

УДК 539.3+519.60

Гнітько**Василь Іванович***к.т.н., старший науковий співробітник**Інститут енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного НАН**України, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10, 61023**e-mail: gnitkovi@gmail.com**<https://orcid.org/0000-0003-2475-5486>***Дегтярьов****Кирило Георгійович***к.т.н., старший науковий співробітник**Інститут енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного НАН**України, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10, 61023**e-mail: kdegt89@gmail.com**<https://orcid.org/0000-0002-4486-2468>***Колодяжний****Андрій Сергійович***аспірант**Інститут енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного НАН**України, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10, 61023**e-mail: 7ask7@ukr.net**<https://orcid.org/0000-0008-4026-6715>***Крютченко****Денис Володимірович***доктор філософії, науковий співробітник**Інститут енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного НАН**України, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10, 61023**e-mail: wollydenis@gmail.com**<https://orcid.org/0000-0003-6804-6991>***Стрельнікова****Олена Олександрівна***д.т.н., проф., провідний науковий співробітник**Інститут енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного НАН**України, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10, 61023**Харківський національний університет радіоелектроніки**e-mail: elena1@gmx.com**<https://orcid.org/0000-0003-0707-7214>*

Комп'ютерне моделювання плескань рідини в резервуарах з перегородками

Мета дослідження – розроблення числових методів дослідження стійкості руху в резервуарах за наявності перегородок різного типу.

Актуальність. Дослідження стійкості руху рідини в резервуарах із горизонтальними та вертикальними перегородками має важливе теоретичне та прикладне значення для багатьох галузей - від космічної та авіаційної техніки до морського та наземного зберігання рідин (паливо, технологічні рідини, хімічні реактиви). Наявність перегородок істотно змінює характер плескань: вони впливають на частотний спектр вільної поверхні, структуру вихорів, локалізацію енергії та виникнення резонансних режимів. Неправильне врахування цих ефектів може призвести до зниження безпеки, зростання динамічних навантажень на конструкцію та погіршення експлуатаційних характеристик системи. Експериментальні дослідження таких процесів часто є технічно складними, коштовними та потенційно небезпечними. Випробування на реальних об'єктах рідин потребують великих стендів, високих витрат на матеріали й обладнання, а також обґрунтованих заходів безпеки при роботі з паливно-агресивними або вибухонебезпечними середовищами. У зв'язку з цим розробка точних математичних моделей, чисельних алгоритмів і методів моделювання руху рідини в резервуарах із перегородками набуває особливої актуальності. Комп'ютерне моделювання дозволяє безпечно і відносно недорого дослідити широкий спектр режимів, виконати.

Методи дослідження. В роботі використані методи теорії потенціалу та сингулярних інтегральних рівнянь, методи граничних елементів, метод під-областей та метод заданих нормальних форм.

Результати. Отримані системи одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь для визначення потенціалу швидкостей. Знайдені базисні функції, а саме форми коливань вільної поверхні, які надалі використано при розв'язанні задачі дослідження вимушених коливань. Проаналізовано вплив комбінованих горизонтальних і вертикальних навантажень на резервуари різної конструкції - як без перегородок, так і з вертикальними та горизонтальними перегородками. Виявлено області стійкого й нестійкого руху рідини. Встановлено, що наявність перегородок суттєво зменшує амплітуду коливань вільної поверхні рідини

Висновки. Отримані результати показали, що застосування горизонтальних і вертикальних перегородок істотно впливає на стійкість руху рідини в резервуарах, а саме приводить до суттєвого зменшення амплітуди коливань вільної

поверхні. Отримані дані можуть бути використані для підвищення надійності та безпеки резервуарних систем у різних галузях техніки, зокрема в авіаційній, космічній, морській та енергетичній.

Ключові слова, плескання рідини, резервуари з перегородками, метод підобластей, системи сингулярних інтегральних рівнянь, метод граничних елементів.

