

В указанных переходах, наряду с общезначимыми теоретико-множественными равенствами, воспользовались дистрибутивностью инверсии относительно объединений (второй переход) и инверсией произведения (последний переход) – пп. 3 и 4 предложения 1. Итак, имеем:

$\bigcup_{i=0,1,\ldots;j=0,1,\ldots} U^i \cap \left(U^{-1}\right)^j = U^* \cap \left(U^*\right)^{-1} \subseteq \Delta_D$. Отсюда и вытекает, что $U^i \cap \left(U^{-1}\right)^j \subseteq \Delta_D$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots$ □

Достаточность. Ввиду критерия антисимметричности (предложение 3) достаточно установить включение $U^* \cap \left(U^*\right)^{-1} \subseteq \Delta_D$.

Используем представление левой части этого включения, приведенное выше при доказательстве необходимости. Имеем:

$$U^* \cap \left(U^*\right)^{-1} = \bigcup_{i=0,1,\ldots;j=0,1,\ldots} U^i \cap \left(U^{-1}\right)^j =$$

$$= \bigcup_{i=1,2,\ldots;j=1,2,\ldots} U^i \cap \left(U^{-1}\right)^j \cup \bigcup_{j=0,1,\ldots;i=0} \Delta_D \cap \left(U^{-1}\right)^j \cup \bigcup_{i=0,1,\ldots;j=0} U^i \cap \Delta_D \subseteq$$

$$\subseteq \Delta_D \cup \Delta_D \cup \Delta_D = \Delta_D \,.$$

□■

Отметим, что в правой части эквивалентости предложения 7 можно расширить область действия связанных переменных $i, j = 0, 1, 2, \ldots$

Теперь можно сформулировать один из основных результатов.

Теорема 1 (критерий частичного порядка для рефлексивно-транзитивного замыкания). Выполняется эквивалентность:

$$U^* \text{ – частичный порядок} \Leftrightarrow \forall i, j = 1,2,\ldots U^i \cap \left(U^{-1}\right)^j \subseteq \Delta_D \,.\ \blacksquare$$

Доказательство. Необходимость вытекает из критерия антисимметричности для рефлексивно-транзитивного замыкания U^* (предложение 7), а достаточность – из того же критерия и предложения 6. ■

Именно этот результат важен для алгоритмов линеаризации, когда по иерархии классов, удовлетворяющей по сути условию отсутствия циклов в соответствующем индуцированном графе на классах, строится частичный порядок на множестве классов (требование $\forall i, j = 1,2,... U^i \cap \left(U^{-1}\right)^j \subseteq \Delta_D$ и говорит по существу о отсутствии циклов).

5. Рефлексивно-транзитивное замыкание бинарного отношения: характеристические денотативные свойства

Переходим к свойствам рефлексивно-транзитивного замыкания, важным для внутренней проблематики теории бинарных отношений. Будут представлены два задания рефлексивно транзитивного отношения в терминах его свойств.

5.1. Рефлексивно-транзитивное замыкание как наименьшее рефлексивное и транзитивное отношение, содержащее исходное отношение

Рассмотрим следующее семейство отношений для зафиксированного отношения U :

$$F_U = \left\{ V \middle| V - \text{рефлексивно и транзитивно} \wedge U \subseteq V \right\}.$$

Это семейство непустое: оно содержит, например, U^* (ввиду предложения 6) и универсальное отношение $D \times D$ на домене.

Предложение 8 (свойство замкнутости F_U относительно пересечений). Семейство F_U замкнуто относительно произвольных пересечений. ■

Доказательство. Пусть $\hat{V} = \bigcap_{i \in I} V_i$, где $V_i \in F_U$ для всех индексов $i \in I$. Покажем, что для пересечения выполняется принадлежность $\hat{V} \in F_U$.

