

УДК 519.854.2

## Складання розкладу виконання завдань неідентичними паралельними пристроями з метою максимально рівномірного завантаження пристроїв

О. Г. Жданова, М. О. Сперкач

*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,  
Україна*

У статті розглядається задача календарного планування виконання множини завдань паралельними пристроями різної продуктивності з метою побудови розкладу з максимально рівномірним розподілом завдань між пристроями. Згідно з методологією побудови ПДС-алгоритмів, розроблені достатні умови оптимальності розкладів; визначено множину перестановок, які дозволяють послідовно покращувати значення критерію. Розроблено поліноміальну складову ПДС-алгоритму розв'язання задачі. Розглянуто практичне застосування розробленого алгоритму.

**Ключові слова:** календарне планування, розклад, паралельні пристрої різної продуктивності, ПДС-алгоритм, максимально рівномірне завантаження пристроїв.

В статье рассматривается задача календарного планирования выполнения множества заданных параллельными устройствами различной производительности с целью построения расписания с максимально равномерным распределением заданных между устройствами. Согласно методологии построения ПДС-алгоритмов, разработаны достаточные признаки оптимальности расписаний; определено множество перестановок, позволяющих последовательно улучшать значение критерия. Разработана полиномиальная составляющая ПДС-алгоритма решения задачи. Рассмотрено практическое применение разработанного алгоритма.

**Ключевые слова:** календарное планирование, расписание, параллельные устройства разной производительности, ПДС-алгоритм, максимально равномерная загрузка устройств.

In the article the problem of scheduling a set of tasks on parallel devices of various capacities is considered to build a schedule with the most even distribution of tasks between devices. According to the methodology of PDC-algorithms, the sufficient conditions for schedules optimality are developed; the set of permutations is defined that allow to consistently improve the value of the criterion. The polynomial component of PDC-algorithm of the problem solution is developed. The practical application of the algorithm is considered.

**Key words:** scheduling, schedule, parallel devices of various productivity, PDC-algorithm, the most even load of devices.

### 1. Загальна постановка задачі та її актуальність

Задано множину завдань  $J = \{1, 2, \dots, n\}$  та кількість пристроїв  $m$ . Пристрої працюють паралельно і є взаємозамінними у тому сенсі, що кожен з пристроїв може виконувати будь-яке завдання з множини  $J$ . Пристрої відрізняються один від одного продуктивністю виконання завдань, при цьому можна впорядкувати пристрої за швидкістю виконання завдання і цей порядок однаковий для всіх завдань: для кожного пристрою  $i$  існує коефіцієнт  $k_i$  (коефіцієнт продуктивності) такий, що тривалість виконання завдання  $j$  на пристрої  $i$

дорівнює  $k_i p_j$ . «Еталонним» будемо називати пристрій з коефіцієнтом продуктивності  $k=1$ . В цьому сенсі величина  $p_j$  є тривалістю виконання завдання  $j$  на еталонному пристрої (далі вважатимемо, що всі  $p_j$  є цілими величинами). Передбачається, що всі завдання множини  $J$  надходять одночасно (в нульовий момент часу), процес обслуговування кожного завдання протікає без переривань до завершення обслуговування завдань.

Необхідно побудувати розклад з максимально рівномірним завантаженням пристроїв (розклад, у якого досягає мінімуму максимальне з відхилень моментів завершення виконання завдань пристроями від ідеального розрахункового).

## 2. Джерела дослідження авторів

За підходом вирішення ця задача є близькою до задачі, що розглядалася у роботі [1]. Їх відмінність в наступному: в задачі з роботи [1], по суті, намагались мінімізувати загальний час виконання робіт; в поточній задачі ми намагатимемось якомога рівномірно навантажити пристрої.

За змістом ця задача є близькою до задачі, що розглядалася у роботах [2, 3]. Їх відмінність полягає в наступному: в задачі з робіт [2, 3] величина, відносно якої вимірюється відхилення є заданою (загальний директивний термін завдань); в поточній задачі ця величина є розрахунковою (представляє собою ідеальне значення моменту завершення виконання усіх завдань).

Для вирішення цієї задачі була застосована методологія побудови ПДС-алгоритмів [4].

## 3. Цілі роботи

Цілями цієї роботи є: дослідити властивості задачі, розробити ефективний наближений алгоритм її вирішення.

## 4. Дослідження властивостей задачі

Визначимо  $C^*$  – як мінімально можливий час, за який усі пристрої могли б виконати усі завдання. Цей час розраховується так:

$$C^* = \frac{\sum_{j=1}^n p_j}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{k_i}} = \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{k_i}}.$$

В ідеальному випадку розклад є *рівномірним* – у ньому усі пристрої обслуговують усі завдання за час  $C^*$ .

Введемо величину  $c_i^* = \frac{C^*}{k_i}$  – «ідеальну» зведену тривалість зайнятості пристрою  $i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) («ідеальний» момент завершення виконання завдань пристроєм  $i$ ). У разі рівномірного розкладу справедливо наступне:

$$\sum_{j=1}^n p_j = \sum_{i=1}^m c_i^*, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n p_j = \sum_{i=1}^m \frac{C^*}{k_i}, \quad \sum_{j=1}^n p_j = C^* \sum_{i=1}^m \frac{1}{k_i}$$

(сумарний час виконання усіх завдань в еталонних значеннях тривалостей дорівнює сумі ідеальних зведених тривалостей зайнятості пристроїв).

Величина  $C^*$  може бути як цілим так і не цілим числом.

Розглянемо деякий допустимий розклад  $\sigma$ . Позначимо в цьому розкладі:

$$J_i(\sigma) - \text{множину завдань, що виконується пристроєм } i; \quad C_i(\sigma) = \sum_{j \in J_i(\sigma)} k_i p_j -$$

момент завершення виконання усіх завдань пристроєм  $i$  ( $i = \overline{1, m}$ );

$$\Delta_i(\sigma) = \max\left\{0; C_i(\sigma) - C^*\right\} = \max\left\{0; \sum_{j \in J_i(\sigma)} k_i p_j - C^*\right\} - \text{виступ пристрою } i;$$

$$R_i(\sigma) = \max\left\{0; C^* - C_i(\sigma)\right\} = \max\left\{0; C^* - \sum_{j \in J_i(\sigma)} k_i p_j\right\} - \text{резерв пристрою } i.$$

Позначимо через  $C_i'(\sigma) = \frac{C_i(\sigma)}{k_i}$  зведений момент завершення виконання усіх

завдань пристроєм  $i$  ( $i = \overline{1, m}$ ), розраховану у еталонних тривалостях виконання завдань.

