

УДК (UDC) 519.6

**Голінко  
Ігор Михайлович**

доцент, доцент кафедри автоматизації енергетичних процесів,  
Національний технічний університет України "Київський  
політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського",  
03056, м. Київ, Берестейський проспект, 37  
e-mail: [golinko.igor@iit.kpi.ua](mailto:golinko.igor@iit.kpi.ua)  
<https://orcid.org/0000-0002-7640-4760>

## Розробка цифрового двійника процесу теплообміну в умовах концептуальної невизначеності

**Актуальність.** Розвиток промисловості характеризується активним впровадженням кіберфізичних систем, ключовим елементом яких є цифрові двійники. Цифрові двійники дозволяють підвищити ефективність управління технологічними процесами, забезпечити прогнозування режимів роботи обладнання, оптимізацію енергоспоживання та зменшення експлуатаційних витрат. Водяні калорифери є важливою складовою систем теплогенерації та теплоспоживання промислових об'єктів, що зумовлює необхідність створення адекватних моделей, здатних точно відобразити реальні процеси теплообміну. Однак аналітичні моделі таких апаратів часто містять невизначені параметри, що знижує точність моделювання та ускладнює їх практичне застосування без додаткової ідентифікації.

**Метою** публікації є розробка цифрового двійника водяного калорифера на основі аналітичної моделі, адаптованої до реальних умов теплообміну шляхом ідентифікації невизначених параметрів. Аналітична модель розглядається як базовий приклад, що забезпечує можливість її узагальнення для різних типів теплообмінного обладнання.

**Методи дослідження.** У роботі використано аналітичне моделювання теплових процесів та методи пасивної ідентифікації параметрів математичної моделі. Адаптація динамічної моделі здійснюється шляхом мінімізації квадратичного критерію якості, що характеризує відхилення змінних простору стану математичної моделі від експериментальних даних реального процесу теплообміну. Для пасивної ідентифікації використано чисельні методи.

**Результати.** Проведено аналіз аналітичної математичної моделі водяного калорифера та встановлено наявність чотирьох невизначених параметрів, які потребують уточнення для забезпечення адекватності моделі. До таких параметрів віднесено витрати матеріальних потоків та коефіцієнти тепловіддачі, що визначають інтенсивність теплового потоку через теплообмінну поверхню апарату. На основі чисельного моделювання показано, що задача ідентифікації невизначених коефіцієнтів має односторонній характер, що забезпечує стійкість результатів оптимізації та можливість застосування стандартних чисельних методів. Отримані результати чисельного моделювання підтвердили ефективність запропонованого підходу до адаптації аналітичної моделі та розробки цифрового двійника водяного калорифера.

**Висновки.** Запропонований підхід до розробки цифрового двійника водяного калорифера забезпечує адекватне відтворення реального процесу теплообміну та може бути використаний у складі кіберфізичних систем промислових підприємств. Розглянутий метод ідентифікації легко поширюється на інші типи теплообмінного обладнання, що застосовуються в системах теплогенерації та теплоспоживання.

**Ключові слова:** кіберфізична система, цифровий двійник, математична модель, простір станів, водяний калорифер, теплообмін, пасивна ідентифікація.

**Як цитувати:** Голінко І. М. Розробка цифрового двійника теплоспоживання для кіберфізичних систем в умовах концептуальної невизначеності. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, серія Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2025. вип. 68. С.20-29. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2025-68-02>

**How to quote:** I. Golinko, "Development of heat consumption digital twin for cyber-physical systems under conceptual uncertainty", *Bulletin of V. N. Karazin Kharkiv National University, series Mathematical modelling. Information technology. Automated control systems*, vol. 68, pp. 20-29, 2025. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2025-68-02> [in Ukrainian]

### Вступ

Розвиток економіки залежить від злагодженості і системності політики держави, що направлена на конкретні показники якісних змін. Відновлення та модернізація промислових об'єктів України – важливий пріоритет національної економічної політики. Відродження промисловості повинно відбуватися на засадах технологічної модернізації [1].

Одним з головних напрямків технологічної модернізації, що стимулює економіку розвинутих держав світу, є створення кіберфізичних систем (КФС). Ідеї управління виробництвом в рамках КФС почали з'являтися на початку 2000 років. У 2013 році Європейська комісія організувала семінар “Cyber-Physical Systems: Uplifting Europe's innovation capacity”, присвячений КФС та їх ролі в інноваційному процесі. Уряди багатьох європейських країн включили КФС в пріоритетний список інновацій як критично важливого напрямку розвитку національних інтересів [2]. В Європі ці інноваційні стратегії розвиваються в рамках німецької ініціативи “Індустрія 4.0”. Одна з інновацій, яку вона впроваджує, є Digital Twin – всеохоплюючий інструмент супроводу об'єкта.

Едвард А. Лі [3] визначив КФС як інтеграцію інформаційних і фізичних процесів та підкреслив, що їх потенціал затьмарив революцію інформаційних технологій 20-го століття. КФС сприймаються як рушійна сила економічної трансформації, яка гармонійно поєднує функціонування інформаційних та фізичних процесів в рамках єдиної системи. Сьогодні КФС існують всюди в різних розмірах, з різними функціями та можливостями [4]. Такі системи часто підтримують критичні рішення, що мають значне суттєве економічне та суспільне значення. Основними характеристиками КФС є їх складність, неоднорідність, невизначеність різної природи, мультидисциплінарний характер та забезпечення гарантованої стратегії функціонування на всьому життєвому циклі системи [5].

Важливим інструментарієм для гарантованої реалізації функціонування КФС є цифровий двійник (ЦД). ЦД як нова базова технологія розширеного системного моделювання, моніторингу та аналізу може бути ефективним рішенням для підвищення якості управління фізичними процесами [6, 7]. Впровадження хмарних платформ надає ЦД високі обчислювальні можливості та можливості зберігання даних [8], що при залученні прогностичного модулю дозволяє виявляти вузькі місця для протікання фізичних процесів, оптимізувати структуру об'єкту функціонування, підвищувати якість продукції, виявляти несправності обладнання та багато іншого.

