

УДК 519.64, 539.3

## Математическое и компьютерное моделирование в задачах дифракции $P$ - и $SV$ -волн на системе полостей и включений

А. М. Назаренко

*Сумской государственной университет, Украина*

Предлагаются хорошо обусловленные алгоритмы, которые базируются на методе сингулярных интегральных уравнений. Модели описывают задачи дифракции гармонических  $P$ - и  $SV$ -волн на системе цилиндрических полостей и включений в условиях плоской деформации. Численная реализация сингулярных интегральных уравнений проводится методами дискретных особенностей и механических квадратур. Привлечение параллельных вычислений позволяет гибко перенастраивать систему и добиваться высокоточных результатов при различной конфигурации неоднородностей в исследуемых решетках.

**Ключевые слова:** *методы сингулярных интегральных уравнений, решетки из полостей и включений, метод дискретных особенностей, метод механических квадратур, апробация.*

Пропонуються добре обумовлені алгоритми, які базуються на методі сингулярних інтегральних рівнянь. Моделі описують задачі дифракції гармонічних  $P$ - і  $SV$ -хвиль на системі циліндричних порожнин і включень в умовах плоскої деформації. Чисельна реалізація сингулярних інтегральних рівнянь проводиться методами дискретних особливостей і механічних квадратур. Залучення паралельних обчислень дозволяє гнучко перенастроювати систему і добиватися високоточних результатів при різній конфігурації неоднорідностей в досліджуваних решітках.

**Ключові слова:** *методи сингулярних інтегральних рівнянь, решітки з порожнин і включень, метод дискретних особливостей, метод механічних квадратур, апробация.*

It offers well due to the algorithms that are based on the method of singular integral equations. The model describes the problem of diffraction of harmonic  $P$ - and  $SV$ -waves on the system of cylindrical cavities and inclusions in a plane strain. Numerical realization of singular integral equations by the methods of discrete features and mechanical quadrature. Involvement of parallel computing allows the flexibility to reconfigure the system and achieve highly accurate results with a different configuration of inhomogeneities in the studied lattices.

**Key words:** *methods of singular integral equations of the lattice of the cavities and inclusions, the method of discrete singularities, method of mechanical quadrature, approbation.*

### 1. Введение

Современные конструкции, используемые в технике и строительстве, работают в условиях не только статических, но и динамических нагрузок. Для решения инженерных задач, которые возникают при расчете элементов конструкций в условиях динамического нагружения, часто приходится учитывать невозможность проведения эксперимента или привлечение ресурсоемких и дорогостоящих исследований экспериментальными методами. В связи с этим особое значение приобретает математическое и компьютерное моделирование. Вычислительные методы, которые базируются на хорошо обусловленных алгоритмах и естественном параллелизме позволяют гибко перенастраивать систему в зависимости от изменения конфигурации элементов конструкции. Если такие методы эффективно реализованы на современных вычислительных комплексах, то результирующие характеристики напряженно-

деформированного состояния систем с усложненными свойствами могут быть получены с высокой точностью (более  $10^{-8}$  степени). Представленные в работе модели являются развитием и практической апробацией широко известных методов сингулярных интегральных уравнений решения дифракционных задач, но в тех их постановках, которые не могут быть исследованы со столь высокой точностью ни другими численными методами (метод конечных элементов, разностные схемы), ни экспериментальным путем.

Изучение дифракции упругих волн на решетке, составленной из полостей и включений является важным и актуальным [1, 2]. Распространённым методом исследования дифракционных задач на отражателях канонической формы является метод разложения по собственным функциям [3, 4]. При решении динамических задач в случае неоднородной сложной геометрической формы используются также метод  $R$ -функций [5, 6], лучевые методы [7], метод конечных элементов [8], метод граничных интегральных уравнений [9 – 11]. Отметим, что метод интегральных уравнений позволяет использовать эффективные параллельные вычислительные схемы при исследовании взаимодействия упругих волн с несколькими отражателями произвольной формы [12]. Такой подход особенно важен вследствие необходимости привлечения больших объемов вычислений и значительных ресурсов памяти.

В данной работе развивается единый подход, основанный на методе сингулярных интегральных уравнений, к решению задач дифракции плоских гармонических волн на решетках, составленных из цилиндрических полостей, неподвижных, подвижных жестких или упругих включений. Взаимодействие плоских волн с одиночной полостью изучалось в [13], с неподвижным включением – в [14]. В случае подвижного жёсткого включения необходимые дополнительные условия вытекают из законов поступательного и вращательного движения абсолютно жесткого тела [15].

Моделирование контакта на границе упругого включения обычно базируется на условиях типа склейки (непрерывность перемещений и напряжений на поверхности контакта) или на условиях типа проскальзывания (равенство нормальных составляющих тензора напряжений и равенство нулю тангенциальных составляющих на границе раздела двух сред). В [16] показано, что в ряде случаев различие граничных условий (склейка, проскальзывание) не влияет на качественные особенности решения. В [17] методом граничных элементов и итерационными методами исследуются задачи дифракции плоских волн на цилиндрическом круговом включении со смешанными граничными условиями. Здесь учитывается возможность проскальзывания с сухим трением некоторых неизвестных участков границы относительно матрицы. В данной работе на границе включений используются условия контакта типа склейки [10].

Численная реализация возникающих систем сингулярных интегральных уравнений, как и в [18], осуществлялась методами дискретных особенностей [19] и механических квадратур [20]. В случае решеток, составленных из совокупности отверстий и различного типа включений, в дискретных моделях проводилось распараллеливание полученных алгоритмов, что существенно позволило экономить вычислительные ресурсы и тем самым повышать точность вычислений.

## 2. Постановка задачі

Цилиндрическое тело находится в условиях плоской деформации, если оно нагружено по боковой поверхности усилиями, действующими перпендикулярно оси цилиндра. В предположении, что внешнее поле перемещений действует перпендикулярно оси  $Ox_3$ , мы имеем условия плоской деформации. В этом случае перемещение  $u_3$  и компоненты тензора напряжений  $\tau_{13}$  и  $\tau_{23}$  равны нулю, а  $\tau_{33} = \nu(\tau_{11} + \tau_{22})$ , где  $\nu$  – коэффициент Пуассона среды. Таким образом, задача сводится к вычислению перемещений  $u_1, u_2$  и компонент тензора напряжений  $\tau_{mn}$  ( $m, n=1, 2$ ), которые зависят только от координат  $x_1, x_2$ .

Рассмотрим в неограниченной упругой среде систему бесконечных вдоль оси  $Ox_3$  однородных цилиндров, поперечные сечения которых ограничены замкнутыми контурами (без общих точек). Пусть  $L$  – совокупность этих контуров. Совокупность  $L$  разбивает плоскость  $Ox_1x_2$  на две области: внешнюю  $D_1$  и внутреннюю  $D_2$ . Положительное направление обхода на  $L$  выбираем так, чтобы при движении вдоль  $L$  область  $D_1$  оставалась слева. Будем предполагать, что внутренности цилиндров представляют собой полости, неподвижные, подвижные жесткие или упругие включения, и пусть  $\rho_k$  и  $\lambda_k, \mu_k$  – плотности и коэффициенты Ламе матрицы ( $k=1$ ) и упругих включений ( $k=2$ ).

В качестве внешнего воздействия рассматриваем набегающую на цилиндры из бесконечности гармоническую волну расширения-сжатия ( $P$  - случай)

$$U_1^{(0)} = 0, U_2^{(0)} = \tau_1 e^{-i\gamma_1^{(1)} x_2}, \gamma_1^{(1)} = \omega/c_1^{(1)}, \tau_1 = const \quad (1)$$

или сдвига ( $SV$  - случай)

$$U_1^{(0)} = \tau_2 e^{-i\gamma_2^{(1)} x_2}, U_2^{(0)} = 0, \gamma_2^{(1)} = \omega/c_2^{(1)}, \tau_2 = const. \quad (2)$$

Здесь  $c_1^{(1)}$  и  $c_2^{(1)}$  – скорости продольной и поперечной волн в матрице,  $\omega$  – частота колебаний, зависимость от времени  $t$  выражается множителем  $e^{-i\omega t}$ .

При взаимодействии проходящей волны с цилиндрами возникают отраженные и проходящие внутрь цилиндров (если они являются упругими включениями) волны двух типов: продольные и поперечные, причем другие типы волн не образуются. Пусть  $U_1^{(k)}$  и  $U_2^{(k)}$  – амплитуды перемещений отраженного ( $k=1$ ) и проникающего внутрь упругих включений ( $k=2$ ) полей соответственно. Тогда общее поле перемещений  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)'$  равно  $(U_1^{(1)} + U_1^{(0)}, U_2^{(1)} + U_2^{(0)})'$  в матрице и  $(U_1^{(2)}, U_2^{(2)})'$  внутри упругих включений.

В случае плоской деформации амплитуды перемещений  $U_1^{(k)}, U_2^{(k)}$  и компонент  $\sigma_{mn}^{(k)}$  ( $m, n=1, 2$ ) удовлетворяют соотношениям [21]:

$$\begin{aligned} L_{22}^{(k)} U_1^{(k)} + L_{12}^{(k)} U_2^{(k)} &= 0, & L_{21}^{(k)} U_1^{(k)} + L_{11}^{(k)} U_2^{(k)} &= 0, \\ \sigma_{mn}^{(k)} &= \lambda_k \delta_{mn} (U_{1,1}^{(k)} + U_{2,2}^{(k)}) + \mu_k (U_{m,n}^{(k)} + U_{n,m}^{(k)}), \end{aligned} \quad (3)$$

$$L_{mm}^{(k)} = \mu_k \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} + (\lambda_k + 2\mu_k) \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \rho_k \omega^2, \quad j \neq m, \quad L_{12}^{(k)} = L_{21}^{(k)} = (\lambda_k + \mu_k) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

На бесконечности ( $y \rightarrow +\infty$ ) поле рассеянной волны должно удовлетворять условиям излучения, т.е. компоненты  $U_1^{(1)}, U_2^{(1)}$  представляют собой расходящиеся волны [22].

