УДК 519.8

Непрерывные линейные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств с ограничениями

Л. С. Коряшкина, А. П. Череватенко
Государственное высшее учебное заведение «Национальный горный университет», Украина

В статье рассматривается непрерывная линейная задача оптимального мультиплексного разбиения множеств с ограничениями. Описан метод и численный алгоритм решения этой задачи. Показано, что решение задачи оптимального мультиплексного разбиения множества с ограничениями сводится к решению задачи конечномерной максимизации негладкой функции. Приведены результаты решения тестовых задач. Продемонстрирована возможность построения диаграмм Вороного высших порядков с ограничениями на «мощности» точек-генераторов посредством формулирования и решения задач оптимального мультиплексного разбиения множеств специального вида.

Ключевые слова: *характеристические функции подмножеств, функционал Лагранжа, оптимальное мультиплексное разбиение множеств, недифференцируемая оптимизация.*

У статті розглядається неперервна лінійна задача оптимального мультиплексного розбиття множин з обмеженнями. Описано метод і чисельний алгоритм вирішення цієї задачі. Показано, що рішення задачі оптимального мультиплексного розбиття множини з обмеженнями зводиться до вирішення задачі скінченновимірної максимізації негладкої функції. Наведено результати вирішення тестових задач. Продемонстрована можливість побудови діаграм Вороного вищих порядків з обмеженнями на «потужності» точок-генераторів шляхом формулювання та вирішення задач оптимального мультиплексного розбиття множин спеціального виду.

Ключові слова: *характеристичні функції підмножин, функціонал Лагранжа, оптимальне мультиплексне розбиття множини, недиференційовна оптимізація.*

The article considers the continuous linear problem of optimal multiplex-partitioning of sets with restrictions. The method and numerical algorithm for solving this problem are described. It is shown that the solution of the problem of optimal multiplex-partitioning of sets with restrictions is reduced to solving the problem of non-smooth function finite-dimensional maximization. The solution results of test problems are presented. The possibility of constructing higher order Voronoi diagrams with restrictions on the "power" of generator points through the formulating and solving the problems of optimal multiplex-partitioning of sets of a special kind is demonstrated.

Key words: *characteristic functions of subsets, Lagrangian functional, optimal multiplex-partitioning of sets, nondifferential optimization.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Непрерывными задачами оптимального мультиплексного разбиения множеств называются задачи поиска разбиения ограниченного множества из пространства E_n на такие подмножества точек, каждое из которых отвечало бы (в соответствии с определенным критерием) одному и тому же набору k точек из N существующих, называемых центрами [1 – 3]. Очевидно, $k < N$. Выбор критерия оптимальности мультиплексного разбиения определяется, как правило, спецификой самих центров. Если, например, требуется разбить заданную область Ω на регионы, охватывающие клиентов, для которых одни и те же k

сервисных центров являются ближайшими, то критерий качества разбиения состоит в минимизации суммарного расстояния от центров до всех клиентов, ими обслуживаемых (возможно, суммы различных функций от расстояний). В этом случае предполагается, что клиенты каждого региона могут обслуживаться любым из соседних центров, а примерами пар «сервисный центр – клиент» могут выступать предприятия и потребители, почтовые отделения и абоненты, станции сбора анализов и пациенты и т.п. Если же центры представляют собой крайне необходимые предприятия или службы (аварийные, полицейские, медицинские учреждения и т.д.), то критерием оптимальности, как правило, является минимизация расстояния (или времени) от центра обслуживания до самой отдаленной точки региона, то есть оптимизация наихудшего варианта. В наиболее общей задаче требуется найти несколько таких центров обслуживания и определить границы региона, в котором они осуществляют свою деятельность, считая при этом, что каждый клиент может быть обслужен любым из ближайших центров (например, когда наиболее близкие по каким-либо причинам не могут предоставить ту или иную услугу).

Таким образом, как отмечено в [3], по способу задания функционала непрерывные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств могут быть условно разделены на минисуммные и минимаксные задачи разбиения, аналогично классификации задач оптимизации размещения центров на графах.

Непрерывные задачи оптимального мультиплексного разбиения ограниченного множества в случае, когда $2 \le k < N$ являются новыми по своей математической постановке, и поэтому разработка и обоснование методов и алгоритмов решения таких задач представляет собой актуальное направление научных исследований. Кроме того, модели и методы решения задач ОМРМ интересны с точки зрения их практических приложений, среди которых – территориальная сегментация рынка услуг; исследование конкуренции между сервисными центрами, выявление их реальной сферы деятельности; сегментация видеоизображений с малым количеством опорных точек для отслеживания изменений границ кадра [4, 5]. Как указано в [4], математический аппарат решения задач ОМРМ позволит выработать единый подход к построению диаграмм Вороного высших порядков и их различных обобщений. В основе такого подхода – идея формулирования и решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств с определенными критериями качества разбиения и ограничениями по аналогии с тем, как строится диаграмма Вороного первого порядка и ее всевозможные модификации в [6 – 8].

2. Истоки исследования авторов

Настоящая работа опирается на результаты исследований в [2, 9, 10]. В [2] сформулированы различные постановки непрерывных линейных задач ОМРМ: при фиксированных центрах или с требованием их оптимального размещения, при наличии интегральных ограничений на так называемые «мощности» центров или без каких-либо ограничений. Для задач оптимального мультиплексного разбиения множеств с ограничениями получены условия, при которых класс допустимых разбиений не является пустым.

В [9] описан метод решения непрерывной линейной задачи оптимального разбиения множеств без ограничений. Оптимальное решение указанной задачи получено аналитически в виде характеристических функций подмножеств k-го порядка, составляющих оптимальное разбиение заданного множества. Там же показано, что непрерывная задача оптимального мультиплексного разбиения множеств с размещением центров сводится к конечномерной задаче максимизации негладкой функции.