Відповідні зведені величини:

$$\Delta_i'(\sigma) = \max\left\{0; C_i'(\sigma) - c_i^*\right\}, \quad i = \overline{1, m}; \quad R_i'(\sigma) = \max\left\{0; c_i^* - C_i'(\sigma)\right\}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Визначимо:  $I_\Delta(\sigma)$  – множина пристроїв, для яких  $\Delta_i(\sigma) > 0$ ;  $I_R(\sigma)$  – множина пристроїв, для яких  $R_i(\sigma) > 0$ ;  $I_0(\sigma)$  – множина пристроїв, для яких  $\Delta_i(\sigma) = R_i(\sigma) = 0$ .

Для введених величин має місце наступне:

$$\sum_{j \in J_i(\sigma)} k_i p_j = C^* - R_i(\sigma) + \Delta_i(\sigma), \quad i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Розділимо  $i$ -те рівняння в (2) на  $k_i$  ( $k_i \neq 0$ ):

$$\sum_{j \in J_i(\sigma)} p_j = \frac{C^*}{k_i} - \frac{R_i(\sigma)}{k_i} + \frac{\Delta_i(\sigma)}{k_i}, \quad i = \overline{1, m}; \quad \sum_{j \in J_i(\sigma)} p_j = c_i^* - R_i'(\sigma) + \Delta_i'(\sigma), \quad i = \overline{1, m}.$$

Для побудови початкового розкладу застосуємо алгоритм **A03** з роботи [1].

Застосовуючи методологію побудови ПДС-алгоритмів [4], згідно з якою поліноміальна складова алгоритму породжується логіко-аналітичними умовами, виконання яких гарантує оптимальність отриманого рішення, визначимо достатні умови оптимальності розкладів.

### 5. Достатні умови оптимальності розкладів

З урахуванням позначень, розкладом з максимально рівномірним завантаженням будемо вважати розклад, у якого досягає мінімуму максимальне з відхилень моментів завершення пристроями всіх своїх завдань від «ідеального» часу  $C^*$  завершення усіх завдань:  $\max_i \{R_i(\sigma); \Delta_i(\sigma)\} \rightarrow \min$ .

«Ідеальним» розкладом є рівномірний розклад, тобто розклад, у якого  $\sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma) = \sum_{i=1}^m R_i(\sigma) = 0$ . Рівномірний розклад можливо отримати тільки тоді,

коли  $C^*$  – ціле і усі  $c_i^* = \frac{C^*}{k_i}$  також є цілими числами (інакше не можливі

рівності  $\sum_{j \in J_i} p_j = c_i^*$ ,  $i = \overline{1, m}$  – ліві частини рівностей за припущенням є сумами цілих величин).

Якщо виконується умова:

$$\exists i \mid c_i^* \notin Z \quad (3)$$

(серед величин  $c_i^*$  є не цілі), то у цьому випадку принципово неможливо побудувати рівномірний розклад.

$$\text{Позначимо: } \delta = \sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m \left\lfloor \frac{C^*}{k_i} \right\rfloor = \sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m \lfloor c_i^* \rfloor.$$

Враховуючи (1) маємо, що  $\delta \geq 0$ , ціле.

За умови (3) маємо, що  $\delta > 0$ . Визначимо, який вигляд матиме «ідеальний» розклад у цьому випадку. Іншими словами, визначимо *контур* «ідеального» оптимального розкладу (тобто визначимо моменти завершення пристроями своїх завдань в ідеальному розкладі виконання завдань в об'ємі  $\sum_{j=1}^n p_j$ ).

Представимо, що ми розподілили між пристроями деяку кількість завдань (нехай вони складають множину  $\bar{J} \subset J$ ) і отримали неповний розклад  $\bar{\sigma}$ , у якому:

$$\sum_{j \in \bar{J}_i} p_j = \lfloor c_i^* \rfloor, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

тут  $\bar{J}_i$  – множина завдань, які в отриманому неповному розкладі  $\bar{\sigma}$  виконуються пристроєм  $i$ ). Відмітимо, що залишились недорозподіленими завдання, сумарна тривалість виконання яких становить:

$$\delta = \sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m \sum_{j \in \bar{J}_i} p_j. \quad (5)$$

З урахуванням (4), рівняння (5) має вигляд:

$$\delta = \sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m \lfloor c_i^* \rfloor. \quad (6)$$

Припустимо, що залишилось розподілити  $\delta$  завдань, еталонна тривалість кожного з яких дорівнює 1.

Отже, перед нами постає така задача: дорозподілити ці одиничні завдання між пристроями так, щоб максимально рівномірно навантажити пристрої. В результаті ми отримуємо розклад, у якому робота в об'ємі  $\sum_{j=1}^n p_j$  розподілена

найкращим чином відповідно обраного критерію.

Позначимо:

$$e_i = c_i^* - \sum_{j \in J_i} p_j, \quad i = \overline{1, m}, \quad (7)$$

де  $e_i$  – резерв пристрою  $i$  у неповному розкладі  $\bar{\sigma}$ , в якому недорозподілено  $\delta$  одиничних завдань.

З урахуванням (6) маємо:

$$e_i = c_i^* - \lfloor c_i^* \rfloor, \quad i = \overline{1, m}. \quad (8)$$

З (8) слідує, що  $\forall e_i \geq 0$ .

Просумуємо рівняння (8) по  $i$ :  $\sum_{i=1}^m e_i = \sum_{i=1}^m c_i^* - \sum_{i=1}^m \lfloor c_i^* \rfloor$ ,

з урахування (1) маємо:  $\sum_{i=1}^m e_i = \sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m \lfloor c_i^* \rfloor = \delta$ .

Таким чином, можна сформулювати наступну **допоміжну оптимізаційну задачу**: необхідно  $\delta$  завдань одиничної довжини розподілити між  $m$  пристроями, за умов, що пристрій  $i$  має резерв  $e_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  і  $\sum_{i=1}^m e_i = \delta$  з метою рівномірного завантаження пристроїв (з урахуванням продуктивності пристроїв).