Розробка ЦД відноситься до сучасних наукових напрямків, а її актуальність всебічно висвітлено в роботі [9]. ЦД має багатогранну архітектуру і складне математичне забезпечення для своєї реалізації. Інформаційне забезпечення ЦД включає комбінацію наступних категорій (але не обмежується цим) [10]: фізична модель та дані; аналітична модель та дані; часові архіви фізичного процесу; дані транзакцій; основні дані; візуальні моделі та розрахунки та інше. ЦД може створюватись як комп'ютерна модель фізичного об'єкту з залученням комплексу процедур прогнозування та потужної програмно-апаратної системи. Проектування ЦД базується на використанні методів імітаційного моделювання, які забезпечують максимально реалістичне представлення фізичного процесу у віртуальному світі. Математичний опис ЦД можна отримати із застосуванням комбінації методів статистичного моделювання, машинного навчання та аналітичного моделювання [11].

Важливою характеристикою технологічних процесів будь-якого виробництва є їх штучність. Щоб переробити сировину у якісну продукцію для її реалізації на міжнародних ринках, виробничі процеси відшліфовуються десятками років. Як правило, сучасні технологічні процеси на виробництві є складними, але добре вивченими з аналітичною формалізацією математичного опису [12]. Практика використання аналітичних моделей свідчить, що адекватні моделі фізичних процесів трапляються вкрай рідко, оскільки такі моделі розробляються в умовах концептуальної невизначеності. Концептуальна невизначеність є комплексною, що поєднує невизначеності: цілей; функціонування процесу; структури системи, що моделюється; взаємодії елементів системи, або взаємодії з зовнішнім середовищем та інше. Для аналітичних моделей перелічені невизначеності ускладнюються інформаційною, методичною невизначеністю та іншими чинниками.

### **1. Постановка задачі дослідження**

Технологічна модернізація підприємств передбачає інтегрування виробничих та інформаційних систем у єдину КФС підприємства, що нерозривно пов'язано із розробкою ЦД відповідних виробничих процесів. У промислових комплексах особливе місце займають системи теплоспоживання, що забезпечують опалення, гаряче водопостачання, а також підтримання мікроклімату за допомогою вентиляції та кондиціонування повітря. Центральним елементом для таких систем виступають теплообмінні апарати, які формують основу технологічних схем теплогенерації та розподілу тепла.

Метою публікації є розробка ЦД процесу теплообміну на прикладі водяного калорифера. Аналітична модель цього апарату розглядається як базовий приклад, що може бути узагальнений для інших типів теплообмінного обладнання. При розробці ЦД особливу увагу слід приділити проблемі невизначеності процесу теплообміну, яка може проявлятися на кількох рівнях: математичному (відсутність точних параметрів для формалізації рівнянь теплообміну); фізико-технічному (неповна або змінна інформація про властивості матеріальних потоків); експлуатаційному (ризик, пов'язані з умовами роботи обладнання). У сукупності ці аспекти формують концептуальну невизначеність [13], що являє собою комплекс взаємопов'язаних неоднозначностей.

## 2. Аналітична модель теплообміну для водяного калорифера

Розглянемо модель нагрівання повітря на водяному калорифері, що запропонована в [14]:

$$\begin{cases} T_W \frac{d \Delta \theta_W}{dt} + \Delta \theta_W = k_0 \Delta \theta_{W0} + k_1 \Delta \theta_M + k_2 \Delta G_W; \\ T_M \frac{d \Delta \theta_M}{dt} + \Delta \theta_M = k_3 \Delta \theta_W + k_4 \Delta \theta_A; \\ T_A \frac{d \Delta \theta_A}{dt} + \Delta \theta_A = k_5 \Delta \theta_{A0} + k_6 \Delta \theta_M + k_7 \Delta G_A; \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{де } K_W = c_W G_W + \alpha_0 F_0, \quad T_W = \frac{c_W M_W}{K_W}, \quad k_0 = \frac{c_W G_W}{K_W}, \quad k_1 = 1 - k_0, \quad k_2 = \frac{c_W (\theta_{W0} - \theta_W)}{K_W};$$

$$K_M = \alpha_0 F_0 + \alpha_1 F_1, \quad T_M = \frac{c_M M_M}{K_M}, \quad k_3 = \frac{\alpha_0 F_0}{K_M}, \quad k_4 = 1 - k_3; \quad K_A = c_A G_A + \alpha_1 F_1, \quad T_A = \frac{c_A M_A}{K_A},$$

$$k_5 = \frac{c_A G_A}{K_A}, \quad k_6 = 1 - k_5, \quad k_7 = \frac{c_A (\theta_{A0} - \theta_A)}{K_A}.$$

Математична модель (1) у просторі станів має вигляд

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad (2)$$

$$\text{де } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta \theta_A \\ \Delta \theta_M \\ \Delta \theta_W \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1/T_A & k_6/T_A & 0 \\ k_4/T_M & -1/T_M & k_3/T_M \\ 0 & k_1/T_W & -1/T_W \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} k_5/T_A & k_7/T_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_0/T_W & k_2/T_W \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Delta \theta_{A0} \\ \Delta G_A \\ \Delta \theta_{W0} \\ \Delta G_W \end{bmatrix}.$$

Для моделі теплообміну (2) запропоновано класифікацію її параметрів у вигляді блок-схеми, яку зображено на рис. 1. Теплофізичні значення параметрів для блоків класифікації (1-3) визначено з високою точністю, вони детально розглянуті в [14]. Коефіцієнти тепловіддачі  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  (блок 4) залежить від багатьох факторів і можуть суттєво змінювати своє значення залежно від: температур матеріальних потоків  $\theta_W$ ,  $\theta_A$ ; витрати матеріальних потоків  $G_W$ ,  $G_A$ ; вологості повітря; конструктивних особливостей поверхні теплообміну та інших факторів. Ці параметри є предметом наукових досліджень в теплотехніці і розраховується з високою точністю на основі експериментальних досліджень [15]. Із зазначених міркувань коефіцієнти тепловіддачі  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  слід віднести до параметричної невизначеності моделі (2), які суттєво залежать від витрат матеріальних потоків  $G_W$ ,  $G_A$ . В роботі [16] розглянуто вплив коефіцієнта тепловіддачі та витрати повітря на чисельне моделювання динамічних процесів теплообміну для електричного калорифера. Окрім цього, на точність розрахунків впливає "точка" основного статичного режиму теплообмінника, в околі якої проводиться лінеаризація математичної моделі (2).