Рефлексивность $\hat{V}$ и включение $U \subseteq \hat{V}$ очевидны. □

Покажем транзитивность $\hat{V}$. Ввиду критерия транзитивности (предложение 4) для этого достаточно проверить включение $\hat{V} \circ \hat{V} \subseteq \hat{V}$. Действительно, имеем цепочку равенств и включений:

$$\hat{V} \circ \hat{V} = \left(\bigcap_{i \in I} V_i \right) \circ \left(\bigcap_{j \in I} V_j \right) \subseteq \bigcap_{i \in I;\, j \in I} V_i \circ V_j \subseteq \bigcap_{i \in I} V_i \circ V_i = \bigcap_{i \in I} V_i = \hat{V}.$$

.

В этих переходах использовали верхнюю оценку произведения пересечений (второй переход, п. 3 предложения 2) и равенство $V_i^2 = V_i$ (предпоследний переход; использовали то, что отношение V_i рефлексивно и транзитивно, далее по следствию 2). □■

Из предложения 8 вытекает, что семейство F_U является муровским по терминологии [10] и центрированным по терминологии [11].

Теорема 2. Выполняется равенство $U^* = \bigcap_{V \in F_U} V$. ■

Доказательство. Обозначим $V_0 = \bigcap_{V \in F_U} V$. Так как $U^* \in F_U$, то $V_0 \subseteq U^*$ и остается показать обратное включение. □

Зафиксируем произвольное $V \in F_U$ и индукцией по $k = 0,1,...$ проверим включение $U^k \subseteq V$.

Базис индукции. $U^0 = \Delta_D \subseteq V$ ввиду рефлексивности V. □

Индуктивный шаг. Пусть $U^k \subseteq V$, домножим обе части включения на U справа; тогда, ввиду монотонности произведения (п.1 предложения 2), включение сохранится: $U^k \circ U = U^{k+1} \subseteq V \circ U$. Остается учесть включение $V \circ U \subseteq V \circ V = V$ (использована та же монотонность произведения, включение $U \subseteq V$, свойства рефлексивности и транзитивности V и соответствующий критерий – следствие 2). □

Итак, $U^k \subseteq V$ для всех $k = 0,1,2,...$, т.е. $U^* \subseteq V$. Отсюда ввиду произвольности $V \in F_U$ и вытекает требуемое включение $U^* \subseteq \bigcap_{V \in F_U} V = V_0$. □■

Таким образом, замыкание U^* – наименьшее (относительно теоретико-множественного включения) рефлексивное и транзитивное отношение, содержащее отношение U. Это и есть первое денотативное задание рефлексивно-транзитивного замыкания.

Отсюда вытекает следующее следствие.

Следствие 4 (описание неподвижных точек оператора $U \mapsto U^*$). Имеет место:

$$U \text{ – рефлексивно и транзитивно} \Leftrightarrow U^* = U. \ ■$$

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 2, а достаточность – из предложения 6. ■

Предложение 9 (свойства оператора $U \mapsto U^*$). Выполняются следующие утверждения:

1) $U \subseteq V \Rightarrow U^* \subseteq V^*$ (монотонность относительно теоретико-множественного включения);

2) $U \subseteq U^*$ (возрастаемость относительно теоретико-множественного включения);

3) $(U^*)^* = U^*$ (идемпотентность). ■

Доказательство. П. 1 вытекает из монотонности произведения (п. 1 предложения 2) и теоретико-множественного объединения. □

П. 2 очевиден ($U^1 = U$). □

Для проверки п. 3 надо применить предложение 6 (U^*– рефлексивно и транзитивно) и следствие 4 (о неподвижных точках оператора $U \mapsto U^*$). □■

Ниже понятие оператора замыкания используется в смысле [12]. Следующее следствие является просто краткой формулировкой предыдущего предложения 9.

Следствие 5. Оператор $U \mapsto U^*$ является оператором замыкания относительно теоретико-множественного включения. ■

Доказательство непосредственно вытекает из предложения 9. ■

5.2. Рефлексивно-транзитивное замыкание как подалгебра, порожденная диагональю в специальной алгебре всех пар

Рассмотрим следующую унарную параметрическую операцию над парами:

$$\xrightarrow[x,y]{} : D\times D \tilde{\to} D\times D,\ dom\xrightarrow[x,y]{} = D\times\{x\},\ (\langle z,x\rangle)\xrightarrow[x,y]{} = \langle z,y\rangle$$

(используем постфиксную форму записи). Всюду далее $[U]\xrightarrow[x,y]{}$ – полный образ отношения U относительно операции $\xrightarrow[x,y]{}$ (также используем постфиксную форму записи; по поводу общезначимой теоретико-множественной конструкции полного образа множества относительно отношения см. работу [13]).