В работе [10] представлены некоторые свойства оптимальных решений задач ОМРМ без ограничений, как с фиксированными центрами, так и с требованием их оптимального размещения в заданной области.

3. Нерешенные проблемы и цели работы

Целями настоящей работы является разработка метода решения непрерывных задач оптимального мультиплексного разбиения множества при наличии интегральных ограничений в форме равенств и неравенств, разработка соответствующего численного алгоритма, а также демонстрация примеров мультиплексного разбиения множества с учетом ограниченных «мощностей» центров, полученных в результате решения тестовых задач.

В [6 – 8, 11, 12] изучаются диаграммы Вороного с ограничениями на мощности точек – генераторов и методы их построения. При этом мощностью точки $\tau_i, i=\overline{1,N}$ (генератора) из множества $\mathrm{M}\subset\Omega$, $\Omega\subset\mathrm{E}_n$, называется взвешенная площадь клетки Вороного, определяемая по следующей формуле:

$$|Vor(\tau_i)| = \int\limits_{x\in Vor(\tau_i)} \rho(x)dx\,,$$

где $\rho(x)\geq 0$, $x\in\Omega$ – заданная функция плотности.

Диаграммой Вороного с ограничениями на мощности $|Vor(\tau_i)|$ точек $\tau_i, i=\overline{1,N}$ называют диаграмму Вороного на множестве Ω, в которой каждая точка $\tau_i\in\mathrm{M}$ имеет свою собственную мощность $b_i\in S$: $\int\limits_{x\in Vor(\tau_i)} \rho(x)dx = b_i$, $i=\overline{1,N}$, причем $b_1,\ldots,b_N$ – заданные положительные числа, для которых выполняются следующие условия:

$$S = \int\limits_{x\in\Omega} \rho(x)dx = \sum_{i=1}^{N} b_i,\; 0\leq b_i\leq S,\; i=\overline{1,N}\,.$$

В данной работе сформулируем определение *диаграммы Вороного k-го порядка на множестве* $\Omega\subset\mathrm{E}_n$ *с ограничениями на мощности точек-генераторов* и покажем, как можно строить такие диаграммы, формулируя соответствующим образом непрерывные задачи оптимального мультиплексного разбиения множества с ограничениями и применяя изложенный ниже метод решения.

4. Математическая постановка непрерывной задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств с ограничениями

Пусть Ω – ограниченное, измеримое по Лебегу, замкнутое множество из пространства E_n; $\tau_i = \left(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}\right) \in \Omega$, для всех $i = \overline{1,N}$, – некоторые точки, называемые «центрами», координаты которых могут быть заранее неизвестны и подлежать определению, $\tau^N = \left(\tau_1,...,\tau_N\right) \in \underbrace{\Omega \times ... \times \Omega}_{N} = \Omega^N$.

Введем следующие обозначения: $\mathrm{N} = \{1,2,...,N\}$ – набор всех индексов центров; $\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$ – множество всех k-элементных подмножеств множества N, $\left|\mathrm{M}(\mathrm{N},k)\right| = C_N^k = L$; $\sigma_l = \{j_1^l, j_2^l,..., j_k^l\}$, $l = \overline{1,L}$, – элементы множества $\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$.

С каждым элементом σ_l множества $\mathrm{M}(\mathrm{N},k)$ будем ассоциировать некоторое подмножество Ω_{σ_l} точек из Ω, $l = \overline{1,L}$, а с подмножеством Ω_{σ_l} будем связывать набор центров $\{\tau_{j_1^l}, \tau_{j_2^l},...,\tau_{j_k^l}\}$.

Совокупность измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}$ из $\Omega \subset E_n$ будем называть разбиением k-го порядка множества Ω на его непересекающиеся подмножества $\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}$, если

$$\bigcup_{l=1}^{L}\Omega_{\sigma_l} = \Omega,\ \mathrm{mes}\left(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}\right) = 0,\ \sigma_i,\sigma_j \in \mathrm{M}(\mathrm{N},k),\ i \neq j,\ i, j = \overline{1,L},$$

где $\mathrm{mes}(\cdot)$ означает меру Лебега. Подмножества $\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}$ множества Ω называются подмножествами k-го порядка множества Ω.

Пусть $\Sigma_\Omega^{N,k}$ – класс всех возможных разбиений k-го порядка множества Ω на его непересекающиеся подмножества $\Omega_{\sigma_1},\Omega_{\sigma_2},\ldots\Omega_{\sigma_L}$:

$$\Sigma_\Omega^{N,k} = \left\{\overline{\omega} = \left\{\Omega_{\sigma_1},\ldots,\Omega_{\sigma_L}\right\} : \bigcup_{l=1}^{L}\Omega_{\sigma_l} = \Omega,\ \mathrm{mes}\left(\Omega_{\sigma_i} \cap \Omega_{\sigma_j}\right) = 0,\right.$$
$$\left.\sigma_i,\sigma_j \in \mathrm{M}(\mathrm{N},k), i \neq j, i, j = \overline{1,L}\right\}.$$

Непрерывная линейная задача оптимального мультиплексного разбиения множества $\Omega \subset E_n$ при ограничениях с размещением центров формулируется следующим образом [2].