Від коефіцієнтів тепловіддачі  $\alpha_0$  та  $\alpha_1$  залежать параметри  $T_W$ ,  $T_M$ ,  $T_A$ ,  $k_0 \dots k_7$  моделей (1) і (2), оскільки коефіцієнти тепловіддачі входять в розрахункові залежності параметрів моделей. Можна зробити висновок, що від точності визначення числових значень коефіцієнтів тепловіддачі  $\alpha_0$  та  $\alpha_1$  залежать числові значення матриць  $\mathbf{A}$  та  $\mathbf{B}$  моделі (2), що істотно впливає на результати моделювання динамічних процесів теплообміну.

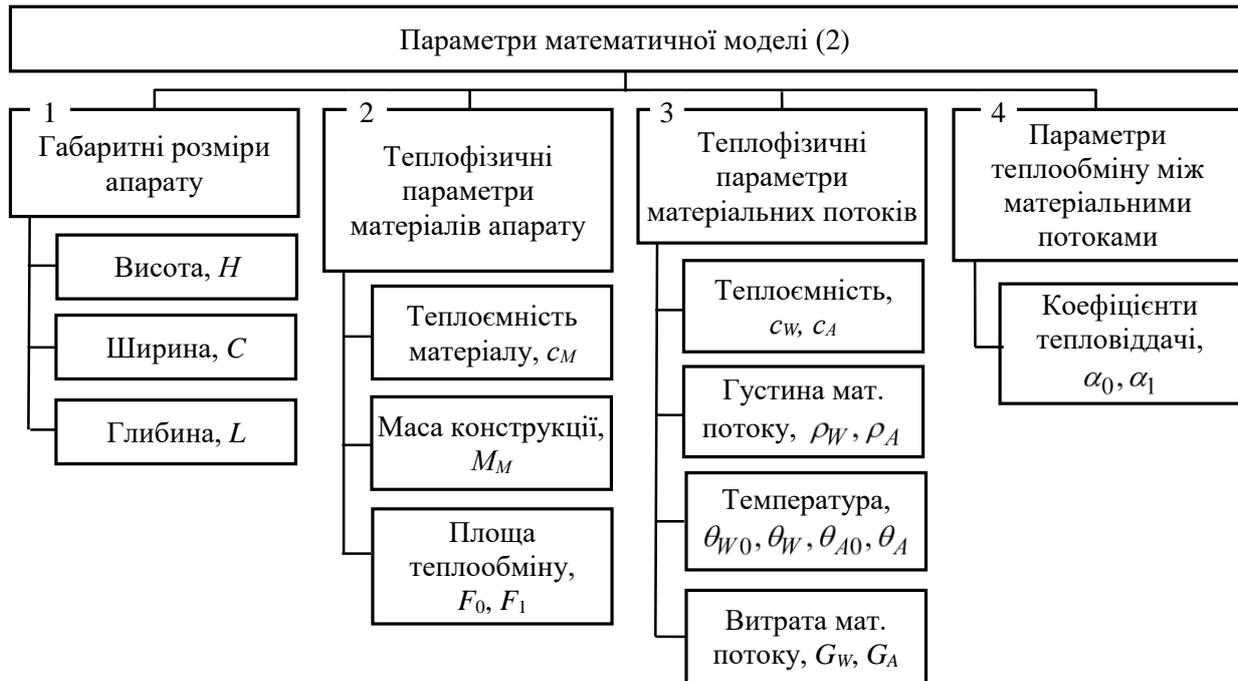


Рис. 1 Класифікація параметрів моделі водяного калорифера  
 Fig. 1 Classification of the water heater model parameters

### 3. Ідентифікація параметрів моделі водяного калорифера

Для розкриття концептуальної невизначеності динамічної моделі (2) будемо використати метод пасивного експерименту. Адаптація математичної моделі до даних фізичного процесу, що вимірюються сенсорами КФС, є одним із етапів розробки ЦД. Такий підхід виправданий своєю економічністю, оскільки не потребує додаткових матеріальних ресурсів на виробництві. Використання аналітичних методів адаптації ускладнено нелінійною залежністю параметрів моделі (2) від коефіцієнтів тепловіддачі  $\alpha_0$  та  $\alpha_1$ . З цих міркувань пропонується використати чисельні методи пошуку невизначених параметрів математичної моделі.

Формально динамічна модель (2) містить вісім невизначених параметрів  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $G_W$ ,  $\theta_{W0}$ ,  $\theta_W$ ,  $G_A$ ,  $\theta_{A0}$ ,  $\theta_A$ . Припустимо, що параметри  $\theta_{W0}$ ,  $\theta_W$ ,  $\theta_{A0}$ ,  $\theta_A$  контролюються сенсорами температури. В такому випадку в процесі параметричної ідентифікації моделі (2) необхідно визначити чотири параметри  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $G_W$ ,  $G_A$ . Для пасивної ідентифікації моделі водяного калорифера рекомендується використати методи чисельної оптимізації, оскільки функція пошуку не задана аналітично, а обчислюється безпосередньо під час реалізації алгоритму пошуку. Детально алгоритм пасивної ідентифікації розглянуто у публікації [15].

В алгоритмі ідентифікації застосовується середньоквадратичний критерій мінімізації похибки вимірних змінних стану процесу теплообміну  $\mathbf{X}$  і вихідного вектора  $\bar{\mathbf{X}}$  оцінок математичної моделі (2), що ідентифікується при вхідному сигналі  $\mathbf{U}$

$$I = M \left\{ \int_{t_0}^{t_0+t_f} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T \mathbf{Q} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) dt \right\} \rightarrow \min, \quad (3)$$

тут  $t_0$  - початковий час тренду,  $t_f$  - тривалість дискретизації тренду,  $\mathbf{Q}$  - одинична квадратна матриця,  $\mathbf{T}$  - оператор транспонування матриці,  $M$  - оператор математичного сподівання, який враховує промислові збурення. Узагальнена структурна схема процесу пасивної ідентифікації зображена на рис. 2. Критерій пошуку (3) обчислюється під час реалізації алгоритму ідентифікації.

Метод чисельної оптимізації може мати особливості програмної реалізації. Щоб нівелювати можливість чисельного переповнення критерію (3) необхідно встановити межі пошуку значень параметрів  $\bar{\alpha}_0$ ,  $\bar{\alpha}_1$ ,  $\bar{G}_W$ ,  $\bar{G}_A$ , виходячи із умови фізичної реалістичності теплообмінного апарату. Інформаційна невизначеність часових трендів нівелюється згладжуванням вимірних змінних для

векторів  $\mathbf{U}(t)$ ,  $\mathbf{X}(t)$ , а часовий інтервал трендів  $t_f$  повинен бути в декілька разів більшим за тривалість перехідних процесів водяного калорифера, що забезпечує нерівність  $t_f > 10 \max(T_W, T_M, T_A)$ .