Як цитувати: Гнітько В. І., Дегтярьов К. Г., Колодяжний А. С., Крютченко Д. В., Стрельнікова О. О. Комп'ютерне моделювання плескань рідини в резервуарах з перегородками. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, серія Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2025. т. 67. С.35-44. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2025-67-03>

How to quote: V.I. Gnitko, K.G. Degtyarev, A.S. Kolodyazhny, D.V. Kriutchenko, and O.O. Strelnikova "Computer modeling of liquid sloshing in tanks with baffles" *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series Mathematical modelling. Information technology. Automated control systems*, vol.67, pp.35-44, 2025. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2025-67-03> [in Ukrainian]

1 Вступ

Динаміка рідини в резервуарах різного призначення — від паливних баків ракет-носіїв і літальних апаратів до ємностей для транспортування та зберігання рідин у промисловості — залишається актуальною науковою і прикладною проблемою. Одним із найбільш суттєвих факторів, що впливають на надійність і безпечну експлуатацію таких систем, є стійкість руху рідини під дією зовнішніх збурень. Коливання вільної поверхні (слосінг) здатні спричиняти додаткові динамічні навантаження на конструкцію, знижувати керованість транспортних засобів та підвищувати ризики аварійних ситуацій. Особливу складність становить аналіз резервуарів із перегородками, адже їхнє розташування та геометрія істотно змінюють картину руху рідини. При цьому експериментальні дослідження є вартісними й нерідко небезпечними, особливо при роботі з великими об'ємами, паливними чи агресивними середовищами. Тому розробка ефективних математичних і чисельних моделей плескань є актуальним науково-технічним завданням. Важливим аспектом забезпечення стійкості є врахування впливу демпфування. Правильний вибір коефіцієнтів затухання дає змогу істотно знизити амплітуди коливань і змістити межі стійкості системи. Практичним інструментом у цьому напрямі є врахування матриці Релея, що дозволяє адекватно описати дисипативні властивості системи. Крім того, одним із перспективних шляхів підвищення надійності є встановлення спеціальних демпфуючих пристроїв, таких як перегородки, плавучі кришки, та інші елементи конструкції, здатних зменшувати інтенсивність коливань і забезпечувати додатковий рівень безпеки. Таким чином, проблема дослідження стійкості руху рідини в резервуарах із горизонтальними та вертикальними перегородками з урахуванням впливу демпфування, вирішенню якої присвячена дана робота має як наукову, так і практичну цінність.

2 Постановка проблеми та огляд сучасного стану питання

Сучасні умови експлуатації техніки та поява нових конструкційних матеріалів суттєво впливають на напружено-деформований стан і вібраційні характеристики елементів конструкцій. Це зумовлює потребу в поглиблених дослідженнях міцносних та динамічних характеристик обладнання, яке працює під дією інтенсивних силових і температурних навантажень, при взаємодії з різними з рідиною або газом. Проблема гасіння коливань рідини в резервуарах стала особливо важливою ще у 1960-х роках у зв'язку з початком космічних польотів, коли неякісне проектування систем паливних баків призводило до втрати стійкості та руйнування ракет-носіїв. Сьогодні створення потужних сучасних ракет вимагає нових підходів до конструювання паливних баків, які дедалі частіше мають складну або нетрадиційну форму [1-2]. Отже, дослідження стійкості руху рідини, гасіння коливань вільної поверхні в резервуарах і паливних системах залишаються актуальними впродовж останніх десятиліть [3–5]. Для аналізу міцності та вібраційних характеристик конструкцій застосовують сучасні чисельні методи, зокрема метод R-функцій [6], методи сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь [7-8], метод граничних елементів (МГЕ) [9] скінченних елементів (МСЕ) [10], метод скінченних різниць [11], метод скінченних об'ємів [12] і метод поглинання [13]. Під час проектування паливних баків інженери використовують різні способи зменшення коливань: внутрішні перегородки [14], вставки з піноматеріалів [15], повне [16] або часткове [17] покриття вільної поверхні, застосування новітніх матеріалів [18-19] і систем активного керування [20]. Усі ці рішення спрямовані на

забезпечення достатнього рівня демпфування, що дозволяє зменшити амплітуди коливань і запобігти переходу системи в нестійкі режими. При цьому враховуються обмеження щодо маси конструкції, доступного простору та технологічних особливостей виготовлення, а також вимоги до надійності, довговічності й безпечної експлуатації обладнання в різних режимах роботи.