Будем исходить из того, что амплитуды компонент тензора напряжений связаны с амплитудами перемещений формулами [13]

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \sigma_{22} &= 2(\lambda + \mu) \left( \frac{\partial(U_1 + iU_2)}{\partial z} + \frac{\partial(U_1 - iU_2)}{\partial \bar{z}} \right), \\ \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} &= -4\mu \frac{\partial(U_1 - iU_2)}{\partial z}, \quad \sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12} = -4\mu \frac{\partial(U_1 + iU_2)}{\partial \bar{z}} \end{aligned} \quad (4)$$

при соответствующем задании параметров матрицы и включений. Здесь  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\bar{z} = x_1 - ix_2$ , причем  $z \in D_1$ , если выбраны параметры матрицы ( $k = 1$ ) и  $z \in D_2$ , если выбраны параметры упругих включений ( $k = 2$ ).

Введем в рассмотрение вектор  $\mathbf{S} = (S_1, S_2)'$ , где  $S_1$  и  $S_2$  – амплитуды тангенциального и нормального напряжений на  $L$ . В произвольной точке  $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L$  они выражаются через компоненты тензора напряжений следующим образом [13]:

$$\begin{aligned} 2i(S_1 + iS_2) &= (\sigma_{11} + \sigma_{22})e^{i\varphi_0} + (\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12})e^{-i\varphi_0}, \\ -2i(S_1 - iS_2) &= (\sigma_{11} + \sigma_{22})e^{-i\varphi_0} + (\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12})e^{i\varphi_0}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\varphi_0$  – угол положительной касательной  $\mathbf{s}_0$  к  $L$  в точке  $\zeta_0 \in L$  с осью  $Ox_1$  ( $\mathbf{n}_0$  – вектор нормали к  $L$  в точке  $\zeta_0$ ).

На границе цилиндров представляют интерес также распределения амплитуд напряжений

$$\sigma_{n_0} = S_1 \sin \varphi_0 - S_2 \cos \varphi_0, \quad \sigma_{s_0} = \sigma_{11} + \sigma_{22} - \sigma_{n_0}, \quad \sigma_{n_0 s_0} = S_1 \cos \varphi_0 + S_2 \sin \varphi_0. \quad (6)$$

Сформулируем теперь граничные условия для рассматриваемых краевых задач. Будем предполагать, что поперечное сечение каждого цилиндра описывается гладкой замкнутой кривой, параметрическое уравнение которой  $\xi = \xi(s)$ ,  $\eta = \eta(s)$ . Пусть  $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$  – точка  $L$ , в которой мы будем удовлетворять граничные условия.

**1.** На границе раздела двух сред (матрица – упругое включение) моделируем условия контакта типа склейки – непрерывность при переходе через  $L$  вектора перемещений  $\mathbf{U} = (U_1, U_2)'$  и вектора напряжений  $\mathbf{S} = (S_1, S_2)'$ :

$$(U_m^{(1)} + U_m^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} = (U_m^{(2)})_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad (S_m^{(1)} + S_m^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} = (S_m^{(2)})_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad m = 1, 2. \quad (7)$$

Соотношение (7) следует понимать как равенства граничных значений соответствующих величин при стремлении точки наблюдения  $z = x_1 + ix_2 \in D_k$  к точке  $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) из областей  $D_1$  ( $k = 1$ ) и  $D_2$  ( $k = 2$ ).

**2.** Если  $D_2$  – совокупность неподвижных включений, то на  $L$  равны нулю перемещения:

$$(U_m^{(1)} + U_m^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} = 0, \quad z \in D_1, \quad \zeta_0 \in L_j, \quad m = 1, 2, \quad j = \overline{1, M}. \quad (8)$$

3. Если  $D_2$  – совокупность жестких включений, то граничные условия на  $L$  вытекают из уравнений движения абсолютно жесткого тела:

$$(U_1^{(1)} + U_1^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} = B_1^j - \omega_j \eta_0, \quad (U_2^{(1)} + U_2^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} = B_2^j + \omega_j \xi_0, \quad j = \overline{1, M}. \quad (9)$$

Здесь предполагается, что включение  $D_2^j$  перемещается и поворачивается вместе с матрицей;  $B_1^j$  и  $B_2^j$  – амплитуды поступательного движения,  $\omega_j$  – амплитуда жесткого поворота  $j$ -го включения.

В случае (9), используя второй закон Ньютона, можно получить уравнения, которые характеризуют поступательные движения однородных жестких включений:

$$\int_{L_j} S_m ds_0 = -q_j B_m^j, \quad q_j = \omega^2 \rho_s S_s^j, \quad m = 1, 2, \quad j = \overline{1, M}. \quad (10)$$

Уравнения, описывающие вращательные движения включений, имеют вид

$$\int_{L_j} (S_1(\eta_0 - x_{20}) - S_2(\xi_0 - x_{10})) ds_0 = -\omega^2 J_j \omega_j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (11)$$

где  $\rho_s$  – плотность,  $S_s^j$  – площадь,  $J_j$  – момент инерции включения  $D_2^j$  относительно произвольной точки  $A(x_{10}, x_{20})$ .

Дополнительные соотношения (10), (11) необходимо использовать для определения неизвестных постоянных  $B_1^j$ ,  $B_2^j$  и  $\omega_j$ , фигурирующих в (9).

4. Если  $D_2$  – совокупность полостей, то граница  $L$  свободна от сил, и на  $L$  равны нулю компоненты вектора напряжений:

$$(S_m^{(1)} + S_m^{(0)})_{z \rightarrow \zeta_0} = 0, \quad z \in D_1, \quad \zeta_0 \in L_j, \quad m = 1, 2, \quad j = \overline{1, M}. \quad (12)$$

Таким образом, задача дифракции плоской гармонической волны (1) или (2) на системе цилиндров рассмотренных типов в неограниченной упругой среде сводится к решению уравнений движения (3) при выполнении соответствующих краевых условий на  $L$  и дополнительных условий излучения на бесконечности.

### 3. Интегральные представления компонент дифрагированного поля

Предлагаемая методика решения рассматриваемых краевых задач основана на построении интегральных представлений амплитуд перемещений дифрагированного волнового поля, автоматически удовлетворяющих уравнениям движения плоской деформации и обеспечивающих выполнение условий излучения на бесконечности. Следуя [10], представим амплитуды перемещений отраженного ( $k=1$ ) и проходящего внутрь упругих включений ( $k=2$ ) полей в виде потенциалов типа простого слоя:

$$U_m^{(k)}(x_1, x_2) = \int_L (f_1^{(k)}(s) G_{m1}^{(k)}(z, \zeta) + f_2^{(k)}(s) G_{m2}^{(k)}(z, \zeta)) ds, \quad m = 1, 2. \quad (13)$$

Здесь  $f_1^{(k)}(s)$  и  $f_2^{(k)}(s)$  – неизвестные плотности,  $G_{1j}^{(k)}$  и  $G_{2j}^{(k)}$  – функции Грина, представляющие собой амплитуды перемещений  $j$ -го состояния в областях  $D_1$  ( $k=1$ ) и  $D_2$  ( $k=2$ ) в точке  $z = x_1 + ix_2 \in D_k$  при действии гармонической

сосредоточенной силы, приложенной в точке  $\zeta = \xi + i\eta \in L$  и направленной вдоль оси  $Ox_1$  (1-ое состояние) или вдоль оси  $Ox_2$  (2-ое состояние).

Аналогично (3) запишем уравнения  $j$ -го состояния в виде

$$L_{nm}^{(k)} G_{ij}^{(k)} + L_{lm}^{(k)} G_{mj}^{(k)} = -\delta_{ij} \delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta), \quad l \neq m, \quad m, l, j = 1, 2, \quad (14)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\delta(x_1, x_2)$  – функция Дирака.

Соотношениям (14) в областях  $D_1$  и  $D_2$  удовлетворяют матрицы Грина

$$G_{mm}^{(k)} = L_{mm}^{(k)} G^{(k)}, \quad G_{21}^{(k)} = G_{12}^{(k)} = -L_{12}^{(k)} G^{(k)}, \quad m, k = 1, 2 \quad (15)$$

при условии, что функция  $G^{(k)}$  есть решение уравнения ( $\Delta$  – оператор Лапласа)

$$(\Delta + \gamma_1^{(k)^2})(\Delta + \gamma_2^{(k)^2})G^{(k)} = c_k \delta(x_1 - \xi, x_2 - \eta), \quad c_k = -\frac{1}{\mu_k(\lambda_k + 2\mu_k)}. \quad (16)$$

Следовательно, можно положить

$$G^{(k)} = \frac{c_k}{4i} \frac{H_0^{(1)}(\gamma_1^{(k)} r) - H_0^{(1)}(\gamma_2^{(k)} r)}{\gamma_2^{(k)^2} - \gamma_1^{(k)^2}}, \quad z - \zeta = re^{i\alpha}. \quad (17)$$

Здесь  $H_m^{(1)}(x)$  – функция Ханкеля первого рода  $m$ -го порядка.

Компактные выражения компонент тензора амплитуд напряжений (4) получаются, если вместо амплитуд перемещений (13) рассматривать комбинации  $U_1^{(k)} \pm iU_2^{(k)}$  и сделать переход от переменных  $x_1, x_2$  к комплексным переменным  $z = x_1 + ix_2$  и  $\bar{z} = x_1 - ix_2$ . Поэтому целесообразно ввести в рассмотрение новые плотности

$$p_1^{(k)}(s) = f_1^{(k)}(s) + if_2^{(k)}(s), \quad p_2^{(k)}(s) = f_1^{(k)}(s) - if_2^{(k)}(s). \quad (18)$$

После несложных преобразований из (13) получаем

$$U_1^{(k)} + iU_2^{(k)} = \frac{1}{2} \int_L (p_1^{(k)}(s)(G_{11}^{(k)} + G_{22}^{(k)}) - p_2^{(k)}(s)(G_{22}^{(k)} - G_{11}^{(k)} - 2iG_{12}^{(k)})) ds, \quad (19)$$

$$U_1^{(k)} - iU_2^{(k)} = \frac{1}{2} \int_L (-p_1^{(k)}(s)(G_{22}^{(k)} - G_{11}^{(k)} + 2iG_{12}^{(k)}) + p_2^{(k)}(s)(G_{11}^{(k)} + G_{22}^{(k)})) ds.$$

Вычисление указанных в (19) ядер с помощью формул (15) дает:

$$\begin{aligned} G_{11}^{(k)} + G_{22}^{(k)} &= (\lambda_k + 3\mu_k) \Delta G^{(k)} + 2\rho_k \omega^2 G^{(k)} = \frac{t_k}{2\mu_k} \left( \chi_k \frac{\partial^2 G^{(k)}}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{e_k}{4} G^{(k)} \right), \\ G_{22}^{(k)} - G_{11}^{(k)} + 2iG_{12}^{(k)} &= (\lambda_k + \mu_k) \left( \frac{\partial^2 G^{(k)}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 G^{(k)}}{\partial x_2^2} - 2i \frac{\partial^2 G^{(k)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = \frac{t_k}{2\mu_k} \frac{\partial^2 G^{(k)}}{\partial z^2}, \\ G_{22}^{(k)} - G_{11}^{(k)} - 2iG_{12}^{(k)} &= (\lambda_k + \mu_k) \left( \frac{\partial^2 G^{(k)}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 G^{(k)}}{\partial x_2^2} + 2i \frac{\partial^2 G^{(k)}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = \frac{t_k}{2\mu_k} \frac{\partial^2 G^{(k)}}{\partial \bar{z}^2}, \\ \chi_k &= \frac{\lambda_k + 3\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} = 3 - 4\nu_k, \quad e_k = (\chi_k - 1)\gamma_2^{(k)^2}, \quad t_k = 8\mu_k(\lambda_k + \mu_k). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $\nu_k$  – коэффициент Пуассона области  $D_k$ ,  $k = 1, 2$ .