Основные свойства этой операции приведены в следующем предложении.

Предложение 10. Выполняются следующие утверждения:

1) $\langle z,x\rangle \in U \wedge \langle x,y\rangle \in V \Rightarrow (\langle z,x\rangle)\xrightarrow[x,y]{} \in U\circ V$;

2) $\langle x,y\rangle \in V \Rightarrow [U]\xrightarrow[x,y]{} \subseteq U\circ V$;

3) $\langle x,y\rangle \in U\circ V \Rightarrow \exists z(\langle x,z\rangle \in U \wedge \langle z,y\rangle \in V \wedge \langle x,y\rangle = (\langle x,z\rangle)\xrightarrow[z,y]{})$;

4) $U\circ V = \bigcup\limits_{\langle x,y\rangle\in V}[U]\xrightarrow[x,y]{}$.■

Доказательство. П. 1 вытекает из определений операции $\xrightarrow[x,y]{}$ и произведения отношений. □

П. 2 вытекает из п. 1 и определения полного образа. □

П. 3 вытекает из определений операции $\xrightarrow{x,y}$ и произведения отношений. □

П. 4. Включение правой части в левую вытекает из доказанного п. 2 предложения 10, а обратное включение – из уже доказанного п. 3 этого же предложения. ■

Следствие 6 (свойства операции $\xrightarrow[x,y]{}$). Выполняются следующие утверждения:

1) $U^{k+1} = \bigcup\limits_{\langle x,y\rangle\in U}[U^k]\xrightarrow[x,y]{}$, для всех $k = 0,1,2,\ldots$;

2) $[U^k]\xrightarrow[x,y]{} \subseteq U^{k+1}$, для всех $\langle x,y\rangle \in U$ и $k = 0,1,2,\ldots$;

3) U^* замкнуто относительно любой операции вида $\xrightarrow[x,y]{}$, где $\langle x,y\rangle \in U$.■

Доказательство. П. 1. Ввиду п. 4 предложения 10 и определения произведения отношений имеем цепочку равенств: $U^{k+1} = U^k\circ U = \bigcup\limits_{\langle x,y\rangle\in U}[U^k]\xrightarrow[x,y]{}$.□

П. 2 вытекает из п. 1. □

П. 3. Пусть $\langle x,y\rangle \in U$, имеем цепочку равенств и включений:

$$[U^*]\xrightarrow[x,y]{} = \left[\bigcup_{k=0,1,\ldots} U^k\right]\xrightarrow[x,y]{} = \bigcup_{k=0,1,\ldots}[U^k]\xrightarrow[x,y]{} \subseteq \bigcup_{k=0,1,\ldots} U^{k+1} = \bigcup_{k=1,2,\ldots} U^k \subseteq U^*.$$

Во втором переходе была использована дистрибутивность полного образа относительно объединений (см. [13]), а в третьем – доказанный п. 2 следствия 6. Итак, для полного образа $[U^*]\xrightarrow[x,y]{} \subseteq U^*$, что и означает замкнутость U^* относительно операции $\xrightarrow[x,y]{}$, где $\langle x,y\rangle \in U$. ■

Зафиксируем отношение U и рассмотрим частичную параметрическую алгебру всех пар $A_U = \langle D\times D, \Omega_U\rangle$, где $\Omega_U = \left\{\xrightarrow[x,y]{} \middle| \langle x,y\rangle \in U\right\}$ – сигнатура.

Далее $[\Delta_D]_{\Omega_U}$ – подалгебра алгебры A_U, порожденная диагональю Δ_D (по поводу подалгебр и порождающих совокупностей см., например, [гл. I, § 1, п. 1.3, 14]).

Теперь можно сформулировать утверждение о втором денотативном представлении рефлексивно-транзитивного замыкания.