Таким чином, дослідження стійкості руху рідини з урахуванням демпфування в жорстких оболонках обертання з перегородками є актуальним завданням, результати якого можуть бути використані для підвищення надійності та ефективності роботи технічних систем.

3 Мета дослідження та формулювання задачі

Метою дослідження є побудова комп'ютерної методології для врахування демпфуючих ефектів у задачах аналізу стійкості руху рідини в обмежених областях (резервуарах, паливних баках) під дією періодичних зовнішніх навантажень, зокрема з урахуванням впливу внутрішніх перегородок як додаткових елементів гасіння коливань.

Розглянуто жорсткі оболонки обертання, що мають горизонтальні або вертикальні перегородки, та частково заповнені рідиною, рис. 1.

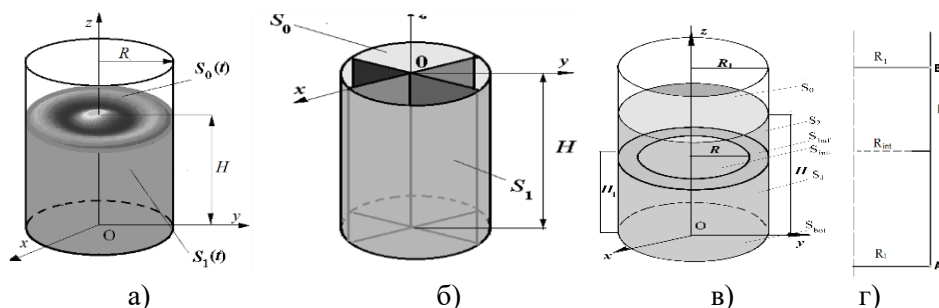


Рис. 3.1. Оболонки обертання з перегородками

Fig. 3.1. Shells of revolution with partitions

Формулювання задачі базується на традиційних припущеннях. Розглядається жорсткий резервуар, заповнений рідиною (густина 997 кг/м^3), верхня незаповнена частина зайнята повітрям при сталому атмосферному тиску. Поверхневий натяг не враховується, оскільки для води при кімнатній температурі (густина $\rho_l \approx 1000 \text{ кг/м}^3$, прискорення вільного падіння $g \approx 9.81 \text{ м/с}^2$, поверхневий натяг $\sigma \approx 0.072 \text{ Н/м}$, характерна довжина $L \approx 0.5 \text{ м}$) число Бонда $Bo = \rho g L^2 / \sigma \approx 3.5 \times 10^4$. Тобто сили тяжіння значно перевищують сили поверхневого натягу. Вільна поверхня ідеалізується без урахування фазових переходів; випаровування та конденсації. Динамічні газові ефекти, включаючи стисливість, внутрішні потоки та змінний тиск, не розглядаються. Рідина вважається ізотермічною, при цьому теплові ефекти ігноруються, що є прийнятним наближенням за відсутності джерел тепла. В'язкі ефекти обмежуються тонкими прикордонними шарами і мають незначний вплив на власні частоти чи форми коливань, що обґрунтовує використання моделі потенційної течії, стандартної для аналізів першого порядку.

Як моделі резервуарів розглядаються циліндричні оболонки з перегородками та без них, рис. 1. Рідина приймається нестисливою і нев'язкою, а її рух, зумовлений коливаннями стінок бака, вважається безвихровим.

Нехай Ω - обмежена область всередині резервуара, заповнена рідиною, S_0 - вільна поверхня рідини, S_1 - змочена поверхня оболонки, S_{baf} - поверхня перегородок. Рух рідини - безвихровий, тому існує потенціал швидкості $\Phi(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$, такий, що в області Ω задовольняє рівнянню Лапласа $\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, t) = 0$.

На жорстких нерухомих стінках і перегородках резервуару задано умови непроникності у вигляді

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_{baf}} = 0,$$

де $\mathbf{n}$ - одинична зовнішня нормаль до поверхні.