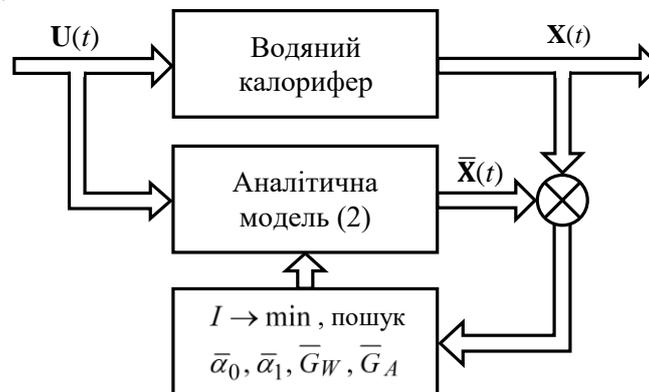


Рис. 2 Структурна схема для ідентифікації моделі водяного калорифера  
Fig. 2 Block diagram for identifying the water heater model

Працездатність чисельного методу ідентифікації, що запропонований в роботі [15] оцінено за допомогою програмного пакету MatLAB. У порівнянні із попередніми дослідженнями авторів [16], кількість невизначених параметрів ідентифікації збільшилася, що ускладнило задачу ідентифікації. Якщо для електричного калорифера ідентифікувалися коефіцієнт тепловіддачі та витрата повітряного потоку, то для водяного калорифера ідентифікації підлягають теплофізичні характеристики для двох матеріальних потоків: водяного теплоносія (витрата води  $G_W$  та коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha_0$ ); повітря, що нагрівається (витрата повітря  $G_A$  та коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha_1$ ).

Для імітаційного моделювання часових трендів  $\mathbf{U}(t)$  та  $\mathbf{X}(t)$  робочого водяного калорифера (еталонна модель) застосовувалася модель (2). До векторів еталонних змінних було додано випадковий сигнал з амплітудою  $\pm 0.25$ , що відтворює вплив промислових завад у вимірювальних каналах сенсорів. У випадку ідентифікованої моделі (2) початкові значення невизначених параметрів  $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{G}_W, \bar{G}_A$  суттєво відрізнялися від еталонних значень  $\alpha_0, \alpha_1, G_W, G_A$ . Для виконання параметричної ідентифікації використано функцію MatLAB `fminsearch(...)`, в якій налаштовано реалізацію методу оптимізації Нелдера-Міда. Основні результати чисельної ідентифікації наведено на рис. 3. На рис. 3 і далі використовуються такі позначення:  $\mathbf{X}$  вектор стану моделі (2) із еталонними значеннями параметрів  $\alpha_0, \alpha_1, G_W, G_A$ ; вектор стану  $\bar{\mathbf{X}}$  для моделі (2), що ідентифікується із значеннями коефіцієнтів  $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{G}_W, \bar{G}_A$ , що оптимізуються. Вектори стану  $\mathbf{X}$  і  $\bar{\mathbf{X}}$  включають змінні:  $\Delta\theta_A$  і  $\Delta\bar{\theta}_A$  – температура нагрітого повітря;  $\Delta\theta_M$  і  $\Delta\bar{\theta}_M$  – температура теплообмінної поверхні;  $\Delta\theta_W$  і  $\Delta\bar{\theta}_W$  – температура водяного теплоносія. При моделюванні використано теплофізичні характеристики водяного калорифера CVP2-HW2 [16]. Вектор керуючого впливу  $\mathbf{U}$  математичної моделі (2) містить змінні:  $\Delta\theta_{A0}$  – вхідна температура повітря;  $\Delta G_A$  – витрата повітря;  $\Delta\theta_{W0}$  – вхідна температура теплоносія;  $\Delta G_W$  – витрата водяного теплоносія.

Для ідентифікації параметрів використано випадок, коли початкові умови векторів стану еталонної моделі та моделі, що ідентифікується, співпадають  $\mathbf{X}(0) = \bar{\mathbf{X}}(0) = [1 \ 2 \ 3]^T$ , оскільки змінні вектору стану вимірюються. Проте, у дослідженні суттєво відрізняються параметри ідентифікації  $\bar{\alpha}_0 = 1200$ ,  $\bar{G}_W = 0.1$ ,  $\bar{\alpha}_1 = 220$ ,  $\bar{G}_A = 0.2$  від еталонних значень  $\alpha_0 = 800$ ,  $G_W = 0.15$ ,  $\alpha_1 = 120$ ,  $G_A = 0.3$ . При ступінчастій зміні вектора вхідного впливу  $\mathbf{U}(t) = [1 \ 0.1 \ 1 \ 0.15]^T$ , отримано часові характеристики для еталонної моделі  $\mathbf{X}$  (графіки кривих із випадковою складовою) та ідентифікаційної моделі  $\bar{\mathbf{X}}$  (графіки пунктирними кривими),

що показані на рис. 3 (а). Різниця між часовими характеристиками простору станів еталонної та ідентифікованої моделі значна.