Задача А-k. $$F(\overline{\omega},\tau^N) \to \min_{\substack{\overline{\omega} \in \Sigma_\Omega^{N,k} \\ \tau^N \in \Omega^N}},$$

$$F(\overline{\omega},\tau^N) = \sum_{l=1}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\sum_{i\in\sigma_l}\left(c(x,\ \tau_i)/w_i + a_i\right)\rho(x)dx, \tag{4.1}$$

$$\sum_{\substack{l=1\\ l:\, i\in\sigma_l}}^{L} \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x)dx = b_i, \quad i=\overline{1,p}, \qquad \sum_{\substack{l=1\\ l:\, i\in\sigma_l}}^{L} \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x)dx \le b_i, \quad i=\overline{p+1,N}. \qquad (4.2)$$

Здесь $x=\left(x^{(1)},...,x^{(n)}\right)\in\Omega$; $c\left(x,\tau_i\right)$, $i=\overline{1,N}$ − ограниченные, определенные на декартовом произведении $\Omega\times\Omega$ функции, измеримые по аргументу x при любом фиксированном векторе $\tau_i=\left(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}\right)$. Функция $\rho(x)$ − ограниченная, измеримая, неотрицательная на множестве Ω; $w_i>0, a_i\ge 0, b_i\ge 0, i=\overline{1,N}$, − заданные числа. Коэффициенты γ_j^l в левых частях ограничений таковы, что для всех $j=\overline{1,N}$, $\sigma_l=\{j_1^l, j_2^l,..., j_k^l\}$, $l=\overline{1,L}$ имеют место соотношения:

$$0\le\gamma_j^l\le 1,\ \gamma_{j_1^l}^l+\gamma_{j_2^l}^l+...+\gamma_{j_k^l}^l=1. \qquad (4.3)$$

Пару $\left(\bar\omega^*,\tau^{N*}\right)$, доставляющую минимальное значение функционалу F и удовлетворяющую ограничениям (4.2), будем называть **оптимальным решением задачи А-** k .

Если в задаче **А-** k зафиксировать центры $\tau_i, i=\overline{1,N}$, то получим частный случай задачи ОМРМ [2]:

Задача А3- k . Непрерывная линейная задача оптимального разбиения k -го порядка множества $\Omega\subset E_n$ на его непересекающиеся подмножества $\Omega_{\sigma_1},\ldots,\Omega_{\sigma_L}$, среди которых могут быть пустые, при ограничениях в форме равенств и неравенств с заданными координатами центров $\tau_1,...,\tau_N$:

$$F(\bar\omega)\to\min_{\bar\omega\in\Sigma_\Omega^{N,k}},$$

$$F(\bar\omega)=\sum_{l=1}^{L}\int_{\Omega_{\sigma_l}}\sum_{i\in\sigma_l}\left(c(x,\ \tau_i)/w_i+a_i\right)\rho(x)dx,$$

$$\sum_{\substack{l=1\\ l:\, i\in\sigma_l}}^{L} \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x)dx = b_i, \quad i=\overline{1,p}, \qquad \sum_{\substack{l=1\\ l:\, i\in\sigma_l}}^{L} \int_{\Omega_{\sigma_l}} \gamma_i^l \rho(x)dx \le b_i, \quad i=\overline{p+1,N},$$

где $x=\left(x^{(1)},...,x^{(n)}\right)\in\Omega$; координаты $\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}$ центра $\tau_i\in\Omega, i=\overline{1,N}$, фиксированы; $w_i>0, a_i\ge 0, b_i\ge 0, i=\overline{1,N}$; γ_j^l, $j=\overline{1,N}$, $l=\overline{1,L}$ – такие же, как и в задаче **А-** k .

В [2] доказана следующая лемма.

Лемма. Пусть $S=\int\limits_{\Omega}\rho(x)dx$. Для того, чтобы в задаче **A-**k (или **A3-**k) при любом наборе центров τ_i, $i=\overline{1,N}$, класс допустимых разбиений k-го порядка множества Ω был непустым, достаточно выполнения следующих условий:

$$0\le b_i\le S,\quad i=\overline{1,N};\qquad \sum_{i=1}^{p}b_i\le S\le\sum_{i=1}^{N}b_i\,. \tag{4.4}$$

В [2] также показано, что при $k=1$ задачи **A-**k, **A3-**k представляют собой непрерывные линейные задачи оптимального разбиения множеств [6].

5. Описание метода решения задачи A-k

Запишем исходную задачу **A-**k как задачу бесконечномерного математического программирования с булевыми переменными.

Пусть $\bar{\omega}=\left\{\Omega_{\sigma_1},...,\Omega_{\sigma_l},\ldots\Omega_{\sigma_L}\right\}$ – некоторое разбиение k-го порядка множества Ω. Каждой точке $x\in\Omega_{\sigma_l}$, $l=\overline{1,L}$, поставим в соответствие NL-мерный вектор $\lambda^l(x)=(\lambda_1^l(x),...,\lambda_N^l(x))$, координаты которого определим следующим образом:

$$\lambda_i^l(x)=\begin{cases}1,\ x\in\Omega_{\sigma_l}\ \&\ i\in\sigma_l,\\ 0\ \text{ в противном случае,}\end{cases}\qquad i=\overline{1,N}, \tag{5.1}$$

где $\sigma_l=\{j_1^l,j_2^l,...,j_k^l\}$ – набор индексов центров $\{\tau_{j_1^l},\tau_{j_2^l},...,\tau_{j_k^l}\}$, ассоциируемых с подмножеством Ω_{σ_l}.

Вектор-функцию $\lambda^l(x)=(\lambda_1^l(x),...,\lambda_N^l(x))$, определенную на множестве Ω, с координатами, которые задаются формулой (5.1), будем называть характеристической вектор-функцией подмножества Ω_{σ_l}, которое входит в разбиение k-го порядка множества Ω.

Запишем задачу **A-**k относительно характеристических вектор-функций подмножеств, составляющих разбиение k-го порядка множества Ω.