На вільній поверхні задано кінематичну і динамічну умови в лінійному наближенні

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{p-p_0}{\rho_l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - (g + a_v(t))\zeta + a_h(t)x \Big|_{S_0} = 0.$$

Тут p_0 – атмосферний тиск, p – тиск рідини, $a_v(t)$, $a_h(t)$ – прискорення сили, що змушує, в вертикальному та горизонтальному напрямках, $\zeta = \zeta(x, y, t)$ – невідома функція, що описує зміну рівня вільної поверхні з часом.

Для знаходження невідомих функцій Φ та ζ сформульовано таку крайову задачу

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad p - p_0 \Big|_{S_0} = 0 \quad (3.1)$$

Зобразимо потенціал Φ у вигляді ряду по власним формам коливань рідини в жорсткому резервуарі

$$\Phi = \sum_{k=1}^M \dot{d}_k(t) \varphi_k, \quad (3.2)$$

де $d_k(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу; φ_k – базисні функції; M – кількість форм, що утримуються при розрахунках.

Для функцій φ_k формулюємо крайові задачі таким чином:

$$\nabla^2 \varphi_k = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + g\zeta = 0. \quad (3.4)$$

При цьому на вільній поверхні маємо співвідношення [21]

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\chi_k^2}{g} \varphi_k, \quad (3.5)$$

Зауважимо, що співвідношення (3.4)-(3.5) зображують спектральну проблему [21], для розв'язання якої використано метод сингулярних інтегральних рівнянь [5].

4 Метод заданих форм. Зведення до систем інтегральних рівнянь

Для подальшого аналізу скористаємося представленням шуканих величин у зручній системі координат. Зокрема, розглянемо циліндричні координати, які природно відповідають геометрії задачі. Зобразимо невідомі функції Φ та ζ в циліндричних координатах (r, θ, z) у вигляді рядів:

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_{l=0}^m \cos(l\theta) \sum_{k=1}^n d_{kl}(t) \zeta_k(r), \quad (4.1)$$

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \sum_{l=0}^m \cos(l\theta) \sum_{k=1}^{n_2} \dot{d}_{kl}(t) \varphi_k(r, z). \quad (4.2)$$

Тут $\varphi_k(r, z)$, $\zeta_k(r)$ – базисні функції, між якими на вільній поверхні існує такий зв'язок [21]:

$$\zeta_{kj}(r) = \frac{\partial \varphi_{kj}(r, z)}{\partial z} \Big|_{S_0} = \frac{\chi_{kj}^2}{g} \varphi_{kj}(r, H). \quad (4.3)$$

Далі, згідно з [5], отримуємо розв'язувальну систему сингулярних інтегральних рівнянь для знаходження $\varphi_{kl}(r, z)$. Тут для спрощення індекси kl опущені.

$$2\pi\varphi(z_0, R) + \int_{\Gamma} \varphi(z, R) \Theta(z, z_0) r(z) d\Gamma - \frac{\chi^2}{g} \int_0^R \varphi(\rho, H) \Xi(P, P_0) \rho d\rho = 0, \quad P_0 \in S_1, \quad (4.4)$$

$$2\pi\varphi(\rho_0, H) + \int_{\Gamma} \varphi(z, R) \Theta(z, z_0) r(z) d\Gamma - \frac{\chi^2}{g} \int_0^R \varphi(\rho, H) \Xi(P, P_0) \rho d\rho = 0, \quad P_0 \in S_0,$$

Де ядра інтегральних операторів визначені формулами

$$\Theta(z, z_0) = 4/\sqrt{a+b} \left\{ \frac{1}{2r} \left[\frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_l(k) - F_l(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_l(k) n_z \right\}, \quad (4.5)$$

$$\Xi(P, P_0) = 4/\sqrt{a+b} F_l(k), \quad a = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2, \quad b = 2rr_0.$$

Узагальнені еліптичні інтеграли в (4.5) обчислюються таким чином

$$E_l(k) = (-1)^l (1 - 4l^2) \int_0^{\pi/2} \cos(2l\beta\psi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \quad F_l(k) = (-1)^l \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2l\beta\psi) d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}. \quad (4.6)$$

Як показано в [5], в співвідношеннях (4.6) обираємо $\beta = 1$ при вивченні руху рідини в оболонках без перегородок та $\beta = 2$ для оболонок з вертикальними перегородками, рис. 3.1.б).