Искомые интегральные представления комбинаций амплитуд перемещений  $U_1^{(k)} \pm iU_2^{(k)}$  принимают вид

$$U_1^{(k)} + iU_2^{(k)} = 2(\lambda_k + \mu_k) \int_L \left( p_1^{(k)}(s) \left( \chi_k \frac{\partial^2 G^{(k)}}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{e_k}{4} G^{(k)} \right) - p_2^{(k)}(s) \frac{\partial^2 G^{(k)}}{\partial \bar{z}^2} \right) ds, \quad (21)$$

$$U_1^{(k)} - iU_2^{(k)} = 2(\lambda_k + \mu_k) \int_L \left( -p_1^{(k)}(s) \frac{\partial^2 G^{(k)}}{\partial z^2} + p_2^{(k)}(s) \left( \chi_k \frac{\partial^2 G^{(k)}}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{e_k}{4} G^{(k)} \right) \right) ds.$$

Теперь, используя (21), можно записать также фигурирующие в (4) комбинации компонент тензора амплитуд напряжений. Имеем

$$\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} = t_k \int_L \left( p_1^{(k)}(s) \left( \frac{\partial^3 G^{(k)}}{\partial z^2 \partial \bar{z}} + \frac{\gamma_2^{(k)2}}{4} \frac{\partial G^{(k)}}{\partial z} \right) + p_2^{(k)}(s) \left( \frac{\partial^3 G^{(k)}}{\partial z \partial \bar{z}^2} + \frac{\gamma_2^{(k)2}}{4} \frac{\partial G^{(k)}}{\partial \bar{z}} \right) \right) ds,$$

$$\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{11}^{(k)} + 2i\sigma_{12}^{(k)} = t_k \int_L \left( p_1^{(k)}(s) \frac{\partial^3 G^{(k)}}{\partial z^3} - p_2^{(k)}(s) \left( \chi_k \frac{\partial^3 G^{(k)}}{\partial z^2 \partial \bar{z}} + \frac{e_k}{4} \frac{\partial G^{(k)}}{\partial z} \right) \right) ds, \quad (22)$$

$$\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{11}^{(k)} - 2i\sigma_{12}^{(k)} = t_k \int_L \left( -p_1^{(k)}(s) \left( \chi_k \frac{\partial^3 G^{(k)}}{\partial z \partial \bar{z}^2} + \frac{e_k}{4} \frac{\partial G^{(k)}}{\partial \bar{z}} \right) + p_2^{(k)}(s) \frac{\partial^3 G^{(k)}}{\partial \bar{z}^3} \right) ds.$$

Для вычисления указанных в (21) и (22) производных функции  $G^{(k)}$  (17) воспользуемся известными соотношениями:

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} H_0^{(1)}(\gamma r) = \left( -\frac{\gamma}{2} \right)^n e^{-i n \alpha} H_n^{(1)}(\gamma r), \quad \frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} H_0^{(1)}(\gamma r) = \left( -\frac{\gamma}{2} \right)^n e^{i n \alpha} H_n^{(1)}(\gamma r), \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma^2}{4} H_0^{(1)}(\gamma r).$$

Использование (23) применительно к функции  $G^{(k)}$  (17) приводит к следующим выражениям для комбинаций (21) амплитуд перемещений дифрагированного волнового поля в областях  $D_1$  и  $D_2$ :

$$U_1^{(k)} + iU_2^{(k)} = h_k \int_L \left( p_1^{(k)}(s) (\chi_k \phi_{20}^{(k)} - e_k \phi_{00}^{(k)}) + p_2^{(k)}(s) e^{2i\alpha} \phi_{22}^{(k)} \right) ds,$$

$$U_1^{(k)} - iU_2^{(k)} = h_k \int_L \left( p_1^{(k)}(s) e^{-2i\alpha} \phi_{22}^{(k)} + p_2^{(k)}(s) (\chi_k \phi_{20}^{(k)} - e_k \phi_{00}^{(k)}) \right) ds, \quad (24)$$

$$\phi_{lm}^{(k)} = \frac{\gamma_1^{(k)l} H_m^{(1)}(\gamma_1^{(k)} r) - \gamma_2^{(k)l} H_m^{(1)}(\gamma_2^{(k)} r)}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}, \quad d_k = \frac{i}{16(1 - \nu_k)}, \quad h_k = \frac{d_k}{\mu_k}.$$

Анализ ядер, присутствующих в интегральных представлениях (24), показывает, что функции  $\phi_{00}^{(k)}(r)$  и  $\phi_{22}^{(k)}(r)$  непрерывны в нуле, а функция  $\phi_{20}^{(k)}(r)$  имеет в нуле логарифмическую особенность:

$$\phi_{20}^{(k)}(r) = \frac{2i}{\pi} \ln r + F_{20}^{(k)}(r), \quad (25)$$

где  $F_{20}^{(k)}(r)$  – непрерывная функция.

Аналогично для комбинаций (22) компонент тензора амплитуд напряжений получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} &= -2d_k \int_L \left( \phi_{31}^{(k)} - \gamma_2^{(k)2} \phi_{11}^{(k)} \right) \left( p_1^{(k)}(s) e^{-i\alpha} + p_2^{(k)}(s) e^{i\alpha} \right) ds, \\
\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{11}^{(k)} + 2i\sigma_{12}^{(k)} &= 2d_k \int_L \left( p_1^{(k)}(s) \phi_{33}^{(k)} e^{-3i\alpha} + p_2^{(k)}(s) (\chi_k \phi_{31}^{(k)} - e_k \phi_{11}^{(k)}) e^{-i\alpha} \right) ds, \\
\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{11}^{(k)} - 2i\sigma_{12}^{(k)} &= 2d_k \int_L \left( p_1^{(k)}(s) (\chi_k \phi_{31}^{(k)} - e_k \phi_{11}^{(k)}) e^{i\alpha} + p_2^{(k)}(s) \phi_{33}^{(k)} e^{3i\alpha} \right) ds.
\end{aligned} \tag{26}$$

Здесь функция  $\phi_{11}^{(k)}(r)$  непрерывна, а функции  $\phi_{31}^{(k)}(r)$  и  $\phi_{33}^{(k)}(r)$  имеют в нуле особенность типа Коши:

$$\phi_{31}^{(k)}(r) = \frac{2}{i\pi r} + F_{31}^{(k)}(r), \quad \phi_{33}^{(k)}(r) = \frac{2}{i\pi r} + F_{33}^{(k)}(r). \tag{27}$$

Таким образом, амплитуды перемещений и компонент тензора напряжений дифрагированного волнового поля вычислены. Теперь можно удовлетворять граничные условия на контурах неоднородностей рассматриваемых типов.

На совокупности  $L$  замкнутых гладких контуров  $L_l$  ( $l = \overline{1, M}$ ) проведем параметризацию каждого контура по формулам

$$\xi = \xi(\beta), \quad \eta = \eta(\beta), \quad \zeta = \xi + i\eta = \zeta(\beta), \quad \zeta(\beta + 2\pi) = \zeta(\beta), \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \tag{28}$$

Подставляя в (24) вместо  $z \in D_k$  переменную  $\zeta_0 = \zeta(\beta_0^j) \in L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ), получим значения комбинаций  $U_1^{(k)} \pm iU_2^{(k)}$  на  $L$  со стороны матрицы ( $k=1$ ) и со стороны упругих включений ( $k=2$ ). При этом в (24) следует положить  $\zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0}$ . В силу (25), если  $\zeta_0 = \zeta(\beta_0^j)$  и  $\zeta = \zeta(\beta^j)$ , т.е. точки  $\zeta_0$  и  $\zeta$  принадлежат одному контуру  $L_j$ , ядро  $\phi_{20}^{(k)}(r_0)$  имеет логарифмическую особенность, которую в случае замкнутых контуров запишем в виде

$$\phi_{20}^{(k)}(r_0) = \frac{2i}{\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0}{2} \right| + F_{20}^{(k)}(\beta_0, \beta), \quad \zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0}. \tag{29}$$

Здесь ядро  $F_{20}^{(k)}(\beta_0, \beta)$  непрерывно, причем

$$F_{20}^{(k)}(\beta, \beta) = -1 - \frac{2i}{\pi} (C + \ln(\gamma_k \frac{ds}{d\beta})), \quad C = 0,5772156.. \tag{30}$$

Отметим также [11], что

$$\int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0}{2} \right| d\beta_0 = -2\pi \ln 2. \tag{31}$$

Итак, удовлетворение граничных условий по перемещениям на контурах включений приводит к интегральным уравнениям с логарифмическими ядрами (их число равно  $2M$ ). В данной работе краевые задачи сводятся к системам сингулярных интегральных уравнений.