Задача B-k. Найти $\min\limits_{(\lambda(\cdot),\tau^N)\in\Gamma^k\times\Omega^N} I(\lambda(\cdot),\tau^N)$,

$$I(\lambda(\cdot),\tau^N)=\int\limits_{\Omega}\sum_{l=1}^{L}\left(\sum_{i=1}^{N}(c(x,\ \tau_i)/w_i+a_i)\lambda_i^l(x)\right)\rho(x)dx,$$

$$\Gamma^k=\left\{\lambda(\cdot):\lambda(\cdot)\in\Gamma_0^k\ ,\ \int\limits_{\Omega}\sum_{l=1}^{L}\gamma_i^l\lambda_i^l(x)\rho(x)dx=b_i,\quad i=\overline{1,p}\ ,\right.$$

$$\left.\int\limits_{\Omega}\sum_{l=1}^{L}\gamma_i^l\lambda_i^l(x)\rho(x)dx\le b_i,\quad i=\overline{p+1,N}\right\};$$

$$\Gamma_0^k=\left\{\lambda^l(\cdot)=(\lambda_1^l(\cdot),...,\lambda_N^l(\cdot)):\lambda_i^l(x)=0\vee1 \text{ для всех } x\in\Omega, i=\overline{1,N},\ l=\overline{1,L},\right.$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^l(x) = k,\ l = \overline{1, L},\ \text{п.в. для } x \in \Omega \Big\}.$$

От задачи **B-** k бесконечномерного математического программирования с булевыми значениями переменных $\lambda_i^l(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$, перейдем к задаче со значениями $\lambda_i^l(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, L}$, из отрезка $[0;1]$. В дискретной оптимизации такой подход называется LP-релаксацией [13].

Задача C- k. Найти $\min\limits_{(\lambda(\cdot), \tau^N) \in \Gamma_2^k \times \Omega^N} I(\lambda(\cdot), \tau^N)$,

$$I(\lambda(\cdot), \tau^N) = \int\limits_{\Omega} \sum_{l=1}^{L} \left(\sum_{i=1}^{N} (c(x,\ \tau_i) / w_i + a_i) \lambda_i^l(x) \right) \rho(x) dx,$$

$$\Gamma_2^k = \Big\{ \lambda(\cdot) : \lambda(\cdot) \in \Gamma_1^k,\ \int\limits_{\Omega} \sum_{l=1}^{L} \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx = b_i, \quad i = \overline{1, p},$$

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{l=1}^{L} \gamma_i^l \lambda_i^l(x) \rho(x) dx \le b_i, \quad i = \overline{p+1, N} \Big\};$$

$$\Gamma_1^k = \Big\{ \lambda^l(\cdot) = (\lambda_1^l(\cdot), ..., \lambda_N^l(\cdot)) : 0 \le \lambda_i^l(x) \le 1 \text{ для всех } x \in \Omega,\ i = \overline{1, N},\ \ l = \overline{1, L},$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^l(x) = k,\ l = \overline{1, L},\ \text{п.в. для } x \in \Omega \ \Big\}.$$

Очевидно, $\Gamma_0^k \subset \Gamma_1^k$, вследствие чего имеет место включение $\Gamma^k \subset \Gamma_2^k$. Легко показать, что множество Γ_2^k – ограниченное, замкнутое, выпуклое множество гильбертова пространства $L_2^{LN}(\Omega)$ с нормой $\|\lambda(\cdot)\| = \left(\int\limits_{\Omega} \sum_{l=1}^{L} \sum_{i=1}^{N} \left[\lambda_i^l(x) \right]^2 dx \right)^{1/2}$; множество Γ_2^k – слабо компактно и, в соответствии с теоремой Крейна-Мильмана, содержит по крайней мере одну крайнюю точку [14].

При каждом фиксированном векторе $\tau^N \in \Omega^N$ функционал $I(\lambda(\cdot), \tau^N)$ – линейный, непрерывный относительно вектор-функции $\lambda(\cdot)$ на Γ_2^k и, согласно обобщенной теореме Вейерштрасса, достигает на этом множестве своей нижней грани. Таким образом, задача **C-** k разрешима. Среди множества точек Γ_2^k, в которых линейный относительно вектор-функции $\lambda(\cdot)$ функционал $I(\lambda(\cdot), \tau^N)$ при фиксированном векторе $\tau^N \in \Omega^N$ достигает на множестве Γ_2^k своего минимального по $\lambda(\cdot)$ значения, найдется по крайней мере одна крайняя точка множества Γ_2^k. Крайние точки множества Γ_2^k – это характеристические функции некоторых подмножеств k-го порядка Ω_{σ_l}, $l=\overline{1,L}$, образующих разбиение k-го порядка множества Ω при каждом фиксированном векторе $\tau^N \in \Omega^N$. Следовательно, множество оптимальных решений задачи **C-** k содержит в себе оптимальные решения задачи **B-** k, а значит решение задачи **B-** k сводится к решению задачи **C-** k и отбору из всех оптимальных решений последней тех, которые являются и решениями задачи **B-** k.

Для задачи **C-** k составим функционал Лагранжа, включая в него интегральные ограничения:

$$W\left(\left(\lambda(\cdot),\tau^N\right),\psi\right)=\int_\Omega \sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{N}\left[c\left(x,\tau_i\right)/w_i+a_i\right]\lambda_i^l(x)\rho(x)dx+$$

$$+\sum_{p=1}^{N}\psi_i\left[\int_\Omega \sum_{l=1}^{L}\gamma_i^l\lambda_i^l(x)\rho(x)dx-b_i\right]=$$

$$=\int_\Omega \sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{N}\left(c\left(x,\tau_i\right)/w_i+a_i+\gamma_i^l\psi_i\right)\lambda_i^l(x)\rho(x)dx-\sum_{i=1}^{N}\psi_i b_i .$$

Функционал $W\left(\left(\lambda(\cdot),\tau^N\right),\psi\right)$ определен на декартовом произведении $\left(\Gamma_1^k\times\Omega^N\right)\times\Psi$, где $\Psi=\left\{\psi\in R^N,\psi_i\geq 0,\, i=\overline{p+1,N}\right\}$.