Якщо  $x_i$  – кількість «одиничних» еталонних завдань, призначених на пристрій  $i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , тоді критерій задачі має такий вигляд:

$$\max_i \left\{ C^* - \left( \lfloor c_i^* \rfloor + x_i \right) k_i \right\} \rightarrow \min.$$

Виконаємо деякі перетворення:

$$\begin{aligned} \left| C^* - \left( \lfloor c_i^* \rfloor + x_i \right) k_i \right| &= \left| c_i^* k_i - \left( \lfloor c_i^* \rfloor + x_i \right) k_i \right| = \left| c_i^* k_i - \lfloor c_i^* \rfloor k_i - x_i k_i \right| = \\ &= \left| \left( c_i^* - \lfloor c_i^* \rfloor \right) k_i - x_i k_i \right| = \left| e_i k_i - x_i k_i \right|. \end{aligned}$$

Таким чином критерій задачі матиме вигляд:  $\max_i \left\{ k_i (e_i - x_i) \right\} \rightarrow \min$ .

Отже, математична модель цієї задачі має наступний вигляд.

*Змінні:*  $x_i$  – кількість «одичних» еталонних завдань, що повинні бути призначені на пристрій  $i$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

*Обмеження* – кількість «одичних» еталонних завдань становить  $\delta$ :

$$\sum_{i=1}^m x_i = \delta; \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad \text{цілі.} \quad (9)$$

*Цільова функція:* максимально рівномірне завантаження пристроїв (з урахуванням продуктивностей пристроїв):

$$\max_i \{k_i(e_i - x_i)\} \rightarrow \min. \quad (10)$$

### Алгоритм розв'язання допоміжної оптимізаційної задачі

**Дано:**  $\delta$ ;  $e_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ),  $\sum_{i=1}^m e_i = \delta$ ;  $k_i$  ( $i = \overline{1, m}$ );  $T_i = C^* - e_i k_i$  (тривалість

виконання завдань пристроєм  $i$  в неповному ідеальному розкладі  $\bar{\sigma}$ ) ( $i = \overline{1, m}$ ).

**КРОК 1** Ініціалізація:  $x_i = 0$ ,  $\vartheta_i = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

**КРОК 2** Поки  $\delta \geq 1$  (поки є нерозподілені одичні завдання)

2.1 Знайти варіант призначення поточного одичного завдання:

$$\min \left\{ \begin{array}{l} \max\{k_1|x_1 - e_1 + \vartheta_1|; k_2|x_2 - e_2 + \vartheta_2|; \dots; k_m|x_m - e_m + \vartheta_m|\} \\ \max\{k_1|x_1 - e_1 + \vartheta_1|; k_2|x_2 - e_2 + \vartheta_2|; \dots; k_m|x_m - e_m + \vartheta_m|\} \\ \dots \\ \max\{k_1|x_1 - e_1 + \vartheta_1|; k_2|x_2 - e_2 + \vartheta_2|; \dots; k_m|x_m - e_m + \vartheta_m|\} \end{array} \right\} \quad (11)$$

Нехай мінімум відповідає пристрою  $i = q$ .

2.2 Призначити на пристрій  $q$  одичне завдання:  $x_q = x_q + 1$ ,

$$\vartheta_q = x_q - e_q, \quad \delta = \delta - 1.$$

2.3 Перерахувати тривалість виконання усіх завдань пристрою  $q$ :

$$T_q = T_q + k_q.$$

### КІНЕЦЬ АЛГОРИТМУ

Отже, отримали такі ознаки оптимальності (достатні умови оптимальності).

#### Достатня умови оптимальності 1

Випадок, коли принципово можливо отримати рівномірний розклад

$$\text{Якщо } C^* = \frac{\sum_{j=1}^n p_j}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{k_i}} = \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{k_i}} - \text{ціле та усі } c_i^* = \frac{C^*}{k_i} \text{ також є цілими числами і}$$

при цьому у розкладі  $\sigma$  виконується:  $C_i'(\sigma) = \sum_{j \in J_i} p_j = c_i^*$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,

$$(C_i(\sigma) = k_i \sum_{j \in J_i} p_j = k_i c_i^* = C^*, \quad i = \overline{1, m}) \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^m \Delta_i(\sigma) = \sum_{i=1}^m R_i(\sigma) = 0,$$

то це означає, що поточний розклад є рівномірним (оптимальним).

### Достатня умови оптимальності 2

Випадок, коли принципово не можливо отримати рівномірний розклад

Якщо  $\delta = \sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m \lfloor c_i^* \rfloor > 0$  ( $\exists i \mid c_i^* = \frac{C^*}{k_i} \notin Z$ ), то розв'язати допоміжну

оптимізаційну задачу.

Нехай  $x_i^*$ ,  $i = \overline{1, m}$  – оптимальний розв'язок допоміжної оптимізаційної задачі (9)-(10),  $T_i^* = C^* + \lfloor k_i(e_i - x_i^*) \rfloor$  – тривалість виконання завдань в «ідеальному» розкладі.

Тоді розклад  $\sigma$ , в якому:  $C'_i(\sigma) = \lfloor c_i^* \rfloor + x_i^*$ ,  $i = \overline{1, m}$

або  $C_i(\sigma) = T_i^*$ ,  $i = \overline{1, m}$ , є оптимальним.

З урахуванням достатніх умов оптимальності розкладів визначимо множину перестановок, яка дозволить послідовно покращувати значення критерію.

### 6. Розробка множини перестановок

Після розв'язання допоміжної задачі отримали контур оптимального розкладу для заданої сумарної довжини завдань множини  $J$ , у якого  $i$ -й пристрій завершує свої завдання у момент:

- $C^*$ , якщо  $\delta = 0$ ;
- $T_i^*$ , якщо  $\delta > 0$ .

Введемо позначення:

$$Z_i(\sigma) = \max\left\{0; C_i(\sigma) - T_i^*\right\} = \max\left\{0; \sum_{j \in J_i(\sigma)} k_j p_j - T_i^*\right\} \quad (\text{аналог величини } \Delta_i(\sigma)),$$

але в даному випадку розраховується відхилення від «ідеальної» тривалості зайнятості пристрою  $T_i^*$  в оптимальному контурі розкладу);

$$E_i(\sigma) = \max\left\{0; T_i^* - C_i(\sigma)\right\} = \max\left\{0; T_i^* - \sum_{j \in J_i(\sigma)} k_j p_j\right\} \quad (\text{аналог величини } R_i(\sigma));$$

$I_Z(\sigma)$  – множина таких пристроїв, для яких  $Z_i(\sigma) > 0$ ;

$I_E(\sigma)$  – множина таких пристроїв, для яких  $E_i(\sigma) > 0$ .