Після знаходження розв'язку спектральної задачі (4.4)-(4.6) отримуємо базисні функції $\varphi_{kl}(r, z)$ та $\zeta_k(r)$ та власні частоти ω_{kl} .

Далі перейдемо до задачі визначення частот і форм коливань оболонки обертання з горизонтальними перегородками, рис. 3.1в). Розділимо розрахункову область, що зайнята рідиною, на дві під-області. Введемо деякі позначення. Вільну поверхню позначимо як S_0 . Під-області позначаємо як $\Omega_k (k = 1, 2)$. Вводимо штучну поверхню S_{int} , яку називають також поверхнею інтерфейсу. Поверхні стінок оболонкової конструкції в k -тій під-області позначені як $S_k (k = 1, 2)$, S_{bot} є поверхнею днища, та S_{baf} є поверхнею перегородки. Зауважимо, що розроблений підхід дозволяє розглядати довільну кількість перегородок.

Суть методу під-областей полягає в тому, що вплив кожної під-області на сусідню описується за допомогою матриці впливу. Вона встановлює зв'язок між значеннями потенціалів швидкостей на поверхнях інтерфейсу та відповідними потоками. Завдяки цьому розв'язувальна система інтегральних рівнянь формується лише відносно невідомих величин на вільній поверхні. Подальше розбиття межі рідинної області на граничні елементи приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь для невідомих значень потенціалу при умові, що потоки задані.

Введемо також такі позначення для жорстких поверхонь, що обмежують під-області:

$\sigma_1 = S_1 \cup S_{bot} \cup S_{inf} \cup S_{baf}$, $\sigma_2 = S_2 \cup c \cup S_{baf} \cup S_0$. Межі областей Ω_1 і Ω_2 є такими: $\Sigma_1 = S_{baf} \cup S_1 \cup S_{bot} \cup S_{int}$ та $\Sigma_2 = S_{baf} \cup S_2 \cup S_{bot} \cup S_0$, рис.3.1г). Позначимо значення потенціалу швидкостей у вузлах S_1 , S_2 і S_0 як S_1 , S_2 , S_0 , відповідно, та як w_1 , w_2 значення функції $w = (\mathbf{U}, \mathbf{n})$ на границях Σ_1 , Σ_2 , потоки q_1 , q_2 відомі з граничної умови непротікання, а на вільній поверхні невідомий потік позначається як q_0 . Значення потенціалу швидкостей та потоку на поверхні інтерфейсу S_{int} будуть невідомими функціями

$$q_1 = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_{int}}, q_2 = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_{int}}, q_i \in \Sigma_i.$$

Маємо такі умови сумісності

$$\varphi_{2i} = \varphi_{1i}, q_1 = -q_2. \quad (4.7)$$

Розглянемо задачу визначення потенціалу швидкостей. Введемо позначення для поверхонь $\tilde{S}_1 = \sigma_1$, $\tilde{S}_2 = S_{int}$, $\tilde{S}_3 = \sigma_2$, $\tilde{S}_4 = S_0$ та матричні оператори

$$A(S, \sigma) \psi = \iint_S \psi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P - P_0|} d\sigma, \quad B(S, \sigma) \psi = \iint_S \psi \frac{1}{|P - P_0|} d\sigma, \quad (4.8)$$

З використанням (4.8) побудуємо матриці

$$A_{ij} = A(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j), B_{ij} = B(\tilde{S}_i, \tilde{S}_j), i, j = \overline{1, 4}.$$

Використовуємо метод під-областей (суперелементів) для визначення потенціалу φ [22].