Пару $\left(\left(\hat\lambda(\cdot),\hat\tau^N\right),\hat\psi\right)$ будем называть седловой точкой функционала Лагранжа $W\left(\left(\lambda(\cdot),\tau^N\right),\psi\right)$ на множестве $\left(\Gamma_1^k\times\Omega^N\right)\times\Psi$, если $\forall\left(\lambda(\cdot),\tau^N\right)\in\Gamma_1^k\times\Omega^N$ и $\forall\psi\in\Psi$ имеет место следующее неравенство:

$$W\left(\left(\hat\lambda(\cdot),\hat\tau^N\right),\psi\right)\leq W\left(\left(\hat\lambda(\cdot),\hat\tau^N\right),\hat\psi\right)\leq W\left(\left(\lambda(\cdot),\tau^N\right),\hat\psi\right).$$

Задача, двойственная к задаче С- k, записывается следующим образом:

$$H(\psi)=\min_{(\lambda(\cdot),\tau^N)\in\Gamma_1^k\times\Omega^N} W\left(\left(\lambda(\cdot),\tau^N\right),\psi\right)\to\max_{\psi\in\Psi} . \qquad (5.2)$$

Заметим, что задача (5.2) является конечномерной, в отличие от задачи **C-** k – бесконечномерной задачи выпуклого программирования в гильбертовом пространстве.

Для того, чтобы задачи **C-** k и (5.2) были связаны соотношением двойственности $I_*=W^*$, причем верхняя грань в двойственной задаче достигалась, необходимо и достаточно, чтобы функционал $W\left(\left(\lambda(\cdot),\tau^N\right),\psi\right)$ имел седловую точку в смысле введенного определения. Доказательство этого утверждения нетрудно провести аналогично [15].

Итак, решение пары двойственных задач **С**-k и (5.2) эквивалентно нахождению седловой точки функционала Лагранжа $W\left(\left(\lambda(\cdot),\tau^N\right),\psi\right)$ на множестве $\left(\Gamma_1^k\times\Omega^N\right)\times\Psi$.

Уточним вид функции $H(\psi)$. Зафиксируем произвольный вектор $\overline{\psi}\in\Psi$.

Рассмотрим задачу

$$W\left(\left(\lambda(\cdot),\tau^N\right),\overline{\psi}\right)\to\min_{(\lambda(\cdot),\tau^N)\in\Gamma_1^k\times\Omega^N}. \tag{5.3}$$

Задачу (5.3) можно рассматривать в свою очередь, как задачу оптимального мультиплексного разбиения множеств без ограничений, записанной относительно характеристических вектор-функций подмножеств Ω_{σ_l}, $l=\overline{1,L}$, составляющих разбиение k-го порядка множества Ω. Метод решения этой задачи подробно описан в [9]. Произведя теоретические выкладки, аналогичные тем, которые приведены в [9], можно прийти к выводу, что оптимальное решение задачи (5.3) имеет следующий вид: для $i=\overline{1,N}, l=\overline{1,L}$ и почти всех $x\in\Omega$:

$$\lambda_{*i}^l(x)=\begin{cases}1, \text{ если } c\left(x,\tau_{*i}\right)/w_i+a_i+\gamma_i^l\overline{\psi}_i\le c\left(x,\tau_{*j}\right)/w_j+a_j+\gamma_j^l\overline{\psi}_j, \\ \quad \text{одновременно } \forall i\in\sigma_l,\ j\in \mathrm{N}\setminus\sigma_l; \\ 0 \ \text{ в остальных случаях,} \qquad\qquad i=\overline{1,N};\end{cases} \tag{5.4}$$

в качестве $\tau_{*1},...,\tau_{*N}$ выбирается оптимальное решение задачи

$$G(\tau^N,\overline{\psi})\to\min_{\tau^N\in\Omega^N}, \tag{5.5}$$

где

$$G(\tau^N,\overline{\psi})=\int_\Omega \min_{\substack{\sigma_l\in \mathrm{M}(\mathrm{N},k)\\ l=\overline{1,L}}}\sum_{i\in\sigma_l}[c\left(x,\tau_i\right)/w_i+a_i+\gamma_i^l\overline{\psi}_i]\rho\left(x\right)dx. \tag{5.6}$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Для того чтобы при фиксированном наборе центров $\left(\tau_1,...,\tau_N\right)\in\Omega^N$ возможное разбиение $\left(\Omega_{*\sigma_1},...,\Omega_{*\sigma_l},...,\Omega_{*\sigma_N}\right)\in\Sigma_\Omega^N$ множества Ω являлось оптимальным для задачи **А**-k, необходимо и достаточно существование действительных констант $\psi_1,...,\psi_p,\psi_{p+1},...,\psi_N$ (среди которых $\psi_{p+1},...,\psi_N$ - неотрицательны) таких, что п. в. для $x\in\Omega$

$$c(x,\ \tau_i)/w_i+a_i+\gamma_i^l\psi_i\le c(x,\ \tau_j)/w_j+a_j+\gamma_j^l\psi_j,\ i\in\sigma_l,\ \mathrm{j}\in\mathrm{N}\backslash\sigma_l. \tag{5.7}$$

Следствие из теоремы 1. В точках x, принадлежащих оптимальной границе подмножеств $\Omega_{*\sigma_i}$ и $\Omega_{*\sigma_j}$ в неравенстве (5.7), достигается знак равенства.