Для покращення розкладу необхідно направити зусилля на зменшення величини  $\max_i Z_i(\sigma)$ . Для цього пропонується використовувати обмін завдань

між пристроями з множин  $I_Z(\sigma)$  та  $I_E(\sigma)$ : коли деяка підмножина завдань з пристрою  $h$  (позначимо її як  $K_h(\sigma)$ ,  $K_h(\sigma) \subseteq J_h(\sigma)$ ) обмінюється з деякою підмножиною завдань з пристрою  $s$  (позначимо цю підмножину як  $L_s(\sigma)$ ,

$L_s(\sigma) \subseteq J_s(\sigma)$ ). Позначимо через  $\theta$  різницю між сумами еталонних тривалостей завдань, які приймають участь в обміні:  $\Theta = \sum_{j \in K_h(\sigma)} P_j - \sum_{j \in L_s(\sigma)} P_j$ .

Нехай  $\sigma^1$  – розклад, який отримано після виконання перестановки. Для того, щоб перестановка призвела до покращення (тобто  $\sum_{i=1}^m Z_i(\sigma) - \sum_{i=1}^m Z_i(\sigma^1) > 0$ ), необхідно, щоб  $\theta > 0$ .

Множину перестановок, в залежності від їх наслідків, можна розділити на наступні типи:

- зменшення резерву (виступу) одного пристрою за рахунок зменшення виступу (резерву) іншого (тип  $Ak$ );
- зменшення виступу з появою виступу на іншому пристрої (тип  $B\Delta k$ );
- зменшення резерву з появою резерву на іншому пристрої (тип  $BRk$ );
- виключення виступу (резерву) пристрою з появою резерву (виступу) (тип  $Bk$ );
- перерозподіл виступів (тип  $\Gamma\Delta k$ );
- перерозподіл резервів (тип  $\Gamma Rk$ ).

Узагальнена характеристика та властивості перестановок наведені в табл. 1.

Табл.1. Властивості перестановок

Тип перестановки	Умови виконання перестановки	Характеристики результуючого розкладу $\sigma^1$
$Ak$	$\theta > 0$ , $\theta k_h \leq Z_h(\sigma)$ , $\theta k_s \leq E_s(\sigma)$	$Z_h(\sigma^1) = Z_h(\sigma) - \theta k_h$ , $E_s(\sigma^1) = E_s(\sigma) - \theta k_s$
$B\Delta k$	$\theta > 0$ , $\theta k_s \leq Z_h(\sigma)$ , $\theta k_h > E_s(\sigma)$	$Z_h(\sigma^1) = Z_h(\sigma) - \theta k_s$ , $Z_s(\sigma^1) = \theta k_h - E_s(\sigma)$
$BRk$	$\theta > 0$ , $\theta k_s > Z_h(\sigma)$ , $\theta k_h \leq E_s(\sigma)$	$Z_h(\sigma^1) = \theta k_s - Z_h(\sigma)$ , $Z_s(\sigma^1) = E_s(\sigma) - \theta k_h$
$Bk$	$\theta > 0$ , $\theta k_s > Z_h(\sigma)$ , $\theta k_h \geq E_s(\sigma)$	$Z_h(\sigma^1) = \theta k_s - Z_h(\sigma)$ , $Z_s(\sigma^1) = \theta k_h - E_s(\sigma)$
$\Gamma\Delta k$	$\theta > 0$ , $\theta k_s < Z_h(\sigma)$ , $\theta k_h < Z_h(\sigma) - Z_s(\sigma)$	$Z_h(\sigma^1) = Z_h(\sigma) - \theta k_s$ , $Z_s(\sigma^1) = Z_s(\sigma) + \theta k_h$
$\Gamma Rk$	$\theta > 0$ , $\theta k_h \leq E_s(\sigma)$ , $\theta k_s < E_h(\sigma) - E_s(\sigma)$	$E_h(\sigma^1) = E_h(\sigma) - \theta k_s$ , $E_s(\sigma^1) = E_s(\sigma) + \theta k_h$



Перестановки усіх типів, в свою чергу, можна розділити на підтипи в залежності від кількості завдань, які приймають участь в перестановці (потужностей множин  $K_h(\sigma)$  та  $L_s(\sigma)$ ).

В результаті виконання перестановок типу **BRk** для обраної пари пристроїв  $h-s$  отримуємо таке зменшення значення максимального з резервів цих пристроїв в двох розкладах:

$$E_s(\sigma) - \max\{E_h(\sigma^1), E_s(\sigma^1)\} = \min\{E_s(\sigma), \theta \cdot k_s, E_s(\sigma) + Z_h(\sigma) - \theta \cdot k_h\}.$$

В результаті виконання перестановок типу **GRk** для обраної пари пристроїв  $h-s$  отримуємо наступне зменшення значення максимального з резервів цих пристроїв в двох розкладах:

$$E_h(\sigma) - \max\{E_h(\sigma^1), E_s(\sigma^1)\} = \min\{\theta \cdot k_h, E_h(\sigma) - E_s(\sigma) - \theta \cdot k_s\}.$$

Результати виконання перестановок для зменшення значення максимального з виступів між обраною парою пристроїв наведені у роботі [1].

Розроблені перестановки покладені в основу поліноміальної складової ПДС-алгоритму розв'язання задачі.

### 7. ПДС-алгоритм рішення задачі

На основі достатніх умов оптимальності та розробленої множини перестановок побудований алгоритм максимально рівномірного завантаження паралельних пристроїв різної продуктивності в розкладі.