С целью получения сингулярных интегральных уравнений 1-го рода граничные условия по перемещениям следует продифференцировать по дуговой координате  $s_0 \in L_j$ , используя равенство

$$\frac{dU}{ds_0} \Big|_{L_j} = \left( \frac{\partial U}{\partial z} e^{i\varphi_0} + \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} e^{-i\varphi_0} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}, \quad e^{i\varphi_0} = \frac{d\zeta_0}{ds_0}, \quad \zeta_0 \in L_j, \quad j = \overline{1, M}. \tag{32}$$



Эквивалентность краевых задач с граничными условиями по перемещениям и модифицированными граничными условиями с использованием (32) будет соблюдаться, если к последним присовокупить  $2M$  дополнительных условий. Учитывая интегрируемость логарифмической особенности в равенстве (29) в явном виде с помощью формулы (31), указанные дополнительные условия целесообразно записывать в интегральной форме.

1. В случае упругих включений из равенства амплитуд перемещений на границе раздела двух сред (7) вытекают равенства средних значений амплитуд перемещений, на  $L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ), которые запишем в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U_1^{(1)} \pm iU_2^{(1)} + U_1^{(0)} \pm iU_2^{(0)}) d\beta_0^j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U_1^{(2)} \pm iU_2^{(2)}) d\beta_0^j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (33)$$

Здесь подынтегральные выражения являются функциями переменной  $\zeta_0 \in L_j$  и комбинации  $U_1^{(k)} \pm iU_2^{(k)}$  ( $k=1, 2$ ) вычисляются согласно (24), где интегрирование осуществляется по  $L$ , т.е. совокупность контуров  $L_l$  ( $l = \overline{1, M}$ ).

2. Если  $D_2$  – совокупность неподвижных включений, то из равенства нулю амплитуд перемещений на  $L_j$  (8) следуют равенства нулю средних значений амплитуд перемещений на  $L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ), т.е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U_1 \pm iU_2) d\beta_0^j = 0, \quad j = \overline{1, M}. \quad (34)$$

3. Интегрирование граничных условий (9) на контурах подвижных жестких включений, аналогично (34), позволяет представить амплитуды  $B_1^j$  и  $B_2^j$  поступательного движения  $j$ -го включения ( $j = \overline{1, M}$ ) в интегральной форме:

$$B_1^j \pm iB_2^j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U_1 \pm iU_2) d\beta_0^j \mp i\omega_j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi_0 \pm i\eta_0) d\beta_0^j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (35)$$

Тогда интегральная форма дополнительных условий (10) приобретает вид

$$\int_{L_j} (S_1 \pm iS_2) ds_0 + \frac{q_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U_1 \pm iU_2) d\beta_0^j = \pm i\omega_j \frac{q_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi_0 \pm i\eta_0) d\beta_0^j, \quad j = \overline{1, M}. \quad (36)$$

Необходимые дополнительные условия для определения амплитуд  $\omega_j$  жесткого поворота включений вытекают из (11). Запишем их в виде ( $j = \overline{1, M}$ ):

$$\frac{1}{2i} \int_{L_j} ((S_1 + iS_2)(\bar{\zeta}_0 - \bar{z}_0) - (S_1 - iS_2)(\zeta_0 - z_0)) ds_0 = \omega^2 J_j \omega_j, \quad z_0 = x_{10} + ix_{20}, \quad j = \overline{1, M}. \quad (37)$$

#### 4. Сведение краевых задач к сингулярным интегральным уравнениям

1. При вычислении производных комбинаций  $U_1^{(k)} \pm iU_2^{(k)}$  (21) по дуговой координате  $s_0 \in L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) используем равенство (32). Необходимые производные  $\frac{\partial}{\partial z} (U_1^{(k)} \pm iU_2^{(k)})$  и  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (U_1^{(k)} \pm iU_2^{(k)})$  нами были получены при вычислении комбинаций амплитуд компонент тензора напряжений (4) в виде

интегральных представлений (22). Дифференцирование по  $s_0 \in L_j$  граничных условий типа склейки для  $U_1 \pm iU_2$  на контурах упругих включений должно привести к  $2M$  сингулярным интегральным уравнениям 1-го рода [10].

Приравнивание на границе раздела двух сред комбинаций амплитуд напряжений  $S_1 \pm iS_2$  осуществляется путем подстановки интегральных представлений (26) в выражение (5) для комбинаций  $S_1^{(k)} \pm iS_2^{(k)}$  и последующим предельным переходом при  $z \rightarrow \zeta_0 \in L_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ) из областей  $D_1$  ( $k = 1$ ) и  $D_2$  ( $k = 2$ ). Такая процедура должна привести к  $2M$  сингулярным интегральным уравнениям 2-го рода [13].

При фиксированном контуре  $L_j$  соответствующие ему четыре интегральных уравнения умножаем на значение производной  $s'_0 = ds_0/d\beta_0$  на этом контуре. Искомая система  $4M$  сингулярных интегральных уравнений приобретает вид (суммирование по  $n = 1, 2$ ):

$$\int_L (p_n^{(1)}(\beta)B_{mn}^{(1)}(\beta_0^j, \beta) - p_n^{(2)}(\beta)B_{mn}^{(2)}(\beta_0^j, \beta))d\beta = N_m(\beta_0^j), \quad m = 1, 2, \quad j = \overline{1, M}, \quad (38)$$

$$\frac{1}{2} p_m^{(1)}(\beta_0^j) + \frac{1}{2} p_m^{(2)}(\beta_0^j) + \int_L (p_n^{(1)}(\beta)C_{mn}^{(1)}(\beta_0^j, \beta) - p_n^{(2)}(\beta)C_{mn}^{(2)}(\beta_0^j, \beta))d\beta = T_m(\beta_0^j),$$

$$B_{11}^{(k)} = B_{22}^{(k)} = -h_k(\chi_k \phi_{31}^{(k)} - e_k \phi_{11}^{(k)}) \operatorname{Re}(\zeta'_0 e^{-i\alpha_0}), \quad p_n^{(k)}(\beta) = p_n^{(k)}(s(\beta))s'(\beta),$$

$$B_{12}^{(k)} = \frac{h_k}{2}(\phi_{31}^{(k)} \zeta'_0 e^{i\alpha_0} - \phi_{33}^{(k)} \overline{\zeta'_0} e^{3i\alpha_0}), \quad B_{21}^{(k)} = \frac{h_k}{2}(\phi_{31}^{(k)} \overline{\zeta'_0} e^{-i\alpha_0} - \phi_{33}^{(k)} \zeta'_0 e^{-3i\alpha_0}),$$

$$C_{11}^{(k)} = id_k(a_k \phi_{31}^{(k)} - b_k \phi_{11}^{(k)}), \quad C_{12}^{(k)} = id_k\left(\left(\phi_{31}^{(k)} - \gamma_2^{(k)2} \phi_{11}^{(k)}\right) \zeta'_0 e^{i\alpha_0} - \phi_{33}^{(k)} \overline{\zeta'_0} e^{3i\alpha_0}\right),$$

$$C_{22}^{(k)} = id_k(\overline{a_k} \phi_{31}^{(k)} - \overline{b_k} \phi_{11}^{(k)}), \quad C_{21}^{(k)} = id_k\left(\left(\overline{\phi_{31}^{(k)}} - \gamma_2^{(k)2} \overline{\phi_{11}^{(k)}}\right) \overline{\zeta'_0} e^{-i\alpha_0} - \overline{\phi_{33}^{(k)}} \zeta'_0 e^{-3i\alpha_0}\right),$$

$$a_k = \zeta'_0 e^{-i\alpha_0} - \chi_k \overline{\zeta'_0} e^{i\alpha_0}, \quad b_k = \gamma_2^{(k)2} (\zeta'_0 e^{-i\alpha_0} - (\chi_k - 1) \overline{\zeta'_0} e^{i\alpha_0}),$$

$$N_2 = -N_1 = \gamma_1^{(1)} \tau_1 \eta'_0 e^{-i\gamma_1^{(1)} \eta_0}, \quad T_m = \frac{2\mu_1 \gamma_1^{(1)} \tau_1}{1 - 2\nu_1} e^{-i\gamma_1^{(1)} \eta_0} (i\nu_1 \eta'_0 - (-1)^m (1 - \nu_1) \zeta'_0) \quad \text{в } P\text{-случае,}$$

$$N_m = i\gamma_2^{(1)} \tau_2 \eta'_0 e^{-i\gamma_2^{(1)} \eta_0}, \quad T_m = -i\mu_1 \gamma_2^{(1)} \tau_2 q_m e^{-i\gamma_2^{(1)} \eta_0}, \quad q_1 = \overline{\zeta'_0}, \quad q_2 = \zeta'_0 \quad \text{в } SV\text{-случае.}$$

Здесь, если точки  $\zeta$  и  $\zeta_0$  принадлежат одному контуру, то, как нетрудно показать, пользуясь соотношениями (27) для функций  $\phi_{31}^{(k)}(r_0)$  и  $\phi_{33}^{(k)}(r_0)$ , ядра  $B_{mn}^{(k)}$  и  $C_{mn}^{(k)}$  становятся сингулярными. Ядра  $B_{mn}$  и  $C_{mn}$  ( $n \neq m$ ) непрерывны при любом расположении точек  $\zeta$  и  $\zeta_0$ . В случае  $\zeta, \zeta_0 \in L_j$ , возникают внеинтегральные плотности в выражениях для  $S_1^{(k)} \pm iS_2^{(k)}$  и, следовательно, получаются сингулярные интегральные уравнения 2-го рода при приравнивании соответствующих комбинаций амплитуд напряжений на  $L_j$ .