Учитывая формулы (5.4) – (5.6), запишем функционал задачи (5.2), двойственной к задаче **С-** k , в следующем уточненном виде:

$$H(\psi) = \min_{\tau^N \in \Omega^N} \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in \mathrm{M}(\mathrm{N},k) \\ l=\overline{1,L}}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x,\tau_i) / w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i] \rho(x) dx .$$

Седловая точка функционала Лагранжа задачи **С-** k на множестве $\left(\Gamma_1^k \times \Omega^N\right) \times \Psi$ определяется для всех $i = \overline{1,N}, l = \overline{1,L}$ и почти всех $x \in \Omega$ следующим образом:

$$\hat{\lambda}_i^l(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } c(x,\hat{\tau}_i) / w_i + a_i + \gamma_i^l \hat{\psi}_i \le c(x,\hat{\tau}_j) / w_j + a_j + \gamma_j^l \hat{\psi}_j, \\ \quad \forall i \in \sigma_l, \, \mathrm{j} \in \mathrm{N} \backslash \sigma_l, \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \tag{5.8}$$

в качестве $\hat{\tau}_1,..., \hat{\tau}_N$, $\hat{\psi}_1,..., \hat{\psi}_N$ выбирается оптимальное решение следующей задачи конечномерной условной оптимизации:

$$G(\psi) = \min_{\tau^N \in \Omega^N} G_1(\tau,\psi) \to \max , \tag{5.9}$$

при условиях

$$\psi_i \ge 0, \quad i = \overline{p+1,N}, \tag{5.10}$$

где

$$G_1(\tau^N,\psi) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in \mathrm{M}(\mathrm{N},k) \\ l=\overline{1,L}}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x,\tau_i) / w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^{N} \psi_i b_i. \tag{5.11}$$

Так как среди всех решений задачи **С-** k были выбраны те, которые являются и решениями задачи **В-** k , то оптимальное решение задачи **В-** k может быть найдено по формулам (5.8) – (5.11).

Если в приведенных выкладках зафиксировать вектор $\tau^N \in \Omega^N$, считая, что он известен заранее, то можно получить оптимальное решение задачи **В3-** k , эквивалентной задаче **А3-** k , но сформулированной относительно характеристических вектор-функций подмножеств Ω_{σ_l} , $l = \overline{1,L}$, составляющих разбиение k -го порядка множества Ω .

Для задачи **В3-** k имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Оптимальное решение задачи **В3-** k имеет следующий вид: для $i = \overline{1,N}, l = \overline{1,L}$ и почти всех $x \in \Omega$:

$$\lambda_{*i}^l(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } c(x,\tau_i) / w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i^* \le c(x,\tau_j) / w_j + a_j + \gamma_j^l \psi_j^*, \\ \quad \forall i \in \sigma_l, \, \mathrm{j} \in \mathrm{N} \backslash \sigma_l, \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где в качестве $\psi_1^*,...,\psi_N^*$ выбирается оптимальное решение следующей задачи конечномерной условной оптимизации:

$$V(\psi) \to \max, \tag{5.12}$$

при условиях

$$\psi_i \ge 0, \quad i = \overline{p+1, N}, \tag{5.13}$$

где

$$V(\psi) = \int_{\Omega} \min_{\substack{\sigma_l \in M(N,k) \\ l=\overline{1,L}}} \sum_{i \in \sigma_l} [c(x, \tau_i)/w_i + a_i + \gamma_i^l \psi_i] \rho(x) dx - \sum_{i=1}^{N} \psi_i b_i. \tag{5.14}$$

6. Вычислительный эксперимент: обоснование алгоритмов и реализация

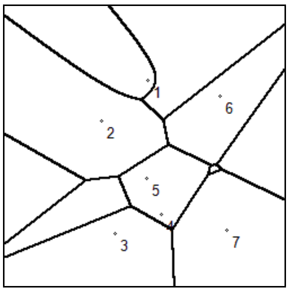
Численный алгоритм решения непрерывных линейных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств с интегральными ограничениями, реализующий описанный выше подход, программно реализован и включен в комплекс программ "OPTIMAL MULTIPLEX-PARTITIONING OF SETS" (OMPS-2015). При этом учет ограничений на двойственные переменные в задаче (5.12) – (5.14), а также условий принадлежности отыскиваемых центров заданному множеству в задаче (5.9) – (5.11), осуществляется, применяя аппарат штрафных функций. Возникающие конечномерные задачи безусловной оптимизации решаются с помощью метода субградиентов (метода псевдоградиентов – для задачи (5.9) – (5.11)) с растяжением пространства в направлении разности двух последовательных субградиентов (псевдоградиентов) [16, 17].

На рис. 6.1, *а* представлено оптимальное дуплексное разбиение, полученное в результате решения задачи **А3-***k* при следующих начальных данных: $\Omega = \left\{x \in R^2 : 0 \le x_i \le 10, i = 1,2\right\}$, $N = p = 7$, $k = 2$, $c(x,\ \tau_i) = \sqrt{(x_1 - \tau_1^i)^2 + (x_2 - \tau_2^i)^2}$,

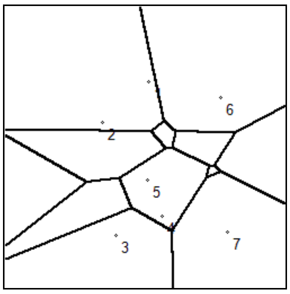
$\rho(x) = 1\ \ \forall x \in \Omega;$ $\quad w_i = 1,\ a_i = 0,\ \forall i = \overline{1, N};$ $\quad b = (0,7;100;100;100;100;0,5;100);$

$\gamma_j^l = b_j / \sum_{q:\, q \in \sigma_l} b_q \quad \forall j = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}$, $L = C_7^2 = 21$.