#### Опис алгоритму

**КРОК 0** Визначити оптимальний контур (достатніх умов оптимальності)

**КРОК 1** Побудувати початковий розклад  $\sigma^0$ .

**КРОК 2**  $\sigma = \sigma^0$ . Визначити  $\delta$ .

**КРОК 3** *Перевірити виконання достатніх умов оптимальності*

**3.1** **ЯКЩО**  $\delta = 0$  і виконується перша достатня умова оптимальності

**ТО** перейти на **КРОК 6** ( $\sigma$  – оптимальний розклад)

**ІНАКШЕ** перейти на **КРОК 4**

**3.2** **ЯКЩО**  $\delta > 0$

**ТО**

**3.2.1** Розв'язати допоміжну оптимізаційну задачу.

**3.2.2.** **ЯКЩО** виконується друга достатня умова оптимальності

**ТО** перейти на **КРОК 6** ( $\sigma$  – оптимальний розклад)

**КРОК 4** Визначити пристрій  $q$ , якому відповідає максимум  $\max_i \{Z_i(\sigma); E_i(\sigma)\}$ .

**КРОК 5** **ЯКЩО**  $q \in I_Z(\sigma)$ , **ТО** перейти на **КРОК 6**

**ІНАКШЕ** ( $q \in I_E(\sigma)$ ) перейти на **КРОК 7**.

**КРОК 6** Для пристрою  $h = q$  перебираючи усі пристрої  $s \in I_E(\sigma)$  виконати перестановку типу **Ak**, **BΔk** або **Bk**.

**ЯКЩО** таких перестановок не знайшлося,

**ТО**

**6.1** Для пристрою  $h = q$  перебираючи усі пристрої  $s \in I_0(\sigma) \cup I_Z(\sigma)$  виконати перестановку типу  $\Gamma \Delta k$ .

**6.2** **ЯКЩО** таких перестановок не знайшлося,

**ТО** кінець алгоритму,

**ІНАКШЕ** перейти на **КРОК 2**.

**ІНАКШЕ** перейти на **КРОК 2**.

**КРОК 7** Для пристрою  $s = q$  перебираючи всі пристрої  $h \in I_Z(\sigma)$  виконати перестановку типу  $Ak$ ,  $Bk$  або  $Bk$ .

**ЯКЩО** таких перестановок не знайшлося,

**ТО**

**7.1** Для пристрою  $s = q$  перебираючи всі пристрої  $s \in I_0(\sigma) \cup I_E(\sigma)$  виконати перестановку типу  $\Gamma Rk$ .

**7.2** **ЯКЩО** таких перестановок не знайшлося,

**ТО** кінець алгоритму,

**ІНАКШЕ** перейти на **КРОК 2**.

**ІНАКШЕ** перейти на **КРОК 2**.

#### **КІНЕЦЬ АЛГОРИТМУ**

Можливі варіанти реалізації **КРОКІВ 6** та **7**:

- 1) знаходимо першу перестановку, яка покращує розклад та виконуємо її;
- 2) перебираємо всі допустимі перестановки, знаходимо серед них найефективнішу та виконуємо її.

Складність алгоритму складає  $O(n^2W)$ , де  $W = \sum_{i=1}^n p_i$ .

### **8. Приклад застосування алгоритму**

Візьмемо для прикладу задачу, в якій кількість пристроїв  $m = 6$ , коефіцієнти продуктивності яких представлені у табл. 2,  $n = 20$  завдань, тривалості яких представлені в табл. 3 (завдання перенумеровані за порядком зменшення тривалостей їх виконання).

*Табл.2. Коефіцієнти продуктивності пристроїв*

Пристрій, $i$	1	2	3	4	5	6
Коеф. продукт., $k_i$	1	1,2	1,5	2	2,5	3

*Табл.3. Тривалості завдань*

Завдання, $j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Тривалість, $p_j$	10	10	9	9	8	8	7	7	7	6
Завдання, $j$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Тривалість, $p_j$	6	6	5	5	4	4	4	3	3	2

Визначимо основні розрахункові величини алгоритму.

Мінімально можливий час, за який усі пристрої могли б виконати усі завдання:  $C^* = 32\frac{53}{56}$ .

«Ідеальні» зведені тривалості зайнятості пристроїв наступні:

$$c_1^* = 32\frac{53}{56}, c_2^* = 27\frac{5}{11}, c_3^* = 21\frac{27}{28}, c_4^* = 16\frac{9}{19}, c_5^* = 13\frac{5}{28}, c_6^* = 10\frac{55}{56}.$$

Визначимо величини  $\lfloor c_i^* \rfloor, i=1, m$ :

$$\lfloor c_1^* \rfloor = 32, \lfloor c_2^* \rfloor = 27, \lfloor c_3^* \rfloor = 21, \lfloor c_4^* \rfloor = 16, \lfloor c_5^* \rfloor = 13, \lfloor c_6^* \rfloor = 10.$$

Далі визначимо:  $\delta = \sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m \lfloor c_i^* \rfloor = 4$ . Оскільки,  $\delta > 0$ , то для визначення

контуру ідеального розкладу розв'яжемо допоміжну оптимізаційну задачу.

Визначимо  $e_i$  резерв пристрою  $i$  у неповному розкладі  $\bar{\sigma}^0$ :

$$e_1 = \frac{53}{56}, e_2 = \frac{5}{11}, e_3 = \frac{27}{28}, e_4 = \frac{9}{19}, e_5 = \frac{5}{28}, e_6 = \frac{55}{56}.$$

Далі розподілимо  $\delta$  завдань одиничної довжини між  $m$  пристроями, за умов, що пристрій  $i$  має резерв  $e_i, i=1, m$  і  $\sum_{i=1}^m e_i = \delta$  з метою мінімізації

максимального з виступів (з урахуванням продуктивності пристроїв).

Визначимо  $x_i$  кількість «одиничних» еталонних завдань, що повинні бути

призначені на пристрій  $i, i=1, m$ :  $\sum_{i=1}^6 x_i = 4$ .

Розподілимо «одиничні» еталонні завдання за пристроями та наведемо результати розподілу і значення цільової функції у табл. 4.

Табл. 4. Розподіл «одиничних» еталонних завдань за пристроями та значення цільової функції

Пристрій, $i$	1	2	3	4	5	6	
$x_i$	1	1	1	0	0	1	$\sum_{i=1}^6 x_i = 4$
$e_i$				$\frac{9}{19}$	$\frac{5}{28}$		
$\vartheta_i$	$\frac{3}{56}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{56}$	
Відхилення з урахуванням продуктивності	$\frac{3}{56}$	$\frac{17}{26}$	$\frac{3}{56}$	0	0	$\frac{3}{56}$	$\max_{1 \leq i \leq 6} \{k_i(x_i - e_i + \vartheta_i)\} = \frac{17}{26}$

На рис. 1 наведено ілюстрацію контуру ідеального розкладу  $\sigma$  та на рис. 2 наведено ілюстрацію контуру ідеального розкладу  $\sigma'$  в еталонних величинах.