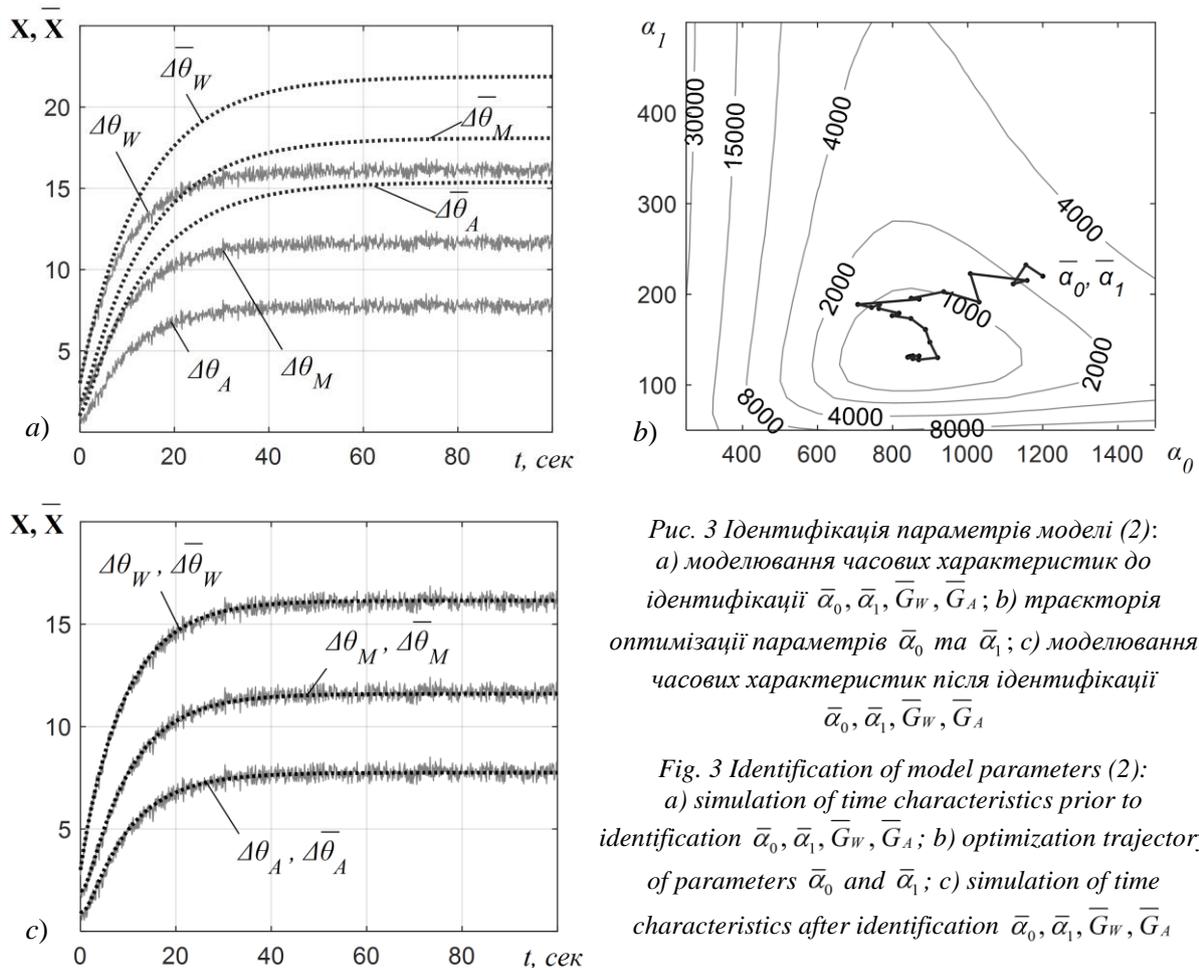


Рис. 3 Ідентифікація параметрів моделі (2): а) моделювання часових характеристик до ідентифікації  $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{G}_W, \bar{G}_A$ ; б) траєкторія оптимізації параметрів  $\bar{\alpha}_0$  та  $\bar{\alpha}_1$ ; в) моделювання часових характеристик після ідентифікації  $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{G}_W, \bar{G}_A$

Fig. 3 Identification of model parameters (2): a) simulation of time characteristics prior to identification  $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{G}_W, \bar{G}_A$ ; b) optimization trajectory of parameters  $\bar{\alpha}_0$  and  $\bar{\alpha}_1$ ; c) simulation of time characteristics after identification  $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{G}_W, \bar{G}_A$

На рис. 3 (b) показано ізолінії поверхні критерію (3) та траєкторія його мінімізації при умові, що значення параметрів  $\bar{G}_W, \bar{G}_A$  уже ідентифіковано. Такий підхід застосовано, оскільки немає можливості графічно продемонструвати оптимізацію критерія (3) за чотирма параметрами. У дослідженні ідентифікувалися усі чотири невизначені параметри при різних початкових умовах. Чисельні дослідження підтвердили, що функціонал (3) має один екстремум в області фізичної реалістичності математичної моделі (2), алгоритм чисельної ідентифікації має добру збіжність при різних початкових умовах та наявності випадкових збурень.

На рис. 3 (c) наведено часові характеристики змінних стану еталонної моделі  $X$  та ідентифікованої моделі  $\bar{X}$  після ідентифікації невизначених параметрів при вхідній дії  $U(t)$  на обидві моделі. Знайдені значення ідентифікованих параметрів є досить близькими до еталонних  $\bar{\alpha}_0 = 777.7, \bar{G}_W = 0.15, \bar{\alpha}_1 = 117.7, \bar{G}_A = 0.31$ . Відносна похибка ідентифікованих параметрів моделі не перевищила 5%.

#### 4. Розробка цифрового двійника водяного калорифера

Розробку ЦД доцільно здійснювати на основі аналітичної моделі (2). Для адаптації моделі (2) до реального процесу нагрівання повітря водяним калорифером на початковому етапі необхідно виконати ідентифікацію неперервної моделі із застосуванням алгоритму пасивної ідентифікації, розглянутого у попередньому розділі. Подальша реалізація ЦД потребує зменшення обчислювальних ресурсів. Щоб зменшити обчислювальні ресурси на розрахунки моделі ЦД, аналітичну модель (2) необхідно представити у дискретній формі, оскільки на розв'язок різницевого рівняння необхідно менші обчислювальні ресурси ніж на диференціальні рівняння. Розглянемо дискретне представлення неперервної моделі (2) в просторі станів [16]

$$\bar{X}_{k+1} = \bar{A}_d \bar{X}_k + \bar{B}_d U_k, \quad (4)$$

де  $\bar{\mathbf{A}}_d = e^{\bar{\mathbf{A}}T_{KV}}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_d = \int_0^{T_{KV}} e^{\bar{\mathbf{A}}(T_{KV}-t)} \bar{\mathbf{B}} dt$ ,  $T_{KV}$  - період квантування. Для перетворення моделі (2)

до дискретної форми (4) достатньо скористатися функцією `c2d(...)` MatLAB.

Для розробки ЦД водяного калорифера скористаємося процедурою синтезу, що розглянута в [15]. Запропонована процедура складається з наступних кроків:

- 1) ідентифікація невизначених параметрів  $(\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{G}_W, \bar{G}_A)$  для математичної моделі (2) за алгоритмом пасивної ідентифікації;
- 2) перехід від неперервної моделі (2) до дискретної моделі (4), яка є ЦД;
- 3) якщо під час роботи точність ЦД погіршилася (через нестационарність фізичного процесу), то переходимо до кроку 1 для уточнення параметрів моделі водяного калорифера.