Для однозначной разрешимости сингулярных интегральных уравнений 1-го рода в (38) к ним необходимо присовокупить  $2M$  дополнительных условий. Они вытекают из условий равенства средних значений комбинаций  $U_1 \pm iU_2$  на границе раздела двух сред. Эти условия имеют вид (33), где комбинации

$U_1^{(k)} \pm iU_2^{(k)}$  знаходяться из інтегральних представлень (24). Воспользуемся соотношением (29). Тогда, учитывая равенство (31), получим следующий вид дополнительных условий (суммирование по  $n = 1, 2$ ):

$$\int_L (p_n^{(1)}(\beta)A_{mm}^{(1)}(\beta) - p_n^{(2)}(\beta)A_{mm}^{(2)}(\beta))d\beta = M_m^j, \quad m = 1, 2, \quad j = \overline{1, M}, \quad (39)$$

$$A_{mm}^{(k)} = h_k (-4i\chi_k \delta_{lj} \ln 2 + \int_0^{2\pi} (\chi_k (\phi_{20}^{(k)} - \frac{2i}{\pi} \delta_{lj} \ln |\sin \frac{\beta - \beta_0^j}{2}|) - e_k \phi_{00}^{(k)}) d\beta_0^j),$$

$$A_{mm}^{(k)} = h_k \int_0^{2\pi} \phi_{22}^{(k)} e^{(-1)^n 2i\alpha_0} d\beta_0^j, \quad n \neq m, \quad M_2^j = -M_1^j = i\tau_1 \int_0^{2\pi} e^{-i\gamma_1^{(1)} \eta_0} d\beta_0^j \quad \text{в } P\text{-случае,}$$

$$M_2^j = M_1^j = \tau_2 \int_0^{2\pi} e^{-i\gamma_2^{(1)} \eta_0} d\beta_0^j \quad \text{в } SV\text{-случае.}$$

2. Если  $D_2$  – совокупность неподвижных включений, то нетрудно заметить, что искомые сингулярные интегральные уравнения 1-го рода и необходимые для их разрешимости дополнительные условия вытекают из (38) и (39), если в них положить  $p_1^{(2)}(\beta) = p_2^{(2)}(\beta) = 0$ . Имеем (суммирование по  $n = 1, 2$ ):

$$\int_L p_n^{(1)}(\beta)B_{mm}^{(1)}(\beta_0^j, \beta)d\beta = N_m(\beta_0^j), \quad (40)$$

$$\int_L p_n^{(1)}(\beta)A_{mm}^{(1)}(\beta)d\beta = M_m^j, \quad m = 1, 2, \quad j = \overline{1, M}. \quad (41)$$

3. В случае подвижных жестких включений модифицированные граничные условия на  $L_j$  для комбинаций  $U_1 \pm iU_2$  приводят к следующей системе сингулярных интегральных уравнений 1-го рода (суммирование по  $n = 1, 2$ ):

$$\int_L p_n^{(1)}(\beta)B_{mm}^{(1)}(\beta_0^j, \beta)d\beta + \omega_j Q_m(\beta_0^j) = N_m(\beta_0^j), \quad Q_1 = i\zeta_0', \quad Q_2 = -i\zeta_0'. \quad (42)$$

Здесь в каждом уравнении ( $m = 1, 2$ ) неизвестной также является амплитуда жесткого поворота  $j$ -го включения  $\omega_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ).

Необходимые дополнительные условия для разрешимости сингулярных интегральных уравнений (42) вытекает из (36). Они имеют вид (суммирование по  $n = 1, 2$ ):

$$\int_L p_n^{(1)}(\beta)D_{mm}^{(1)}(\beta)d\beta + \omega_j R_m^j = F_m^j, \quad m = 1, 2, \quad j = \overline{1, M}, \quad (43)$$

$$D_{mm}^{(1)} = \frac{1}{2} \delta_{mm} \delta_{lj} - \int_0^{2\pi} C_{mm}^{(1)}(\beta_0^j, \beta)d\beta_0^j + \frac{q_j}{2\pi} A_{mm}^{(1)}(\beta),$$

$$R_m^j = (-1)^m i \frac{q_j}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\xi_0 - (-1)^m i \eta_0) d\beta_0^j, \quad F_m^j = - \int_0^{2\pi} T_m(\beta_0^j) d\beta_0^j + \frac{q_j}{2\pi} M_m^j.$$

Для замыкания алгоритма запишем также дополнительные условия, необходимые для определения амплитуд  $\omega_j$  ( $j = \overline{1, M}$ ). Из (37) находим (суммирование по  $n = 1, 2$ ):

$$\int_L (p_1^{(1)}(\beta)K_{1n}^{(1)}(\beta) - p_2^{(1)}(\beta)K_{2n}^{(1)}(\beta))d\beta + \omega_j Q^j = E^j, \quad j = \overline{1, M}, \quad (44)$$

$$K_{1n}^{(1)} = \frac{1}{2} \delta_{1n} \delta_{lj} (\bar{\zeta} - \bar{z}_0) - \int_0^{2\pi} C_{1n}^{(1)}(\beta_0^j, \beta) (\bar{\zeta} - \bar{z}_0) d\beta_0^j,$$

$$K_{2n}^{(1)} = \frac{1}{2} \delta_{2n} \delta_{lj} (\zeta - z_0) - \int_0^{2\pi} C_{2n}^{(1)}(\beta_0^j, \beta) (\zeta - z_0) d\beta_0^j,$$

$$E^j = -2i \int_0^{2\pi} (T_1(\beta_0^j)(\bar{\zeta}_0 - \bar{z}_0) - T_2(\beta_0^j)(\zeta_0 - z_0)) d\beta_0^j, \quad Q^j = -2i\omega^2 J_j.$$

4. В случае системы полостей возникают сингулярные интегральные уравнения 2-го рода, которые следуют из соответствующих интегральных уравнений в (38) при  $\mu_2 = 0$ . Они имеют вид (суммирование по  $n = 1, 2$ ):

$$\frac{1}{2} p_m^{(1)}(\beta_0^j) + \int_L p_n^{(1)}(\beta) C_{mn}^{(1)}(\beta_0^j, \beta) d\beta = T_m(\beta_0^j), \quad m = 1, 2, \quad j = \overline{1, M}. \quad (45)$$

### 5. Численная реализация построенных алгоритмов

Полученные системы сингулярных интегральных уравнений численно решались двумя способами: методом дискретных особенностей [19] и методом механических квадратур [20]. На всех замкнутых контурах выбиралось нечетное число узлов  $N = 2n + 1$ . Получение соответствующих систем линейных алгебраических уравнений осуществлялось точно также, как и в [18]. Точность вычислений проверялась путем сравнения результатов при различных значениях  $N$ . В случае рассматриваемого класса дифракционных задач метод дискретных особенностей и метод механических квадратур имеют практически одинаковую эффективность и сходятся к заданной точности приблизительно при одном и том же количестве узлов на контурах неоднородностей. Обусловленность матриц при этом проверялась на основании алгоритмов, описанных в [23, 24].

В случае решеток, составленных из нескольких отражателей, применялось распараллеливание алгоритма [25] по схеме [12]. Для всех рассмотренных решеток достаточно около 1000 точек коллокации на замкнутых контурах, чтобы контурные напряжения вычислялись с точностью  $10^{-8}$ . Применение метода параллельных вычислений, проведенного на кластере «Инпарк-256» показало, что сходимость решений систем линейных алгебраических уравнений практически не зависит от количества неоднородностей в решетке.

В качестве примеров рассмотрим прикладные задачи о распределении контурных напряжений  $\sigma_n, \sigma_s, \sigma_{ns}$  (6) на решетке, состоящей из эллиптических или ромбических отверстий и включений, поочередно расположенных в упругой среде на одинаковом расстоянии  $d$  один от другого и ориентированных вдоль оси  $Ox_1$  (рис. 1).

Используем известные [26] параметрические уравнения для задания основного контура  $L_0$ :

$$\xi(\beta) = a(\sin \beta - \nu \sin 3\beta), \quad \eta(\beta) = -b(\cos \beta + \nu \cos 3\beta), \quad \beta \in [0, 2\pi]. \quad (46)$$

Здесь при  $\nu/a=0,14036$  контур  $L_0$  имеет вид ромба со скругленными точками возврата, а при  $\nu=0$  контур  $L_0$  превращается в эллипс с полуосями  $a$  и  $b$ . Остальные контуры будем располагать симметрично относительно оси  $Ox_2$ . В этом случае задачи дифракции продольной (1) и поперечной (2) волн на указанной решетке обладают свойством симметрии, что позволяет осуществлять первичное самотестирование получаемых результатов.

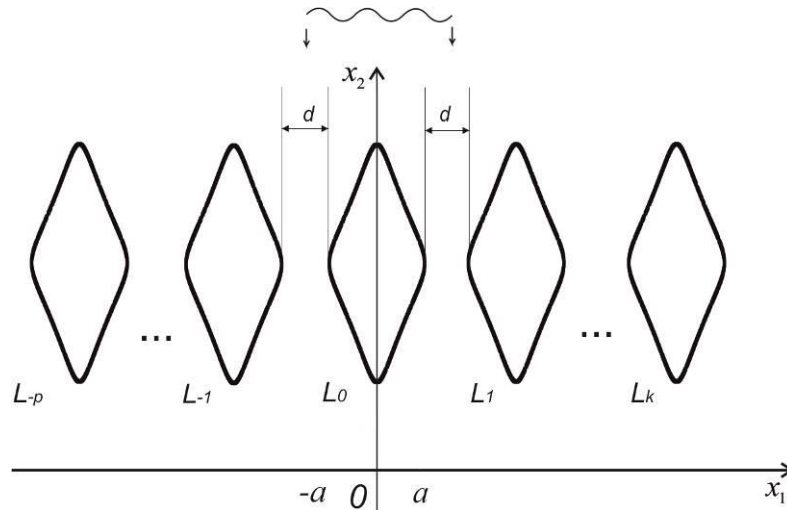


Рис. 1. Система ромбических отверстий или включений в упругой среде

В ходе численной реализации на контурах неоднородностей (со стороны матрицы) вычислялись безразмерные напряжения путем деления соответствующих контурных напряжений (6) на максимальное значение напряжения в падающей волне, равное  $\tau_1 \gamma_1 (\lambda_1 + 2\mu_1)$  в случае излучения  $P$ -волны (1) и  $\tau_2 \gamma_2^{(1)} \mu_1$  – в случае излучения  $SV$ -волны (2).

Отметим, что задачи дифракции плоских гармонических волн на решетках малоисследованы. Автору известны численные результаты лишь в случае одиночных неоднородностей. Особенностью метода сингулярных интегральных уравнений является то, что он допускает различные предельные переходы. Поэтому с целью тестирования полученных алгоритмов рассмотрим сначала предельный переход  $d \rightarrow \infty$ . Здесь возможны сравнения рассчитываемых контурных напряжений на границе одиночного эллиптического отверстия [9] и эллиптического упругого включения [16]. Кроме того, многочисленные кривые, характеризующие распределения контурных напряжений на границе одиночных эллиптических отверстия, неподвижного, подвижного жесткого и упругого включений получены с участием автора в работах [10, 13–15].