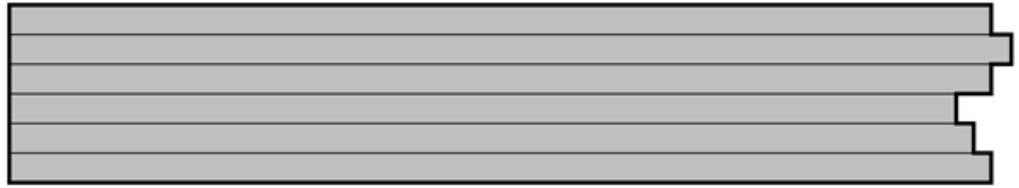


Рис. 1. Контур ідеального розкладу  $\sigma$



Рис. 2. Контур ідеального розкладу  $\sigma'$  в еталонних величинах

Початковий розклад  $\sigma^0$ , побудований за алгоритмом А03, представлено на рис. 3.

На рис. 4 представлено розклад у зведених (еталонних) тривалостях.

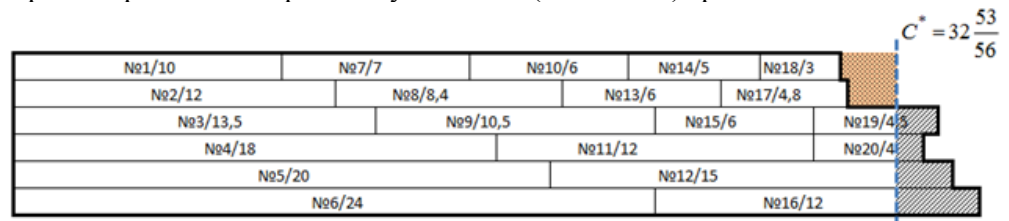


Рис. 3. Початковий розклад  $\sigma^0$

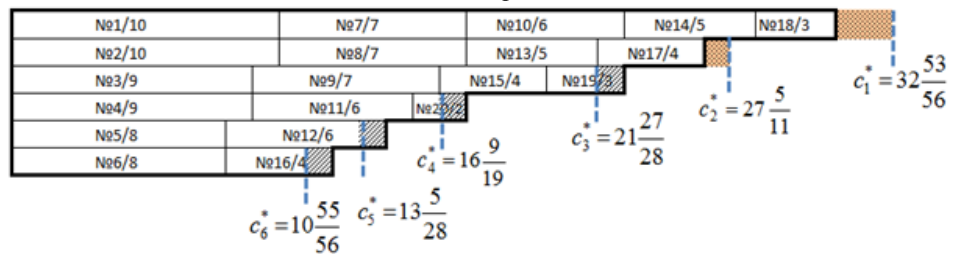


Рис. 4. Початковий розклад  $\sigma^{0'}$  у еталонних тривалостях

Визначимо  $T_i^*$  тривалість виконання завдань в «ідеальному розкладі»:

$$T_1^* = 33, T_2^* = 33 \frac{3}{5}, T_3^* = 33, T_4^* = 32, T_5^* = 32 \frac{1}{2}, T_6^* = 33.$$

Розрахуємо тривалості зайнятості пристроїв у еталонних величинах:

$$T_1'(\sigma^{0'}) = 33, T_2'(\sigma^{0'}) = 28, T_3'(\sigma^{0'}) = 22, T_4'(\sigma^{0'}) = 16, T_5'(\sigma^{0'}) = 13, T_6'(\sigma^{0'}) = 11.$$

Порівняємо контури ідеального розкладу з початковим розкладом  $\sigma^0$  та  $\sigma^{0'}$  (рис. 5 та рис. 6).

№1/10	№7/7	№10/6	№14/5	№18/3	
№2/12	№8/8,4		№13/6	№17/4,8	
№3/13,5		№9/10,5		№15/6	№19/4,5
№4/18			№11/12		№16/4
№5/20			№12/15		
№6/24				№16/12	

Рис.5. Початковий розклад  $\sigma^0$  у порівнянні з контуром ідеального розкладу

№1/10	№7/7	№10/6	№14/5	№18/3	
№2/10	№8/7	№13/5	№17/4		
№3/9	№9/7	№15/4	№19		
№4/9	№11/6	№2			
№5/8	№12/6				
№6/8	№16/4				

Рис.6. Початковий розклад  $\sigma^{0'}$  у порівнянні з контуром ідеального розкладу

Для зменшення кількості можливих варіантів при вирішенні даної задачі будемо застосовувати тільки перестановки підтипу 1-1.

### Ітерація 1

Для початкового розкладу визначимо моменти завершення виконання всіх завдань пристроями:

$$C_1(\sigma^0)=31, C_2(\sigma^0)=31\frac{1}{5}, C_3(\sigma^0)=28\frac{1}{2}, C_4(\sigma^0)=34, C_5(\sigma^0)=35, C_6(\sigma^0)=36.$$

$$\begin{aligned} &\text{Визначимо множини } I_0(\sigma), I_Z(\sigma) \text{ та } I_E(\sigma): I_0(\sigma)=\{0\}; I_Z(\sigma)=\{3;4;5;6\}; \\ &Z_3(\sigma^0)=1\frac{1}{2}, Z_4(\sigma^0)=2, Z_5(\sigma^0)=2\frac{1}{2}, Z_6(\sigma^0)=3; I_E(\sigma)=\{1;2\}; E_1(\sigma^0)=2, \\ &E_2(\sigma^0)=2\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Визначимо пристрій з максимальним відхиленням від контуру ідеального розкладу, таким пристроєм виявився пристрій  $h=6$  ( $h \in I_Z(\sigma)$  – пристрій з максимальним значенням виступу) та визначимо пристрій  $s=2$  ( $s \in I_E(\sigma)$  – пристрій з множини резервів).