Імітаційне дослідження розробки та роботи ЦД водяного калорифера виконано в програмному пакеті MatLAB, який використовувався для розрахунку матриць аналітичної моделі (2) та ЦД (4). Результати моделювання наведено на рис. 4.

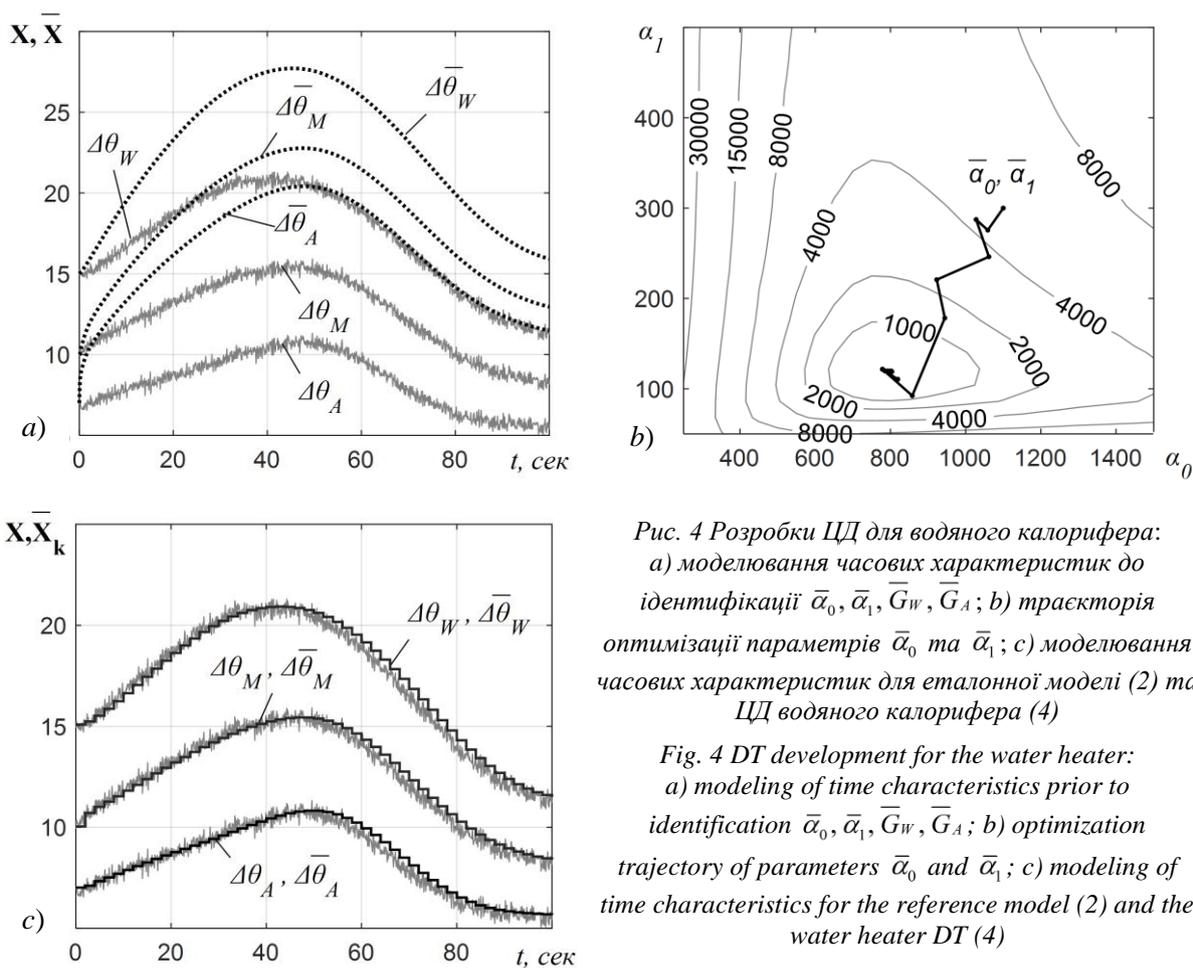


Рис. 4 Розробки ЦД для водяного калорифера: а) моделювання часових характеристик до ідентифікації  $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{G}_W, \bar{G}_A$ ; б) траєкторія оптимізації параметрів  $\bar{\alpha}_0$  та  $\bar{\alpha}_1$ ; в) моделювання часових характеристик для еталонної моделі (2) та ЦД водяного калорифера (4)

Fig. 4 DT development for the water heater: а) modeling of time characteristics prior to identification  $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{G}_W, \bar{G}_A$ ; б) optimization trajectory of parameters  $\bar{\alpha}_0$  and  $\bar{\alpha}_1$ ; в) modeling of time characteristics for the reference model (2) and the water heater DT (4)

На рис. 4 (а) наведено приклад симуляції для заданого вхідною впливу  $\mathbf{U}(t) = [1 + 0.5 \sin(0.15t) \quad 0.1 + 0.025 \sin(0.1t) \quad 1 + 0.05 \sin(0.3t) \quad 0.15 + 0.05 \sin(0.05t)]^T$  та відповідних початкових умов фізичної моделі  $\mathbf{X}(0) = [7 \quad 10 \quad 15]^T$ ,  $\alpha_0 = 800$ ,  $G_W = 0.15$ ,  $\alpha_1 = 120$ ,  $G_A = 0.3$ , а також ідентифікованої моделі  $\bar{\mathbf{X}}(0) = [7 \quad 10 \quad 15]^T$ ,  $\bar{\alpha}_0 = 1100$ ,  $\bar{G}_W = 0.1$ ,  $\bar{\alpha}_1 = 300$ ,  $\bar{G}_A = 0.2$ . На рис. 4 (б) представлено ізолінії поверхні критерію (3) та траєкторію його мінімізації в координатах параметрів  $\alpha_0$  та  $\alpha_1$ , в результаті чисельної ідентифікації знайдено  $\bar{\alpha}_0 = 794.4$ ,  $\bar{G}_W = 0.152$ ,  $\bar{\alpha}_1 = 118.9$ ,  $\bar{G}_A = 0.3$ . Відносна похибка ідентифікованих параметрів не перевищила 3%. Після параметричної ідентифікації моделі (2) розраховано числові значення матриць ЦД моделі (4) для періоду дискретизації  $T_{KV} = 2$ :

$$\bar{\mathbf{A}}_d = \begin{bmatrix} 0.0254 & 0.2215 & 0.3130 \\ 0.0323 & 0.2824 & 0.4518 \\ 0.0086 & 0.0852 & 0.7258 \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{B}}_d = \begin{bmatrix} 0.4043 & -12.0798 & 0.0358 & 4.7011 \\ 0.1761 & -5.2620 & 0.0573 & 7.5293 \\ 0.0171 & -0.5105 & 0.1633 & 21.4392 \end{bmatrix}.$$

На рис. 4 (с) показано часові характеристики змінних стану для еталонної моделі  $\mathbf{X}$  та ЦД  $\bar{\mathbf{X}}_k$  водяного калорифера. За результатами імітаційного моделювання можна зробити висновок, що запропонований в роботі [15] підхід до розробки ЦД можна використовувати для складніших аналітичних моделей в просторі станів, що мають чотири невизначених параметри.