$$A_{11}\varphi_1 + A_{12}\varphi_{1i} = B_{11}w_1 + B_{12}q_1, P_0 \in \sigma_1, \quad (4.9)$$

$$A_{21}\varphi_1 + A_{22}\varphi_{1i} = B_{21}w_1 + B_{22}q_1, P_0 \in S_{int},$$

$$A_{32}\varphi_{1i} + A_{33}\varphi_2 = B_{33}w_2 - B_{32}q_1 + B_{34}q_0, P_0 \in \sigma_2,$$

$$A_{22}\varphi_{1i} + A_{23}\varphi_2 = B_{23}w_2 - B_{22}q_1 + B_{24}q_0, P_0 \in S_{int},$$

$$A_{42}\varphi_{1i} + A_{43}\varphi_2 = B_{43}w_2 - B_{42}q_1 + B_{44}q_0, P_0 \in S_0.$$

Зауважимо, що умови сумісності (4.7) враховані при отриманні системи (4.9). У результаті розв'язання системи (4.9) здобудемо

$$\varphi = \mathbf{Q}\mathbf{w}, \quad \varphi = (\varphi_i)_{i=1}^2, \quad \mathbf{w} = (w_i)_{i=1}^2, \quad \mathbf{Q} = (Q_{ij})_{ij=1}^2,$$

де вирази для Q_{ij} отримані в [22].

5 Вільні коливання рідини в циліндричних оболонках.

Дослідимо вільні коливання рідини в жорсткій циліндричних оболонках без перегородок, з горизонтальними та вертикальними перегородками. Спочатку розглянемо жорстку циліндричну

оболонку з плоским дном, що має такі параметри: радіус $R = 1$ м, довжина $L = 2$ м. Нехай H – рівень заповнення рідиною. Горизонтальна перегородка є круглою пластиною з центральним отвором (кільцева перегородка) (див. рис. 3.1). Вертикальну координату перегородки (висоту розміщення перегородки) позначимо як H_1 ($H_1 < H$). Радіус поверхні інтерфейсу позначимо як R_{int} . Будемо мати $H = H_1 + H_2$, $R_{baf} = R - R_{int}$.

Числові результати отримано за допомогою методу граничних елементів. Використано 100 граничних елементів вздовж радіуса днища (N_b), 120 елементів уздовж змочених циліндричних частин (N_w) і 100 елементів вздовж радіусу вільної поверхні (N_0). Подальше збільшення кількості елементів не призводило до суттєвої зміни результатів. На поверхні інтерфейсу та перегородки використано різну кількість елементів в залежності від радіуса перегородки. При числовому моделюванні розглянуто різні значення для R_{int} та H_1 . Застосовано аналітичний розв'язок [21] для порівняння та валідації числового розрахунку.

Для тестування суперелементного підходу розраховані власні частоти коливань рідини в резервуарі при встановленні перегородки на рівнях $H_1 = 0.5$ м, $H_1 = 0.9$ м при $R_{int} = 0.7$ м та $H = 1.0$ м. Порівняння результатів з обчислення частот, отриманих запропонованим методом граничних суперелементів, та аналітичних даних з роботи [23] подано в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1. Порівняння частот коливань при $l = 0$.

Table 5.1. Comparison of vibration frequencies at $l = 0$.

Позиція перегородки H , м	Метод	ω_{01}	ω_{02}	ω_{03}	ω_{04}
0.5	під-областей	6.070120	8.293836	9.991324	11.43449
	[23]	6.072544	8.292653	9.989851	11.43277
0.9	під-областей	4.727280	7.798846	9.708979	11.21009
	[23]	4.735574	7.796959	9.708475	11.20921

Дані, наведені в таблиці 5.1, свідчать про достовірність запропонованого методу.

Як відомо [22], найнижчі частоти плескань відповідають хвильовому числу $l = 1$. В таблиці 5.2 наведені частоти коливань рідини при $l = 1$ в циліндричній оболонці без перегородок, а також з вертикальними перегородками та горизонтальними перегородками при $H_1 = 0.9$ м.

Таблиця 5.2. Частоти коливань при $l = 1$ для циліндричних оболонок.

Table 5.2. Vibration frequencies at $l = 1$ for cylindrical shells.

Тип резервуару	ω_{11}	ω_{12}	ω_{13}	ω_{14}	ω_{15}
Без перегородок, МГСЕ [21]	4.1424	7.2286	9.1472	10.7123	11.9624
	4.1424	7.2284	9.1472	10.7112	11.9616
З вертикальними перегородками	5.4582	8.1067	9.8791	11.2574	12.657
З горизонтальними перегородками, МГСЕ [21]	2.6350	6.6446	8.9661	10.6468	11.9876
	2.6350	6.6444	8.9661	10.6467	11.9874

Порівняння результатів свідчить про збіжність та ефективність запропонованого методу.