Теорема 3 (рефлексивно-транзитивное замыкание как замыкание в алгебре пар). Выполняется равенство $U^* = [\Delta_D]_{\Omega_U}$. ■

Доказательство. В силу п. 3 следствия 6 выполняется $[\Delta_D]_{\Omega_U} \subseteq U^*$(ведь носитель рассматриваемой подалгебры – наименьшее множество, содержащее диагональ и замкнутое относительно всех сигнатурных операций, а U^* содержит диагональ и замкнуто относительно всех сигнатурных операций в силу упомянутого п. 3 следствия 6) и остается установить обратное включение. □

Для этого индукцией по $k = 0,1,2,\ldots$ покажем, что $U^k \subseteq [\Delta_D]_{\Omega_U}$.

Базис очевиден, так как $U^0 = \Delta_D$. □

Индуктивный шаг. В силу п. 1 следствия 6, индуктивного предположения и монотонности полного образа (см. [13]) имеем цепочку: $U^{k+1} = \bigcup_{\langle x,y\rangle\in U}[U^k]\xrightarrow[x,y]{} \subseteq \bigcup_{\langle x,y\rangle\in U}\left[[\Delta_D]_{\Omega_U}\right]\xrightarrow[x,y]{} \subseteq [\Delta_D]_{\Omega_U}$. В последнем переходе воспользовались очевидными свойствами замкнутости (относительно операций $\xrightarrow[x,y]{}$ для $\langle x,y\rangle \in U$) замыкания $[\Delta_D]_{\Omega_U}$. ■

Таким образом, рефлексивно-транзитивное замыкание U^* порождается диагональю в алгебре пар вида A_U. Это и есть второе денотативное задание рефлексивно-транзитивного замыкания.

6. Рефлексивно-транзитивное замыкание бинарного отношения как наименьшее решение характеристического уравнения

Дадим третью денотативную характеристику рефлексивно-транзитивного замыкания, а именно как наименьшего решения соответствующего естественного уравнения.

Зафиксируем отношение U и рассмотрим параметрическое уравнение относительно переменной $X \in 2^{D\times D}$:

$$X = \Delta_D \cup X \cup U \circ X . \tag{1}$$

Теорема 4 (рефлексивно-транзитивное замыкание как наименьшее решение уравнения). Рефлексивно-транзитивное замыкание U^* является наименьшим (по теоретико-множественному включению) решением уравнения (1). ■

Доказательство. Покажем сначала, что U^* является решением уравнения (1). Имеем цепочку равенств (во втором переходе воспользовались дистрибутивностью произведения относительно объединений (п. 2 предложения 2)):

$$\Delta_D \cup U^* \cup U \circ U^* = \Delta_D \cup \bigcup_{i=0,1,\ldots} U^i \cup U \circ \bigcup_{i=0,1,\ldots} U^i = \Delta_D \cup \bigcup_{i=0,1,\ldots} U^i \cup \bigcup_{i=0,1,\ldots} U^{i+1} =$$

$$= \Delta_D \cup \bigcup_{i=0,1,\ldots} U^i \cup \bigcup_{i=1,2,\ldots} U^i = \bigcup_{i=0,1,\ldots} U^i = U^*. \quad \square$$

Пусть теперь V – произвольное решение уравнения (1). Очевидно, что тогда выполняются включения

$$\Delta_D \subseteq V \text{ , } U \circ V \subseteq V . \tag{2}$$

Индукцией по $k = 0,1,2,\ldots$ покажем, что выполняется включение $U^k \subseteq V$.

Базис. $U^0 = \Delta_D$, остается применить первое включение из (2). □

Индуктивный шаг. Пусть $U^k \subseteq V$, домножим обе части включения на U слева. В силу монотонности произведения включение сохранится: $U \circ U^k = U^{k+1} \subseteq U \circ V \subseteq V$ (использовали второе включение из (2)). □

Итак, $U^k \subseteq V$ для всех $k = 0,1,2,\ldots$, т.е. $U^* = \bigcup_{k=0,1,\ldots} U^k \subseteq V$. □■

Аналогично, как в теореме 4, можно показать, что рефлексивно-транзитивное замыкание U^* является наименьшим (по теоретико-множественному включению) решением более простого в сравнении с (1) уравнения $X = \Delta_D \cup U \circ X$.