**Предельный переход при  $d \rightarrow \infty$  в решётке, составленной из пяти упругих включений.** На контурах упругих включений рассчитываются безразмерные контурные напряжения  $\sigma_n, \sigma_s, \sigma_{ns}$ . Расчеты показывают, что значения этих напряжений на контуре центрального включения с точностью

$10^{-3}$  совпадають с аналогічними значеннями на контуре одиночного упруого включення при значительном удалении элементов решетки друг от друга (отношение  $d/a$  порядка  $10^6$ ). На рис. 2, 3 и рис. 4, 5 представлены результаты расчетов напряжений на контурах эллиптического и ромбического упруого включення  $L_0$  ( $b/a=2$ ,  $\mu_1/\mu_2=2$ ,  $\rho_1/\rho_2=2$ ,  $\nu_1=\nu_2=0,3$ ). Кривые 1, 2, 3 и 4 отвечают значениям параметра  $\gamma_1 a$ , равным 0,4; 0,7; 1,0 и 1,3.

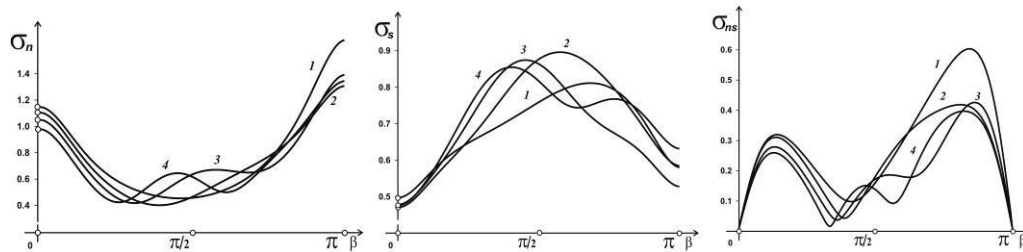


Рис. 2. Распределения напряжений на контуре эллиптического упруого включення в случае излучения P-волны

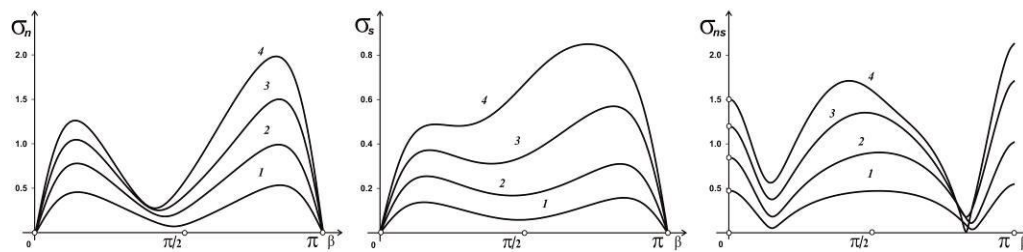


Рис. 3. Распределения напряжений на контуре эллиптического упруого включення в случае излучения SV-волны

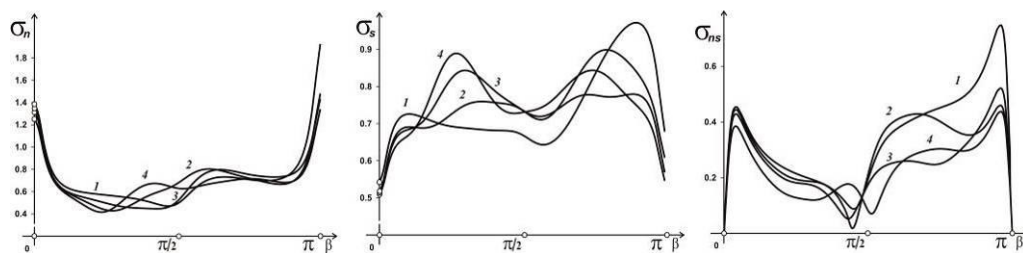


Рис. 4. Распределения напряжений на контуре ромбического упруого включення в случае излучения P-волны

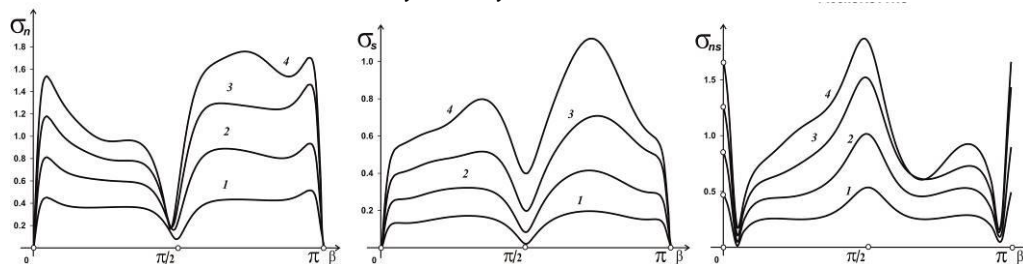


Рис. 5. Распределения напряжений на контуре ромбического упруого включення в случае излучения SV-волны

Расчеты показывают, что в  $P$ -случае максимальными являются напряжения  $\sigma_n$ , которые достигаются в лобовой точке ( $\beta = \pi$ ). В  $SV$ -случае на границе раздела двух сред преобладающими могут быть напряжения  $\sigma_{ns}$ ; напряжения  $\sigma_n$  и  $\sigma_s$  вблизи теневой ( $\beta = 0$ ) и лобовой ( $\beta = \pi$ ) точек близки к нулю.

**Предельный переход при  $d \rightarrow \infty$  в решётке составленной, из пяти подвижных жестких включений.** На контурах жестких включений рассчитываются безразмерные напряжения  $\sigma_n$ ,  $\sigma_{ns}$ . Напряжение  $\sigma_s$  всегда меньше  $\sigma_n$  и нетрудно показать, что они связаны соотношением  $\sigma_s = \sigma_n v_1 / (1 - v_1)$ . Здесь также значения напряжений на контуре центрального включения с точностью  $10^{-3}$  совпадают с аналогичными значениями на контуре одиночного жесткого включения при  $d/a$  порядка  $10^6$ . Рис. 6, 7 и рис. 8, 9 иллюстрируют изменения напряжений на контурах эллиптического и ромбического жесткого включения  $L_0$  ( $b/a = 2$ ,  $\rho_1/\rho_2 = 2$ ,  $v_1 = 0,3$ ). Кривые 1, 2, 3 и 4 отвечают значениям параметра  $\gamma_1 a$ , равным 0,4; 0,7; 1,0 и 1,3.

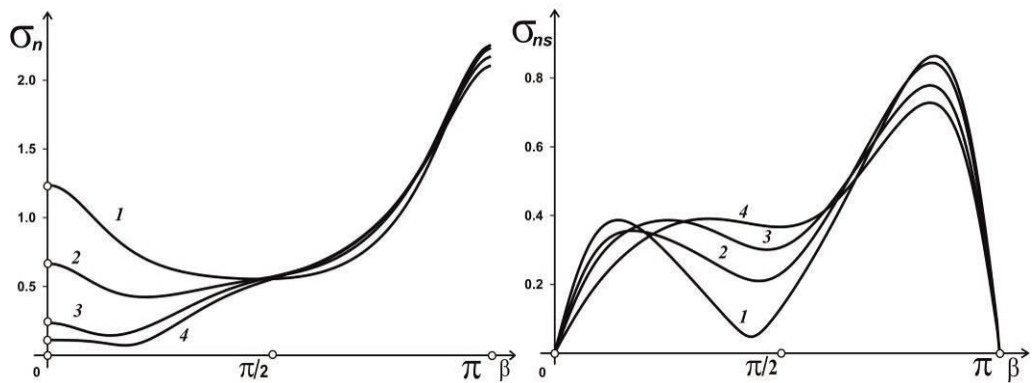


Рис. 6. Распределения напряжений на контуре эллиптического жесткого включения в случае излучения  $P$ -волны

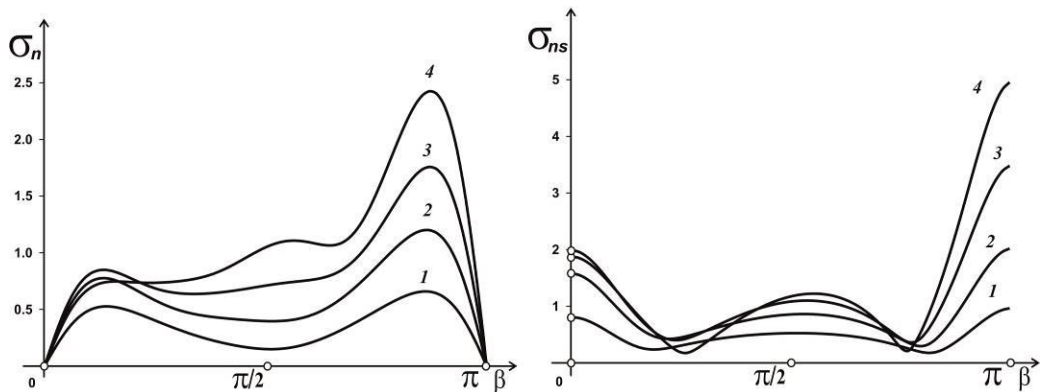


Рис. 7. Распределения напряжений на контуре эллиптического жесткого включения в случае излучения  $SV$ -волны

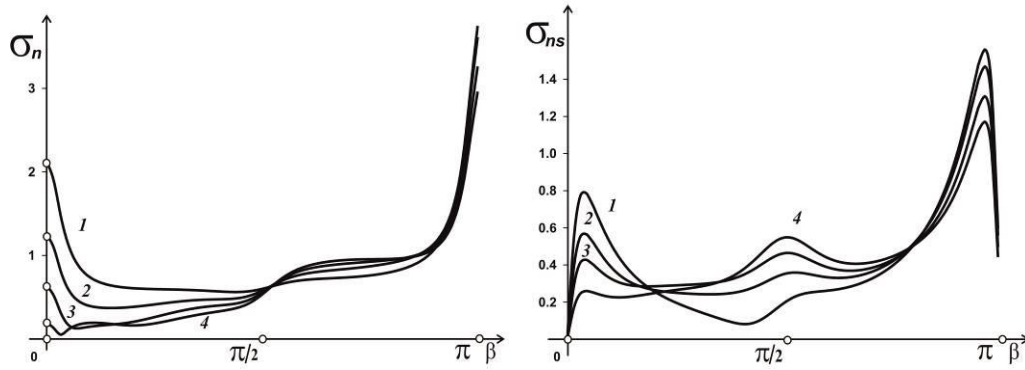


Рис. 8. Распределения напряжений на контуре ромбического жесткого включения в случае излучения  $P$ -волны