Визначимо, яким парам завдань пристроїв 6 та 2 відповідають допустимі перестановки (які призводять до поліпшення розкладу). Для цього спочатку виділимо ті пари завдань, для яких  $\theta = \frac{P_{j_1}}{k_1} - \frac{P_{j_2}}{k_2} > 0$  (до них відносяться

наступні пари завдань: 6-8). А потім проаналізуємо, як співвідносяться величини  $\theta$ ,  $Z_6$  та  $E_2$ , тобто до якого із типів **A**, **B** або **B** відносяться потенційні перестановки. В табл. 5 представлені допустимі перестановки та відповідні їх

значення  $\theta = \frac{P_{j_1}}{k_1} - \frac{P_{j_2}}{k_2}$  (сірим фоном відмічені недопустимі перестановки, тобто перестановки, для яких  $\theta \leq 0$  і/або не виконуються умови перестановок **A**, **B** або **B**).

Табл.5 Значення  $\theta$  для допустимих перестановок завдань прист. 6-2

				Завдання пристрою 2			
				$k_2 = 1,2$			
				№2	№8	№13	№17
				12	8,4	6	4,8
Завдання пристрою 6	$k_6 = 3$	№6	24		1		
		№16	12				

В табл. 6 наведені параметри допустимих для пари пристроїв 6-2 перестановок.

Табл.6 Параметри допустимих перестановок для пари пристроїв 6-2

Пара завдань	$Z_6$	$E_2$	$\theta$	$\frac{Z_6}{k_6} + \frac{E_2}{k_2} - \theta$	Величина покращення	Тип перестановки
6-8	3	$2\frac{2}{5}$	1	2	1	<i>Ak</i>

Виконаємо цю перестановку. На рис. 7 зображено розклад  $\sigma^1$ , отриманий в результаті перестановки.

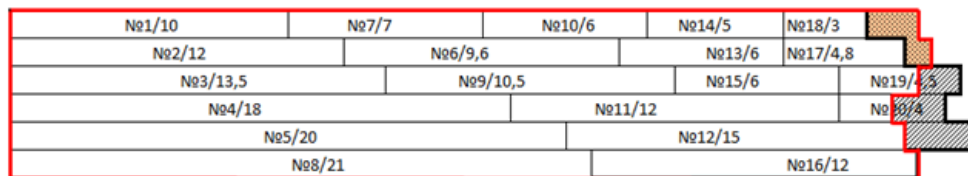


Рис. 7. Розклад  $\sigma^1$

Для розкладу  $\sigma^1$  не виконується достатня умова оптимальності 2, продовжуємо роботу алгоритму.

**Ітерація №2**

Для початкового розкладу визначимо моменти завершення виконання всіх завдань пристроями:

$$C_1(\sigma^0) = 31, C_2(\sigma^0) = 32\frac{2}{5}, C_3(\sigma^0) = 28\frac{1}{2}, C_4(\sigma^0) = 34, C_5(\sigma^0) = 35, C_6(\sigma^0) = 33.$$

Визначимо множини  $I_0(\sigma)$ ,  $I_Z(\sigma)$  та  $I_E(\sigma)$ :  $I_0(\sigma) = \{6\}$ ;  $I_Z(\sigma) = \{3;4;5\}$ ;  $Z_3(\sigma^0) = 1\frac{1}{2}$ ,  $Z_4(\sigma^0) = 2$ ,  $Z_5(\sigma^0) = 2\frac{1}{2}$ ;  $I_E(\sigma) = \{1;2\}$ ;  $E_1(\sigma^0) = 2$ ,  $E_2(\sigma^0) = 1\frac{1}{5}$ .

Визначимо пристрій з максимальним відхиленням від контуру ідеального розкладу, таким пристроєм виявився пристрій  $h = 5$  ( $h \in I_Z(\sigma)$  – пристрій з максимальним значенням виступу) та визначимо пристрій  $s = 2$  ( $s \in I_E(\sigma)$  – пристрій з множини резервів).

В табл. 7 представлені допустимі перестановки для вибраної пари пристроїв та відповідні їм значення  $\theta$ , а в табл. 8 наведені параметри цих перестановок.

Табл. 7. Значення  $\theta$  для допустимих перестановок завдань пристроїв 5-2

				Завдання пристрою 2			
				$k_2 = 1,2$			
				№2	№16	№13	№17
				12	9,6	6	4,8
Завдання пристрою 5	$k_5 = 2,5$	№5	20				
		№12	15			1	

Табл. 8. Параметри допустимих перестановок для пари пристроїв 5-2

Пара завдань	$Z_5$	$E_2$	$\theta$	$\frac{Z_6}{k_6} + \frac{E_2}{k_2} - \theta$	Величина покращення	Тип перестановки
12-13	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{5}$	1	1	1	$Ak$

Виконаємо цю перестановку. На рис. 8 зображено розклад  $\sigma^2$ , отриманий в результаті цієї перестановки.

№1/10	№7/7	№10/6	№14/5	№18/3	
№2/12		№6/9,6		№12/7,2	
№3/13,5		№9/10,5		№15/6	
№4/18		№11/12		№17/4,8	
№5/20			№13/12,5		
№8/21			№16/12		

Рис. 8. Розклад  $\sigma^2$

Для розкладу  $\sigma^2$  не виконується достатня умова оптимальності 2, продовжуємо роботу алгоритму.

**Ітерація №3**

$$C_1(\sigma^0) = 31, C_2(\sigma^0) = 33\frac{3}{5}, C_3(\sigma^0) = 28\frac{1}{2}, C_4(\sigma^0) = 34, C_5(\sigma^0) = 32\frac{1}{2}, C_6(\sigma^0) = 33.$$

Визначимо множини  $I_0(\sigma)$ ,  $I_Z(\sigma)$  та  $I_E(\sigma)$ :  $I_0(\sigma) = \{2;5;6\}$ ;  $I_Z(\sigma) = \{3;4\}$ ;  $Z_3(\sigma^0) = 1\frac{1}{2}$ ,  $Z_4(\sigma^0) = 2$ ;  $I_E(\sigma) = \{1\}$ ;  $E_1(\sigma^0) = 2$ .

Визначимо пристрій з максимальним відхиленням від контуру ідеального розкладу, таким пристроєм виявився пристрій  $s=1$  ( $s \in I_E(\sigma)$  – пристрій з максимальним значенням резерву) та визначимо пристрій  $h=5$  ( $h \in I_Z(\sigma)$  – пристрій з протилежної множини).

В табл. 9 представлені допустимі перестановки для вибраної пари пристроїв та відповідні їм значення  $\theta$ , а в табл. 10 наведені параметри цих перестановок.