Далее установим структуру множества всех решений уравнения (1), для чего понадобится лемма, обобщающая второе включение из (2).

Лемма 1 (свойства решения уравнения (1)). Если V – решение уравнение (1), то выполняется включение

$$U^k \circ V' \subseteq V \tag{3}$$

для всех $k = 0,1,2,\ldots$ и $V' \subseteq V$. ■

Доказательство проведем индукцией по $k = 0,1,2,\ldots$

Базис проводится очевидным образом с использованием того, что Δ_D – единица по произведению (п. 4 предложения 2). □

Индуктивный шаг проводится аналогично доказательству теоремы 4 (индуктивный шаг для установления включения $U^k \subseteq V$) с использованием второго включения из (2). □■

Теорема 5 (структура множества всех решений уравнения (1)). Отношение вида $U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\ldots} U^k \circ V$ для любого отношения V является решением уравнения (1). Любое решение имеет указанный вид (для подходящего отношения V). ■

Доказательство. Пусть V – произвольное отношение. Покажем, что отношение вида, указанного в теореме 5, является решением уравнения (1). Имеем цепочку равенств:

$$\Delta_D \cup \left(U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\ldots} U^k \circ V \right) \cup U \circ \left(U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\ldots} U^k \circ V \right) =$$

$$= \Delta_D \cup U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\ldots} U^k \circ V \cup \bigcup_{k=0,1,\ldots} U^{k+1} \cup \bigcup_{k=0,1,\ldots} U^{k+1} \circ V =$$

$$= \Delta_D \cup U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\ldots} U^k \circ V \cup \bigcup_{k=1,2,\ldots} U^k \cup \bigcup_{k=1,2,\ldots} U^k \circ V = U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\ldots} U^k \circ V.$$

Во втором переходе воспользовались дистрибутивностью произведения относительно объединений (п. 2 предложения 2). □

Пусть теперь $\hat{V}$ – произвольное решение уравнения (1). Покажем, что оно имеет вид, указанный в доказываемой теореме; т.е. найдем отношение V , такое, что $\hat{V} = U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\ldots} U^k \circ V$. Положим $V = \hat{V} \setminus U^*$ и установим требуемое равенство. Имеем цепочку равенств (учтем, что U^* наименьшее решение уравнения (1) согласно теореме 4):

$$U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\ldots} U^k \circ \left(\hat{V} \setminus U^*\right) = U^* \cup \hat{V} \setminus U^* \cup \bigcup_{k=1,2,\ldots} U^k \circ \left(\hat{V} \setminus U^*\right) = \hat{V} \cup \bigcup_{k=1,2,\ldots} U^k \circ \left(\hat{V} \setminus U^*\right).$$

Таким образом, выполняются два включения $\hat{V} \subseteq \hat{V} \cup \bigcup_{k=1,2,\ldots} U^k \circ \left(\hat{V} \setminus U^*\right) \subseteq \hat{V}$ (последнее включение вытекает из включения (3) в лемме 1), из которых и вытекает требуемое представление решения $\hat{V}$. □■

Отметим, что вместо уравнения (1) можно рассматривать уравнение вида $X = \Delta_D \cup X \cup X \circ U$. При этом аналоги теорем 4-5 имеют место. Отметим также, что относительно простая структура множества всех решений уравнения (1) (теорема 5), вероятно, связана с возрастаемостью оператора, соответствующего правой части этого уравнения.

7. Основные результаты и выводы

В заключение кратко сформулируем основные результаты и выводы, которые они позволяют сделать. В работе на основе свойств инверсии и произведения бинарных отношений (предложения 1, 2) установлены следующие свойства рефлексивно-транзитивного замыкания бинарного отношения:

1) рефлексивно-транзитивное замыкание отношения U является частичным порядком тогда и только тогда, когда $\forall i, j = 1,2,\ldots U^i \cap \left(U^{-1}\right)^j \subseteq \Delta_D$ (теорема 1);

2) оператор построения по отношению его рефлексивно-транзитивного замыкания является монотонным, возрастающим (относительно теоретико-множественного включения) и идемпотентным (предложение 9);