### Висновки

Модернізація технологічних процесів передбачає інтенсифікацію управління системи теплоспоживання та теплогенерації на промислових підприємствах в рамках КФС виробництва. Глибинний аналіз фізичних процесів можливий в їх ретроспективі із використанням інструментарію ЦД. Впровадження ЦД неминуче призводить до багатовимірності динамічних моделей з невизначеними параметрами, які потребують корекції до конкретних умов застосування.

На основі методології системного аналізу розглянуто процедуру розробки моделі ЦД водяного калорифера із використанням аналітичної моделі в умовах концептуальної невизначеності. Розглянутий підхід розробки ЦД придатний для використання із різними типами теплообмінних апаратів, які широко використовуються в системах теплоспоживання та теплогенерації. В роботі проведено аналіз параметрів аналітичної моделі водяного калорифера. Для аналітичної моделі встановлено наявність чотирьох ключових коефіцієнтів  $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{G}_W, \bar{G}_A$ , які необхідно уточнювати в процесі пасивної ідентифікації та продемонстровано їх вплив на кінцевий результат моделювання. Наведено чисельний приклад алгоритму ідентифікації коефіцієнтів  $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{G}_W, \bar{G}_A$  для аналітичної моделі водяного калорифера. Показано, що розглянутий алгоритм ідентифікації відноситься до однокрихітальних задач оптимізації. Для чисельних розрахунків використовувалися вбудовані в MatLAB оптимізаційні функції та функції розв'язку диференціальних і різницевих рівнянь. Використання чисельних методів для оцінювання невизначених параметрів аналітичних моделей на основі максимального наближення до реальних даних відкриває нові дослідницькі горизонти.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Данилишин Б. Якими мають бути стратегічні напрями відбудови національної економіки. *Економічна правда*. 2022. URL: <https://www.epravda.com.ua/columns/2022/09/1/691022/> (дата звернення: 18.12.2025).
2. Broo D., Boman U., Törngren M. Cyber-physical systems research and education in 2030: Scenarios and strategies. *Journal of Industrial Information Integration*. 2021. Volume 21. 100192. <https://doi.org/10.1016/j.jii.2020.100192>
3. Edward A. Lee Cyber-Physical Systems- Are Computing Foundations Adequate? *NSF Workshop On Cyber-Physical Systems: Research Motivation, Techniques and Roadmap*. October 2006. URL: <https://ptolemy.berkeley.edu/publications/papers/06/CPSPositionPaper/>
4. Government Trends 2024. A report by Deloitte Center for Government Insights. *Deloitte*. URL: [https://www2.deloitte.com/content/dam/insights/articles/us187225\\_gov-trends-24/DI\\_Gov-trends-24.pdf](https://www2.deloitte.com/content/dam/insights/articles/us187225_gov-trends-24/DI_Gov-trends-24.pdf) (дата звернення: 18.12.2025)
5. Pankratova N., Golinko I., Pankratov V. Reliable operation of cyber-physical system with accompanied by a digital twin. *Problems of applied mathematics and mathematical modeling*. 2023. Issue 23. pp. 212-223. <https://doi.org/10.15421/322322>
6. De Benedictis A., Flammini F., Mazzocca N., Somma A., Vitale F. Digital Twins for Anomaly Detection in the Industrial Internet of Things: Conceptual Architecture and Proof-of-Concept. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*. 2023. Volume 19, Issue 12. pp. 11553–11563. <https://doi.org/10.1109/TII.2023.3246983>

7. Щеглов В. Р., Морозова О. І. Методи та технології розроблення цифрових двійників для гарантоздатних систем індустріального інтернету речей. *Системи управління, навігації та зв'язку*. 2022. № 4. С. 127–137.
8. Fuller A., Fan Z., Day C., Barlow C. Digital twin: Enabling technologies, challenges and open research. *IEEE Access*. 2020, Volume 8. pp. 108952–108971. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2998358>
9. Pankratova N., Grishyn K., Barilko V. Digital Twins: Stages of Concept Development, Areas of Use, Prospects. *System Research & Information Technologies*. 2023, № 2, pp. 7 – 21. <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2023.2.01>
10. The Industrial Internet Reference Architecture. *An Industry IoT Consortium Foundational Document*, 2022. URL: <https://www.iiconsortium.org/wp-content/uploads/sites/2/2022/11/IIRA-v1.10.pdf> (дата звернення: 18.12.2025)
11. Pankratova N., Golinko I. Development of Digital Twins to Support the Functioning of Cyber-physical Systems. *Computer Science Journal of Moldova*. 2023. № 3(93), pp. 299–320. <https://doi.org/10.56415/csjm.v31.15>
12. Solovchuk K. Mathematical models for typical continued computer-oriented process control. *Control systems and computers*. 2018. № 5. pp. 79–92. <https://doi.org/10.15407/usim.2018.05.079>
13. Zgurovsky M., Pankratova N. System analysis: Theory and Applications. Springer, 2007. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-48880-4>
14. Голінко І., Галицька І. Динамічна модель теплообміну для водяного калорифера у просторі станів. *Інформаційні системи, механіка та керування*. 2016. № 15, С. 83-93. <https://doi.org/10.20535/2219-380415201686207>
15. Pankratova N., Golinko I. Approach to development of digital twin model for cyber-physical system in conditions of conceptual uncertainty. In *Book Chapter M. Zgurovsky, & N. Pankratova (Eds.), System Analysis and Artificial Intelligence (Ser. Studies in Computational Intelligence, 2023. Volume 1107)*. Springer. pp. 3 – 25. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-37450-0\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-031-37450-0_1)
16. Pankratova N., Golinko I. Electric heater mathematical model for cyber-physical systems. *System research & Information technologies*. 2021. №2. pp. 7-17. <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2021.2.01>