Для сравнения на рис. 6.1, *б* приведено оптимальное разбиение той же области без учета интегральных ограничений.



а



б

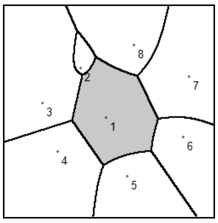
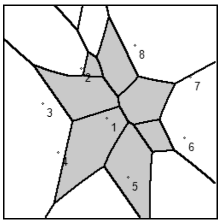
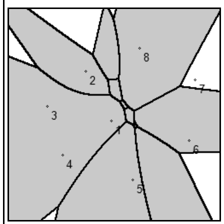
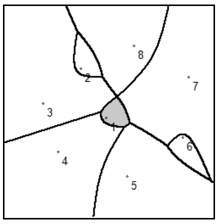
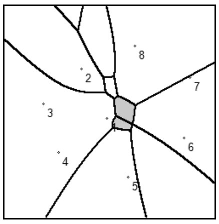
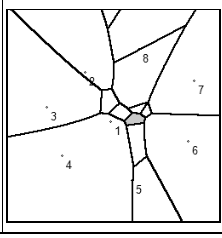
Рис.6.1. Оптимальное дуплексное разбиение квадратной области: а – с учетом интегральных ограничений; б – без учета ограничений на мощности центров

Как и следовало ожидать, при решении задачи ОМРМ с интегральными ограничениями на мощности центров оптимальное значение функционала увеличилось с 384,26 до 558,93.

Влияние величины мощности центра на результат мультиплексного разбиения иллюстрирует Табл.6.1. Здесь приведены разбиения k-го порядка квадратной области для 8-ми фиксированных центров в случае, когда правые части условий неравенств задачи **А3-**k одинаковы и настолько большие, что мощности центров можно считать неограниченными, и когда некоторые центры имеют на порядок меньшую мощность, чем остальные. Для того, чтобы понять, как изменяются "сферы влияния" центров в зависимости от кратности разбиения и от ограничений на мощности центров, на рисунках выделена такая сфера для центра τ_1.

Заметим, что константы $b_i, i = \overline{1, N}$ задавались так, чтобы при $k = 1,2,3$ выполнялись условия (4.4) разрешимости задачи мультиплексного разбиения.

Табл.6.1. Влияние ограничений на мощность двух фиксированных центров на границы мультиплексного разбиения квадратной области

№	*Исходные данные:* N, b, a, w	*Оптимальное разбиение* k *-го порядка*		
		$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
1	$N = 8$, $a = (1,3,1,1,2,2,1,2)$, $b_i = 100,\ \forall i = \overline{1, N}$ $w_i = 1,\ \forall i = \overline{1, N}$			
2	$N = 8$, $a = (1,3,1,1,2,2,1,2)$, $b_{3,4,8} = 30;\ b_{1,6} = 3;$ $b_2 = 10;\ b_{5,7} = 50;$ $w_i = 1,\ \forall i = \overline{1, N}$			

Как известно [6 – 8, 17], часто при решении непрерывных задач ОРМ результирующим разбиением заданного ограниченного множества является диаграмма Вороного, точками-генераторами которой выступают сервисные центры. Представленный здесь новый класс непрерывных линейных задач оптимального мультиплексного разбиения множеств и разработанный математический а алгоритмический аппарат их решения открывает возможность построения диаграмм Вороного высших порядков и их различных обобщений – взвешенных, с ограничениями на мощности ячеек Вороного, с учетом мощностей точек-генераторов, с оптимальным размещением точек-генераторов в заданной ограниченной области (см. рис. 6.2, 6.3). На рис. 6.4, 6.5

представлены диаграммы Вороного взвешенных областей с оптимальным размещением центров (чем больше вес точки, тем темнее ее цвет).

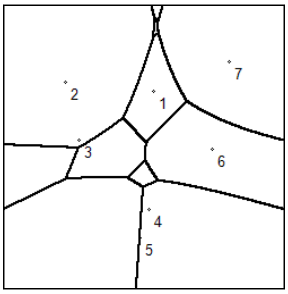


Рис.6.2. Аддитивно взвешенная диаграмма Вороного 3-го порядка с оптимальным размещением точек-генераторов.

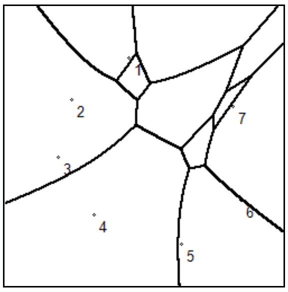


Рис.6.3. Диаграмма Вороного 3-го порядка с ограничениями на мощности точек-генераторов.

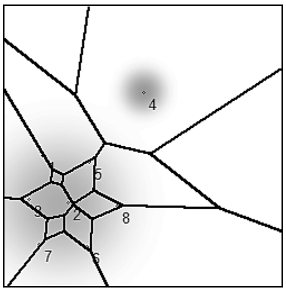


Рис.6.4. Диаграмма Вороного 2-го порядка взвешенной области с оптимальным размещением точек-генераторов.

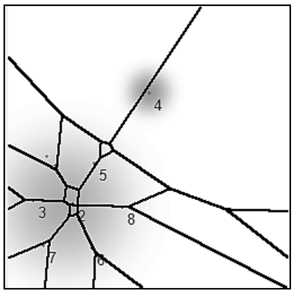


Рис.6.5. Диаграмма Вороного 3-го порядка взвешенной области с оптимальным размещением точек-генераторов.

7. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

В работе представлены линейные задачи мультиплексного разбиения континуальных множеств при наличии интегральных ограничений, которые являются новыми по своей математической постановке, хотя включают в себя как частный случай линейные непрерывные задачи оптимального разбиения множеств, подробно изученных, например, в [6]. Описан метод, разработан и программно реализован численный алгоритм решения задачи. Получено и теоретически обосновано оптимальное решение задачи ОМРМ с ограничениями, как в случае фиксированных центров, так и при условии их оптимального размещения в заданной области.

В дальнейшем интерес представляет исследование свойств непрерывных задач ОМРМ с ограничениями и их оптимальных решений.

Кроме того, как указано в работе [3], функционалом качества мультиплексного разбиения множества может выступать также один из приведенных ниже:

$$F_2(\overline{\omega}) = \sum_{l=1}^{L} \int\limits_{\Omega_{\sigma_l}} \max_{i \in \sigma_l} \left(c(x, \tau_i) / w_i + a_i \right) \rho(x) dx;$$

$$F_3(\overline{\omega}) = \sum_{l=1}^{L} \sup_{x \in \Omega_{\sigma_l}} \max_{i \in \sigma_l} \left(c(x, \tau_i) / w_i + a_i \right) \rho(x);$$

$$F_4(\overline{\omega}) = \max_{l=\overline{1,L}} \sup_{x \in \Omega_{\sigma_l}} \max_{i \in \sigma_l} \left(c(x, \tau_i) / w_i + a_i \right) \rho(x),$$

где все обозначения, функции и параметры такие же, как и в задаче **А-**k. Непрерывные задачи оптимального мультиплексного разбиения множеств с такими критериями выходят за рамки линейных задач ОМРМ и требуют своего дополнительного исследования, теоретического обоснования методов решения. Такие задачи также составляют предмет дальнейших научных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коряшкина Л.С. Обобщение одного класса задач бесконечномерного математического программирования / Л.С. Коряшкина // Математичне та імітаційне моделювання систем. МОДС 2015: тези допов. Десятої міжнар. наук.-практ. конф., 22 – 26 червня 2015 р. – Чернігів: ЧНТУ, 2015.– С. 160 – 164.
2. Коряшкіна Л.С. Розширення одного класу нескінченновимірних оптимізаційних задач / Л.С. Коряшкіна // Вісн. Черкаського ун-ту. Сер. Прикл. матем. Інф. – 2015. – № 18 (351). – С. 28 – 36.
3. Коряшкина Л.С. О способах задания функционала качества в задачах мультиплексного разбиения множеств / Л.С. Коряшкина // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 22 – 23 окт. 2015 г. / Брест.гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест : БрГУ, 2015. – С. 40 – 41.
4. Череватенко А.П. Об одном способе построения диаграмм Вороного высших множеств / А.П. Череватенко // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 22–23 окт. 2015 г. / Брест.гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест : БрГУ, 2015. – С. 30 – 31.
5. Коряшкина Л.С. Об одном подходе к территориальной сегментации рынка услуг / Л.С. Коряшкина, А.П. Череватенко // Современные информационные и коммуникационные технологии на транспорте, в промышленности и образовании: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., 16 – 17 декабря 2015 г. – Дн-ск: ДНУЖТ им. В.А. Лазаряна, 2015. – С. 81
6. Киселева Е.М. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К.: Наук. думка, 2013. – 606 с.
7. Kiseleva E.M. Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing Voronoi Diagrams and Their Generalizations. I. Theoretical Foundations / E.M. Kiseleva, L.S. Koriashkina // Cybernetics and Systems Analysis. – 2015. – Vol. 51, Issue 3. – P. 325 – 335.
8. Kiseleva E. M. The Theory of Continuous Optimal Set Partitioning Problems as a Universal Mathematical Formalism for Constructing the Voronoi Diagram and its Generalizations. II. Algorithms for constructing Voronoi Diagrams based on the

theory of optimal partitioning of sets / E.M. Kiseleva, L.S. Koriashkina // Cybernetics and Systems Analysis. – 2015. – Vol. 51, Issue 4. – P. 3 – 12.
9. Koriashkina L.S. Continuous problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints and solving methods/ L.S. Koriashkina, A.P. Cherevatenko // Journal of Computational & Applied Mathematics. – 2015. – № 2 (119). – P. 15 – 32.
10. Cherevatenko A. On solutions properties of continuous linear problems of optimal multiplex-partitioning of sets without constraints / A. Cherevatenko // Proceedings of the 5th International youth science forum "Litteris et Artibus", 26 – 28 November 2015. – Lviv: Lviv Polytechnic Publishing House, 2015. – C. 22 – 25.
11. Boissonnat J.-D. A semidynamic construction of higher-order Voronoi diagrams and its randomized analysis. / J.-D. Boissonnat, O. Devillers, M. Teillaud // Algorithmica. – 1993. – Vol. 9. – P. 329 – 356.
12. Balzer M. Capacity – Constrained Voronoi Diagrams in Continuous Spaces. / M. Balzer // The International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering. – 2009. – 10 p.
13. Таха Х.А. Введение в исследование операций – 7-е изд. / Х.А.Таха. - М.: Вильямс, 2005. - 912 с.
14. Кириллов А.А. Теоремы и задачи функционального анализа: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и доп. / А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.— 400 с.
15. Васильев Ф.П. Методы оптимизации / Ф.П. Васильев. - М.: Факториал пресс, 2002. - 824 с.
16. Шор Н.З. Методы недифференцируемой оптимизации / Н.З. Шор. – К.: Наук. думка, 1979. – 200 с.
17. Киселева Е.М. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и r-алгоритмы / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К.: Наук. думка, 2015. – 400 с.

Надійшла - 24.11.2015.