6 Вимушені коливання рідини в циліндричних оболонках

Нехай базисні функції $\varphi_k(r, z)$ вже визначені. Підставимо їх у формули (4.1) для потенціалу швидкості Φ та (4.2) для підйому вільної поверхні ζ . Отримані вирази використаємо в динамічній умові на S_0 . У результаті на вільній поверхні одержуємо таке співвідношення

$$\sum_{l=0}^m \cos(l\theta) \sum_{k=1}^n \left[\ddot{d}_{kl}(t) + \omega_{kl}^2 \left(1 + \frac{a_v(t)}{g} \right) d_{kl}(t) \right] \varphi_{kl}(r, z) + a_h(t) r \cos\theta = 0, z = \zeta. \quad (6.1)$$

Виконавши скалярне множення рівняння (6.1) на функції $\psi_{lk}(k = \overline{1, n}; l = \overline{0, m})$ застосувавши умову ортогональності власних форм [21], отримуємо таку систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\ddot{d}_{k0}(t) + \omega_{k0}^2 \left(1 + \frac{a_v(t)}{g}\right) d_{k0}(t) = 0, \quad (6.2)$$

$$\ddot{d}_{k1}(t) + \omega_{k1}^2 \left(1 + \frac{a_v(t)}{g}\right) d_{k1}(t) + a_h(t) F_{k1} = 0, \quad F_{k1} = \frac{(r, \varphi_{k1})}{(\varphi_{k1}, \varphi_{k1})},$$

$$\ddot{d}_{kl}(t) + \omega_{kl}^2 \left(1 + \frac{a_v(t)}{g}\right) d_{kl}(t) = 0, \quad k = \overline{1, n}; l = \overline{2, m}.$$

Для однозначного розв'язання системи (6.2) необхідно задати початкові умови, тобто

$$d_{kl}(t) = d_{kl}^0, \quad \dot{d}_{kl}(t) = \dot{d}_{kl}^1, \quad k = \overline{1, n}, \quad l = \overline{0, m}. \quad (6.3)$$

Обирались зовнішні навантаження з такими прискореннями

$$a_x(t) = a_h \cos(\omega_h t), \quad a_z(t) = a_v \cos(\omega_v t) \quad (6.4)$$

при різних значеннях параметрів $a_v, \omega_v, a_h, \omega_h$.

Проведено розрахунки руху вільної поверхні за різні значення параметрів a_h, a_v та ω_h, ω_v . Спочатку розглянемо вертикальні навантаження. Фазові портрети рухів в координатах $(\zeta, \dot{\zeta})$ зображені на рис.6.1.

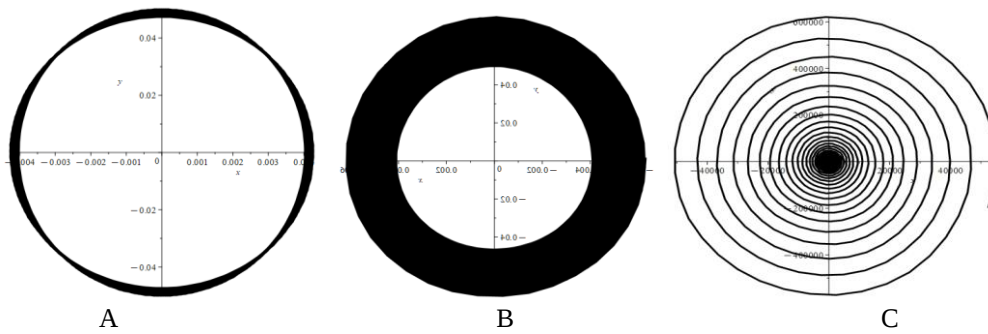


Рис.6.1. Фазові портрети руху рідини в резервуарі без перегородок при вертикальних навантаженнях
Fig. 6.1. Phase portraits of fluid motion in a tank without partitions under vertical loads