## REFERENCES

1. B. Danylyshyn, “What should be the strategic directions of rebuilding the national economy”. *Economic Truth*. 2022. [in Ukrainian] <https://www.epravda.com.ua/columns/2022/09/1/691022/>
2. D. Broo, U. Boman, M. Törngren, “Cyber-physical systems research and education in 2030: Scenarios and strategies”. *Journal of Industrial Information Integration*, Vol. 21, March 2021, 100192. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jii.2020.100192>
3. Edward A. Lee, “Cyber-Physical Systems- Are Computing Foundations Adequate?”. *NSF Workshop On Cyber-Physical Systems: Research Motivation, Techniques and Roadmap*, October 2006. <https://ptolemy.berkeley.edu/publications/papers/06/CPSPPositionPaper/>
4. “Government Trends 2024. A report by Deloitte Center for Government Insights”. *Deloitte*. [https://www2.deloitte.com/content/dam/insights/articles/us187225\\_gov-trends-24/DI\\_Gov-trends-24.pdf](https://www2.deloitte.com/content/dam/insights/articles/us187225_gov-trends-24/DI_Gov-trends-24.pdf)
5. N. Pankratova, I. Golinko, V. Pankratov, “Reliable operation of cyber-physical system with accompanied by a digital twin”. *Problems of applied mathematics and mathematical modeling*. 2023. Issue 23. pp. 212-223. <https://doi.org/10.15421/322322>
6. A. De Benedictis; F. Flammini; N. Mazzocca; A. Somma, F. Vitale, “Digital Twins for Anomaly Detection in the Industrial Internet of Things: Conceptual Architecture and Proof-of-Concept”. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Vol. 19, № 12, December 2023, 11553–11563. URL: <https://doi.org/10.1109/TII.2023.3246983>
7. V. R. Shcheglov, O. I. Morozova, “Methods and technologies for developing digital twins for warrantable systems of the industrial Internet of Things”. *Control, Navigation and Communication Systems*, 2022, No. 4, pp. 127–137. [in Ukrainian]
8. A. Fuller, Z. Fan, C. Day, C. Barlow, “Digital twin: Enabling technologies, challenges and open research”. *IEEE Access*, Volume 8, 2020, pp. 108952–108971.

9. N. Pankratova, K. Grishyn, V. Barilko, “Digital Twins: Stages of Concept Development, Areas of Use, Prospects”. *System Research & Information Technologies*, 2023, № 2, pp. 7 – 21. <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2023.2.01>
10. “The Industrial Internet Reference Architecture”. *An Industry IoT Consortium Foundational Document*, 2022. <https://www.iiconsortium.org/wp-content/uploads/sites/2/2022/11/IIRA-v1.10.pdf>
11. N. Pankratova; I. Golinko, “Development of Digital Twins to Support the Functioning of Cyber-physical Systems”. *Computer Science Journal of Moldova*, vol.31, № 3(93), 2023, pp. 299–320. <https://doi.org/10.56415/csjm.v31.15>
12. K. Solovchuk, “Mathematical models for typical continued computer-oriented process control”. *Control systems and computers*, 2018, № 5, pp. 79–92. <https://doi.org/10.15407/usim.2018.05.079>
13. M. Zgurovsky, N. Pankratova, “System analysis: Theory and Applications”. Springer, 2007. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-48880-4>
14. I. Golinko, I. Galytska, “Dynamic heat transfer model for a water heater in state space”. *Information Systems, Mechanics and Control*, No. 15, 2016, pp. 83-93. [in Ukrainian] <https://doi.org/10.20535/2219-380415201686207>
15. N. Pankratova, I. Golinko, “Approach to development of digital twin model for cyber-physical system in conditions of conceptual uncertainty”. In *Book Chapter M. Zgurovsky, & N. Pankratova (Eds.), System Analysis and Artificial Intelligence*. Springer, 2023, Volume 1107, pp. 3 – 25. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-37450-0\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-031-37450-0_1)
16. N. Pankratova, I. Golinko “Electric heater mathematical model for cyber-physical systems”. *System research & Information technologies*, №2. 2021. pp. 7-17. <https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2021.2.01>

**Igor Golinko**

*Associate Professor, Associate Professor of the Department of Energy Processes Automation, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", 37, Prospect Beresteiskyi, Kyiv, 03056*

*e-mail: golinko.igor@iit.kpi.ua*

<https://orcid.org/0000-0002-7640-4760>

## Digital Twin Development for the Heat Transfer Process under Conceptual Uncertainty

**Relevance.** Industrial development is characterized by the active introduction of cyber-physical systems, a key element of which is digital twins. Digital twins make it possible to improve the efficiency of technological process management, ensure the prediction of equipment operating modes, optimize energy consumption, and reduce operating costs. Water heaters are an important component of heat generation and consumption systems in industrial facilities, which necessitates the creation of adequate models capable of accurately reflecting real heat exchange processes. However, analytical models of such equipment often contain uncertain parameters, which reduces the accuracy of modeling and complicates their practical application without additional identification.

**Purpose** of the publication is to develop a water heater digital twin based on an analytical model adapted to real heat exchange conditions by identifying uncertain parameters. The analytical model is considered as a basic example that can be generalized for different types of heat exchange equipment.

**Methods.** The work uses analytical modeling of thermal processes and passive identification methods of mathematical model parameters. The dynamic model is adapted by minimizing the quadratic quality criterion, which characterizes the deviation of the state space variables of the mathematical model from the experimental data of the real heat transfer process. Numerical methods are used for passive identification.

**Results.** An analysis of the analytical mathematical model of a water heater was carried out and four uncertain parameters were identified that need to be refined to ensure the adequacy of the model. These parameters include material flows rates and heat transfer coefficients that determine the intensity of the heat flow through the heat exchange surface of the device. Based on numerical modeling, it is shown that the task of identifying uncertain coefficients is single-extreme in nature, which ensures the stability of optimization results and the possibility of applying standard numerical methods. The results of numerical modeling confirmed the effectiveness of the proposed approach to adapting the analytical model and developing a digital twin of a water heater.

**Conclusions.** The proposed approach to the digital twin development of a water heater provides an adequate reproduction of the real heat exchange process and can be used as part of industrial enterprises cyber-physical systems. The considered identification method can be easily extended to other types of heat exchange equipment used in heat generation and consumption systems.

**Keywords:** *cyber-physical system, digital twin, mathematical model, state space, water heater, heat exchange, passive identification.*