Табл. 9. Значення  $\theta$  для допустимих перестановок завдань між пристроями 4-1

		Завдання пристрою 1						
		$k_1 = 1$						
		№1	№7	№10	№14	№18		
		<b>10</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>3</b>		
Завдання пристрою 4	$k_4 = 2$	№4	<b>18</b>		2			
		№11	<b>12</b>				1	
		№20	<b>4</b>					

Табл. 10. Наслідки можливих перестановок для завдань пристроїв 4-1

Пара завдань	$Z_4$	$E_1$	$\theta$	$\frac{Z_4}{k_4} + \frac{E_1}{k_1} - \theta$	Величина покращення	Тип перестановки
4-7	2	2	2	1	1	<b>BRk</b>
11-14	2	2	1	2	1	<b>Ak</b>

Наслідки усіх перестановок однакові, оберемо перестановку завдань 4-7 (першу в списку) та виконаємо її. На рис. 9 зображено розклад  $\sigma^3$ , отриманий в результаті цієї перестановки.

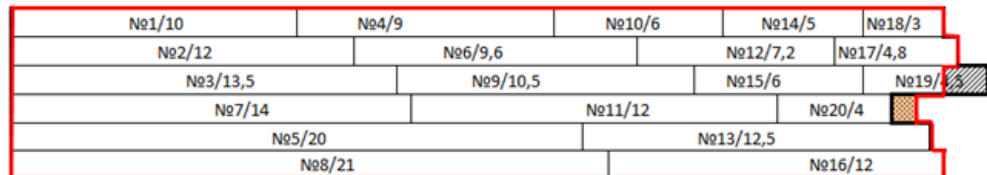


Рис. 9. Розклад  $\sigma^3$



Для розкладу  $\sigma^2$  не виконується достатня умова оптимальності 2, продовжуємо роботу алгоритму.

#### Ітерація №4

$$C_1(\sigma^0) = 33, C_2(\sigma^0) = 33\frac{3}{5}, C_3(\sigma^0) = 28\frac{1}{2}, C_4(\sigma^0) = 30, C_5(\sigma^0) = 32\frac{1}{2}, C_6(\sigma^0) = 33.$$

Визначимо множини  $I_0(\sigma)$ ,  $I_Z(\sigma)$  та  $I_E(\sigma)$ :  $I_0(\sigma) = \{1; 2; 5; 6\}$ ;  $I_Z(\sigma) = \{3\}$ ;  $Z_3(\sigma^0) = 1\frac{1}{2}$ ;  $I_E(\sigma) = \{4\}$ ;  $E_4(\sigma^0) = 2$ .

Визначимо пристрій з максимальним відхиленням від контуру ідеального розкладу, таким пристроєм виявився пристрій  $s=4$  ( $s \in I_E(\sigma)$  – пристрій з максимальним значенням резерву) та визначимо пристрій  $h=3$  ( $h \in I_Z(\sigma)$  – пристрій з протилежної множини).

В табл. 11 представлені допустимі перестановки для вибраної пари пристроїв та відповідні їм значення  $\theta$ , а в табл. 12 наведені параметри цих перестановок.

Табл. 11. Значення  $\theta$  для допустимих перестановок завдань між пристроями 3-4

		Завдання пристрою 4				
		$k_4 = 2$				
		№7	№12	№20		
		<b>14</b>	<b>12</b>	<b>4</b>		
Завдання пристрою 3	$k_3 = 1,5$	№3	<b>13,5</b>			
		№9	<b>10,5</b>		1	
		№15	<b>6</b>			
		№19	<b>4,5</b>			1

Табл. 12. Наслідки можливих перестановок для завдань пристроїв 3-4

Пара завдань	$Z_3$	$E_4$	$\theta$	$\frac{Z_3}{k_3} + \frac{E_4}{k_4} - \theta$	Величина покращення	Тип перестановки
9-12	$1\frac{1}{2}$	2	1	1	1	<i>Ak</i>
19-20	$1\frac{1}{2}$	2	1	1	1	<i>Ak</i>

Наслідки усіх перестановок однакові, оберемо перестановку завдань 9-12 (першу в списку) та виконаємо її. На рис. 10 зображено розклад  $\sigma^4$ , отриманий в результаті цієї перестановки.

№1/10	№4/9	№10/6	№14/5	№18/3
№2/12		№6/9,6		№12/7,2
№3/13,5		№11/9		№15/6
№7/14		№9/14		№20/4
№5/20			№13/12,5	
№8/21			№16/12	

Рис. 10. Розклад  $\sigma^4$ 

Отриманий розклад є оптимальним за другою достатньою умовою оптимальності.

### 9. Висновки за результатами та напрямки подальших досліджень

Досліджено властивості задачі календарного планування виконання множини завдань паралельними пристроями різної продуктивності з метою побудови розкладу з максимально рівномірним розподілом завдань між пристроями. Застосовуючи методологію побудови ПДС-алгоритмів, розроблені достатні умови оптимальності розкладів. На основі цих умов визначено множину перестановок, які дозволяють послідовно покращувати значення критерію. Розроблено поліноміальну складову ПДС-алгоритму розв'язання задачі. Наведено приклад застосування алгоритму.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Сперкач М.О. Задача визначення максимально пізнього моменту початку виконання завдань із спільним жорстким директивним терміном паралельними пристроями різної продуктивності / М.О. Сперкач // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». – К.: «ВЕК+», 2015. – №63 – С.12-18.
2. Павлов О.А., Жданова О.Г., Сперкач М.О. Составление расписания выполнения работ параллельными приборами с целью минимизации максимального отклонения от директивного срока / О.А. Павлов, О.Г. Жданова, М.О. Сперкач // Вісник ХНТ ім. В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – Х.: 2015. – №1156 – С.92-106.
3. Павлов О.А., Жданова О.Г., Сперкач М.О. Задача складання розкладу виконання завдань паралельними приладами з метою мінімізації максимуму відхилення від директивного терміну моментів завершення приладами усіх завдань / О.А. Павлов, М.О. Сперкач, О.Г. Жданова // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія «Технічні науки». – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. – Вип. 10. – с. 148 – 158.
4. Згуровский, М. З. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами: монография / М. З. Згуровский, А. А. Павлов. – К.: Наукова думка, 2010.– 573 с.