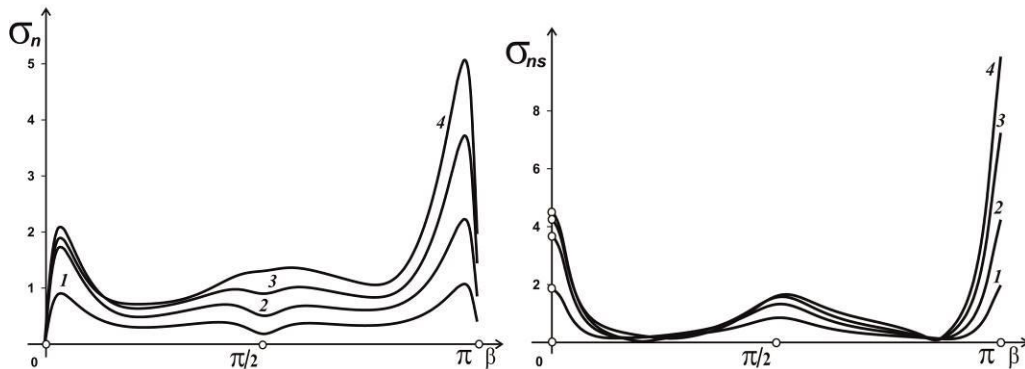


Рис. 9. Распределения напряжений на контуре ромбического жесткого включения в случае излучения  $SV$ -волны

Расчеты показывают, что, как и в случае одиночного упругого включения, при излучении  $P$ -волны максимальными являются напряжения  $\sigma_n$ , которые достигаются в лобовой точке ( $\beta = \pi$ ); напряжения  $\sigma_{ns}$  вблизи теневой ( $\beta = 0$ ) и лобовой ( $\beta = \pi$ ) точек близки к нулю. В  $SV$ -случае, наоборот, преобладающими являются напряжения  $\sigma_{ns}$ ; напряжения  $\sigma_n$  вблизи теневой ( $\beta = 0$ ) и лобовой ( $\beta = \pi$ ) точек близки к нулю.

**Предельный переход при  $d \rightarrow \infty$  в решётке составленной, из пяти отверстий.** На контурах отверстий рассчитываются безразмерные напряжения  $\sigma_s$  (напряжения  $\sigma_n$  и  $\sigma_{ns}$  равны нулю). Выводы о предельном переходе аналогичны предыдущим случаям. На рис. 10 показаны изменения напряжения  $\sigma_s$  на контуре эллиптического отверстия  $L_0$  ( $b/a = 2$ ,  $\nu_1 = 0,3$ ). Кривые 1, 2 и 3 отвечают значениям параметра  $b/a$ , равным 0,5; 2,0 и 5,0. Анализ полученных результатов показывает что распределения напряжений в  $P$ - и  $SV$ - случаях принципиально отличаются друг от друга. Так, при  $b/a < 1$ , т. е. когда фокусы эллипса находятся на оси, параллельной фронту падающей волны, вблизи точки



соскальзывания напряжение  $\sigma_s$  имеет локальный максимум в  $P$ -случае и локальный минимум в  $SV$ -случае. При значении  $b/a > 1$  с увеличением параметра  $b/a$  характер изменения  $\sigma_s$  усложняется, причем число точек максимума и минимума увеличивается.

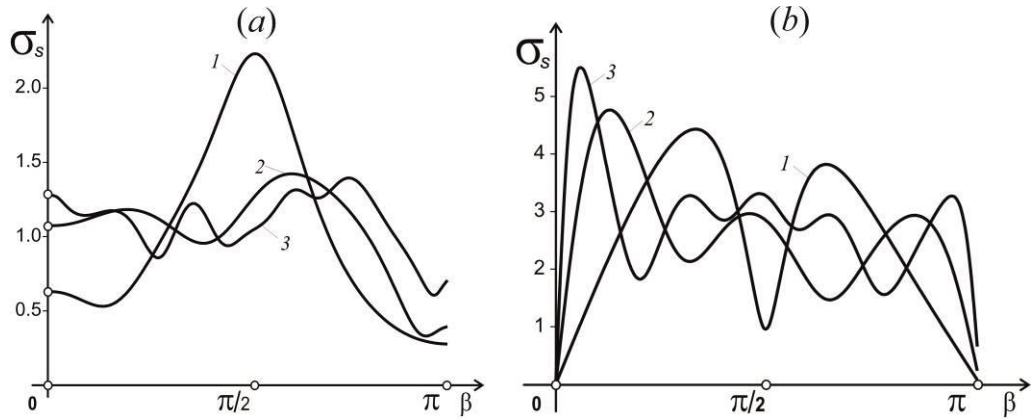


Рис. 10. Распределения напряжений на контуре эллиптического отверстия в случаях  $P$ -волны (а) и  $SV$ -волны (б)

#### Контурные напряжения в случае решетки, состоящей из пяти отверстий.

На рис. 11, 12 и рис. 13, 14 иллюстрируются распределения напряжения  $\sigma_s$  на центральном (а) и левом крайнем (б) эллиптических и ромбических отверстиях ( $d/a = 3$ ;  $\nu_1 = 0,3$ ). Кривые 1, 2 ( $b/a = 2$ ) и 3, 4 ( $b/a = 0,5$ ) отвечают значениям  $\gamma_1 a$ , равным 0,45; 0,85 и 0,9; 1,7. Расчеты показывают, что максимальные значения напряжений в  $P$ -случае достигаются вблизи точек соскальзывания, причем в случае ромбических отверстий наблюдаются резкое увеличение напряжений вблизи этих точек. В  $SV$ -случае характер изменения напряжений сложный и наблюдается значительное увеличение количества экстремальных точек.

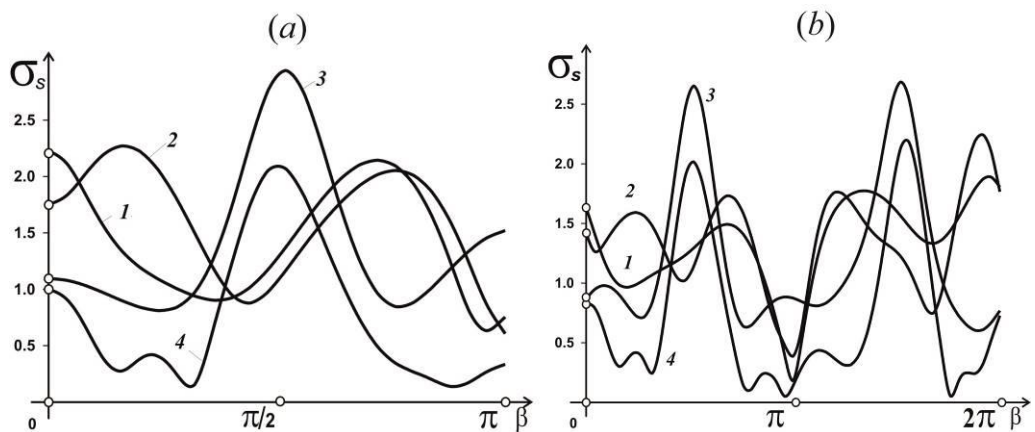


Рис. 11. Распределение контурного напряжения на центральном (а) и крайнем (б) эллиптических отверстиях в случае  $P$ -волны

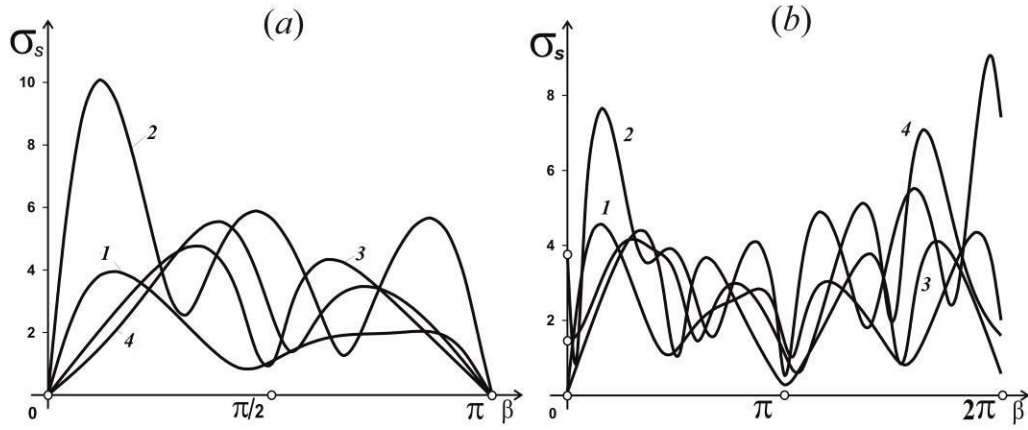


Рис. 12. Распределение контурного напряжения на центральном (а) и крайнем (б) эллиптических отверстиях в случае SV-волны

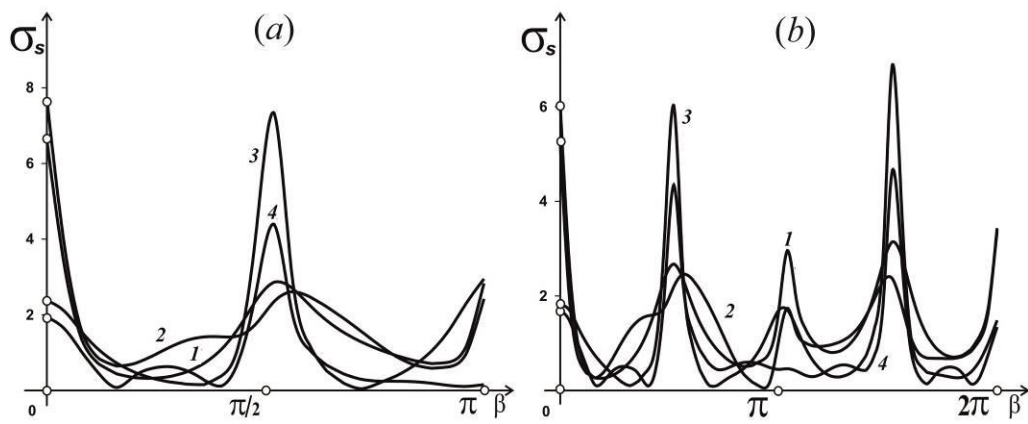


Рис. 13. Распределение контурного напряжения на центральном (а) и крайнем (б) ромбических отверстиях в случае P-волны