3) рефлексивно-транзитивное замыкание отношения является наименьшим (по теоретико-множественному включению) рефлексивным и транзитивным отношением, содержащим исходное отношение (теорема 2);

4) рефлексивно-транзитивное замыкание отношения порождается диагональю в частичной параметрической алгебре пар вида A_U (теорема 3);

5) рефлексивно-транзитивное замыкание U^* является наименьшим (по теоретико-множественному включению) решением параметрического уравнения $X = \Delta_D \cup X \cup U \circ X$ (теорема 4);

6) все решения уравнения из предыдущего пункта имеют вид $U^* \cup \bigcup_{k=0,1,\ldots} U^k \circ V$ для подходящих отношений V; любое отношение такого вида является решением указанного уравнения (теорема 5).

Из указанных результатов следуют выводы:

1) рефлексивно-транзитивное замыкание отношения является частичным порядком тогда и только тогда, когда граф этого отношения является ациклическим;

2) оператор построения по отношению его рефлексивно-транзитивного замыкания является оператором замыкания относительно теоретико-множественного включения (следствие 5);

3) наряду с явным заданием рефлексивно-транзитивного замыкания имеются и три неявных (денотативных): во-первых, как наименьшего рефлексивного и транзитивного отношения, содержащего исходное отношение (теорема 2); во-вторых, как замыкания диагонали в построенной алгебре пар (теорема 3); в-третьих, как наименьшего решения уравнения (теорема 4) (отметим, что поскольку левая часть характеристического уравнения разрешена относительно переменного, то, по сути, речь идет о наименьшей неподвижной точке оператора, соответствующего правой части этого уравнения, – $X \mapsto \Delta_D \cup X \cup U \circ X$).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Ducournau, M. Habib, M. Huchard, M.L. Mugnier. Proposal for a Monotonic Multiple Inheritance Linearization // OOPSLA '94 Proceedings of the ninth annual conference on Object-oriented programming systems, language, and applications. – 1994. – P. 164-175.
2. R. Ducournau, M. Habib, M. Huchard, M.L. Mugnier. Monotonic conflict resolution mechanisms for inheritance // Proceeding OOPSLA '92 conference proceedings on Object-oriented programming systems, languages, and applications. – 1992. – P.16-24.
3. Michele Simionato. The Python 2.3 Method Resolution Order. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.python.org/download/releases/2.3/mro/.

4. Guido van Rossum. Method Resolution Order – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://python-history.blogspot.com/2010/06/method-resolution-order.html.
5. Par Gaël Pegliasco. Python Tutorial: Understanding Python MRO – Class search path. – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://makina-corpus.com/blog/metier/2014/python-tutorial-understanding-python-mro-class-search-path.
6. D. Buy, J. Karam, S. Kompan, S. Polyakov. Linearization algorithms CLOS and LOOPS of the classes in programming languages: the formal definitions // 13th International Scientific Conference on Informatics. – Poprad, Slovakia, 18-20 Nov., 2015. – P. 63-66 (Print ISBN: 978-1-4673-9867-1, DOI 10.1109/Informatics.2015.7377809).
7. Риге Ж. Бинарные отношения, замыкания, соответствия Галуа // Кибернетический сборник: Сборник переводов. – Москва: Иностранная литература, 1963. – Вып. 7. – С. 129-185.
8. Вагнер В.В. Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и ее приложения (Сборник статей). – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1965. – Вып. 1. – С. 3-178.
9. Общая алгебра. Т. 1 / О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков и др. Под общей редакцией Л.А. Скорнякова. – Москва: Наука, 1990. – 592 с.
10. Биркгоф Г. Теория решеток. – Москва: Наука, 1984. – 568 с.
11. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. – Москва: Мир, 1970. – 416 с.
12. Скорняков Л.А. Элементы теории структур. – Москва: Наука, 1982. – 159 с.
13. Буй Д.Б. Властивості теоретико-множинних конструкцій повного образу та обмеження / Д.Б.Буй, Н.Д.Кахута // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 232-240.
14. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. – Москва: Наука, 1986. – 368 с.

Надійшла – 29.03.2016.