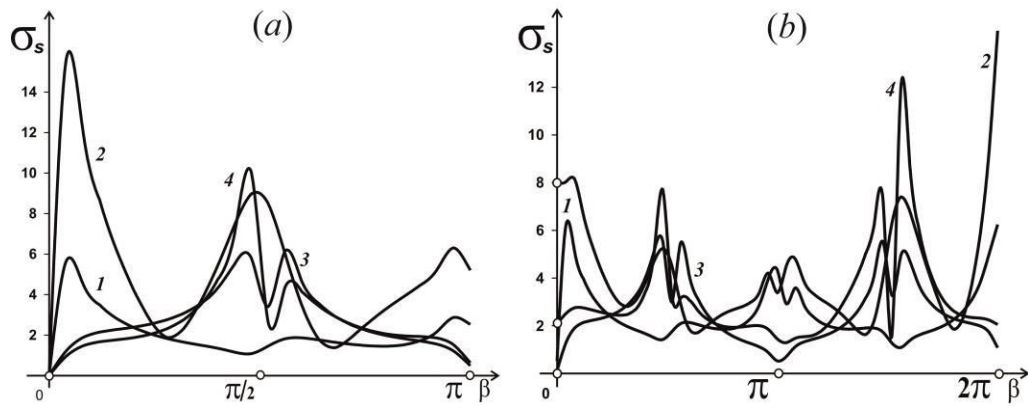


Рис. 14. Распределение контурного напряжения на центральном (а) и крайнем (б) ромбических отверстиях в случае SV-волны

Численные исследования показали, что при воздействии на решетку продольной и поперечной волн, как и в случае антиплоской деформации [18], наблюдается эффект насыщения. Здесь, начиная с некоторого количества объектов в решетке, дальнейшее увеличение количества отражателей практически не влияет на значения амплитуд напряжений. На практике это означает, что уже при количестве объектов в решетке  $M=13$ , решения систем сингулярных интегральных уравнений совпадают с аналогичными решениями соответствующей периодической задачи. Следует отметить также, что количество отражателей практически не влияет на точность вычислений; для достижения точности  $10^{-8}$  количество точек разбиения на контурах неоднородностей приблизительно равно 1000.

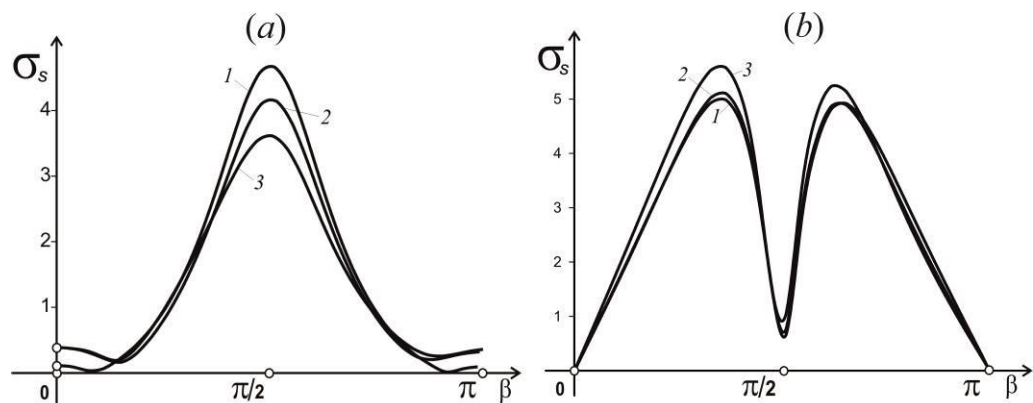


Рис. 15. Распределение контурного напряжения на центральном отверстии решетки, составленной из 13 однородных объектов в  $P$  (a) и  $SV$  (b) случаях

На рис. 15 приводятся распределения напряжения  $\sigma_s$  на центральном отверстии  $L_0$  в случае 13 эллиптических отражателей в решетке. Кривые 1, 2 и 3 приведены для  $b/a=0,5$ ;  $\nu_1=0,3$ ;  $\gamma_1 d=1,0$  и отвечают значениям  $a/d=0,3; 0,5$  и  $0,7$ . Если в  $P$ -случае максимальное напряжение достигается в точке соскальзывания, то в  $SV$ -случае в этой точке наблюдается локальный минимум. Вблизи теневой и лобовой точек напряжение  $\sigma_s$  близко к нулю. Кривые на рис. 15 совпадают с аналогичными кривыми работы [27], где рассматривается дифракция плоских гармонических волн на периодической системе полостей в упругой среде. Совпадение результатов свидетельствует о достоверности построенных алгоритмов.

## 6. Выводы

В данной работе задачи дифракции плоских гармонических волн на решетке, состоящей из отверстий и различного типа включений, сведены к системам сингулярных интегральных уравнений. Дискретизация этих уравнений осуществлялась методами дискретных особенностей и механических квадратур. Показано, что оба метода имеют приблизительно одинаковую эффективность. Численная реализация осуществлялась с помощью параллельных вычислений,

что позволило существенно сэкономить вычислительные ресурсы и, как следствие, значительно повысить точность вычислений и детально проанализировать характеристики исследуемых полей. Это важно с практической точки зрения, так как получение точных величин вплоть до восьмого знака, например, максимальных значений напряжений на границе неоднородностей, а также точных координат их дислокации позволяет избежать разрушений элементов конструкций, работающих в условиях динамических нагрузок. Сочетание метода интегральных уравнений, позволяющего значительно ускорить решение задачи, и процедур распараллеливания существенно увеличивает эффективность рассмотренного алгоритма.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. О концентрации напряжений около нескольких отверстий в элементах конструкций // Прикл. механика. – 1994. – 30, №4. – С. 6–13.
2. Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн. – К.: Наукова думка. – 2012. – 232 с.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. – К.: Наукова думка. – 1978. – 307 с.
4. Liu Y., Wu R.S., Ying C.F. Scattering of elastic waves by an elastic of viscoelastic cylinder // Geophys. J. Int. – 2000. – 142, №27–28. – P. 439–460.
5. Рвачев В.Л. Теория  $R$ -функций. – К.: Наукова думка. – 1982. – 556 с.
6. Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л., Сизова Н.Д. Исследование дифракции упругих волн на пластинах, ослабленных двумя отверстиями произвольной формы // ДАН. Математическая физика. – 1996. – 349, № 2. – С. 175–179.
7. Подильчук Ю.Н., Рубцов Ю.К. Применение лучевых методов в задачах распространения и рассеяния волн (обзор) // Прикладная механика. – 1996. – 32, № 12. – С. 3–27.
8. Агапов В.П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций. – М. Изд. АСВ (Ассоциации строительных вузов). – 2000. – 152 с.
9. Фильштинский Л.А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – №4. – С. 119–127.
10. Назаренко А.М. Дифракция гармонических волн на цилиндрическом упругом включении в условиях плоской деформации. //Динамические системы. – 2005. – №19. – С. 54–60.
11. Гандель Ю.В., Душкин В.Д. Математические модели двухмерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей. – Харьков: Акад. ВВ МВД Украины. – 2012. – 544с.
12. Панченко Б.Е., Назаренко А.М. Каркасный анализ предметной области: стационарные динамические задачи теории упругости для изотропных сред с произвольными неоднородностями // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – №1. – С. 172–187.

13. Назаренко А.М., Панченко Б.Е., Ложкин А.М. Взаимодействие упругих волн с цилиндрической полостью в условиях плоской деформации // Вісник НТУ „ХПІ”. Тем. випуск: Динаміка і міцність машин. – 2005. – №4. – С. 112–117.
14. Назаренко А.М., Панченко Б.Е., Ложкин А.М. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции упругих волн на цилиндрических включениях. // Вісник СумДУ. Сер. Фізика, математика, механіка. – 2004. – №8. – С. 144–150.
15. Назаренко А.М., Панченко Б.Е., Ложкин А.М. Дифракция волн плоской деформации на жестком цилиндрическом включении произвольного поперечного сечения // Вісник Донецького університету. Серія А: Природничі науки. – 2006. – №3. – С. 113–117.
16. Bostrom Anders. Scattering by a smooth elastic obstacle // J. Acoust. Soc. Amer. – 1980. – 7, №6, –Р. 1904–1913.
17. Feng Y.D., Wang Y.S., Zhang Z.M. Time domain BEM analysis of cylinder embedded in soil with frictional slip at the interface // Soil Dyn. Earthquake Eng. – 2003. – 23, №4. – Р. 303–311.
18. Назаренко А.М. Моделирование дифракции *SH*-волн на системе неоднородностей методами сингулярных интегральным уравнений // Вісник ХНУ. Сер. «Матем. моделювання. Інформ. технології. Автом. системи управління». – 2015. – Вып. 27. – С. 107–123.
19. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука. – 1985. – 256 с.
20. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции // К.: Наук. думка. – 1984. – 344 с.
21. Назаренко А.М., Фильштинский Л.А. Взаимодействие волн напряжений с жесткими вставками в полупространстве (плоская деформация) // Механика твердого тела. – 1985. – №4. – С. 95–102.
22. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах // К.: Наукова думка. – 1981. – 284 с.
23. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В. Численное программное обеспечение интеллектуального МІМД – компьютера «Инпарком». – К.: Наукова думка. – 2007. – 220 с.
24. Назаренко А.М., Фильченко Д.В. Идентификация и оптимизация слабо формализованных процессов в классе стационарных LQ моделей // Кибернетика и вычислительная техника. – 2009. – Вып. 158. – С. 81-99.
25. Вертгейм И.И., Терпугов В.Н. Параллельные технологии вычислений в механике сплошных сред и МДТТ.: Учеб. пособ. – Пермь: ПГУ. – 2007. – 84 с.
26. Гузь А.Н., Немиш Ю.Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – К.: Наукова думка. – 1989. – 352 с.
27. Назаренко А.М., Ложкин А.М. Дифракция упругих волн на периодических системах цилиндрических полостей и жестких включений // Акустический вестник. – 2006. – 9, №4. – С. 35–42.