Тут рис. А) відповідає $a_h = 0.1, a_v = 1, \omega_v = \omega_h = 2.3$ Гц, для рисунків В) та С) використано параметри $a_h = 0.1, a_v = 1, \omega_h = \omega_v = 4.1424$ Гц та $a_h = 0, a_v = 1, \omega_v = 8.2848$ Гц, відповідно. З наведених результатів бачимо, що в перших двох випадках рухи є стабільними, але при $\omega_v = 8.2848$ Гц відбувається необмежене зростання амплітуди, що свідчить про параметричний резонанс (частота зовнішнього збурення збігається з подвоєною власною частотою).

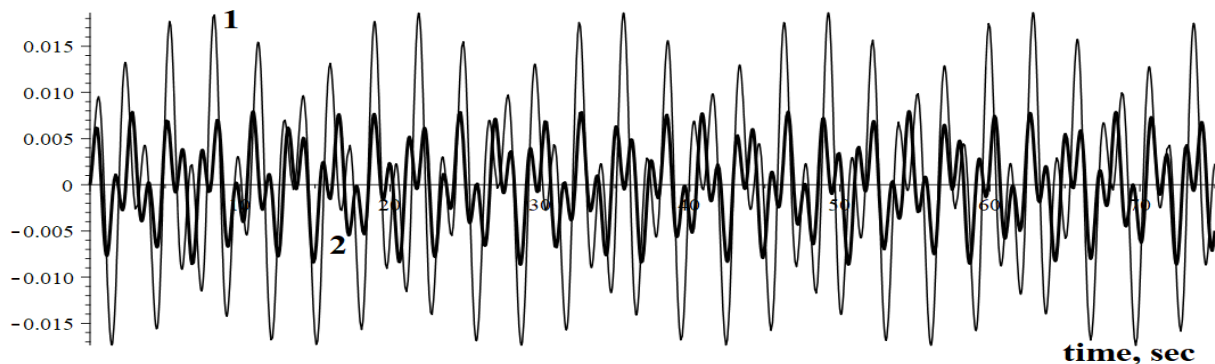


Рис.6.2. Залежність рівня підйому рідини в резервуарах при $\omega_v = \omega_h = 2.3$ Гц
Fig. 6.2. Dependence of fluid level rise in tanks at $\omega_v = \omega_h = 2.3$ Hz

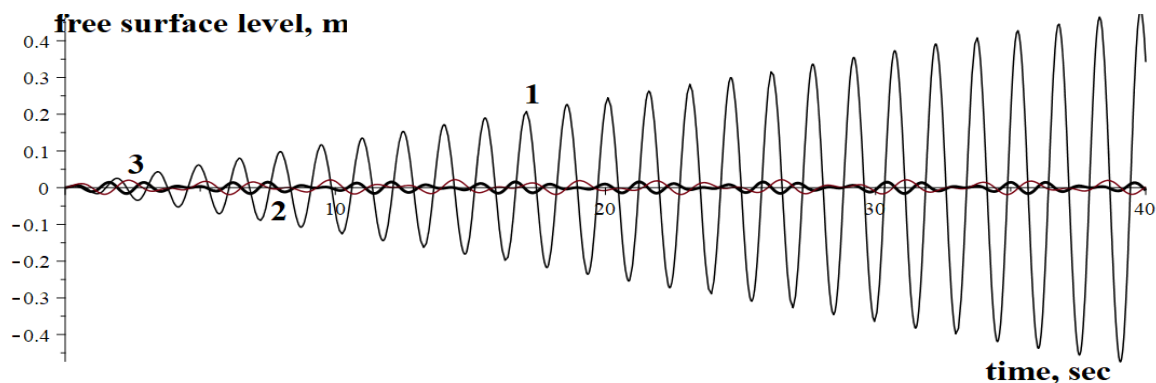


Рис.6.3. Залежність рівня підйому рідини в резервуарах при $\omega_v = \omega_h = 4.1424$ Гц

Fig. 6.3. Dependence of fluid level rise in tanks at $\omega_v = \omega_h = 4.1424$ Hz

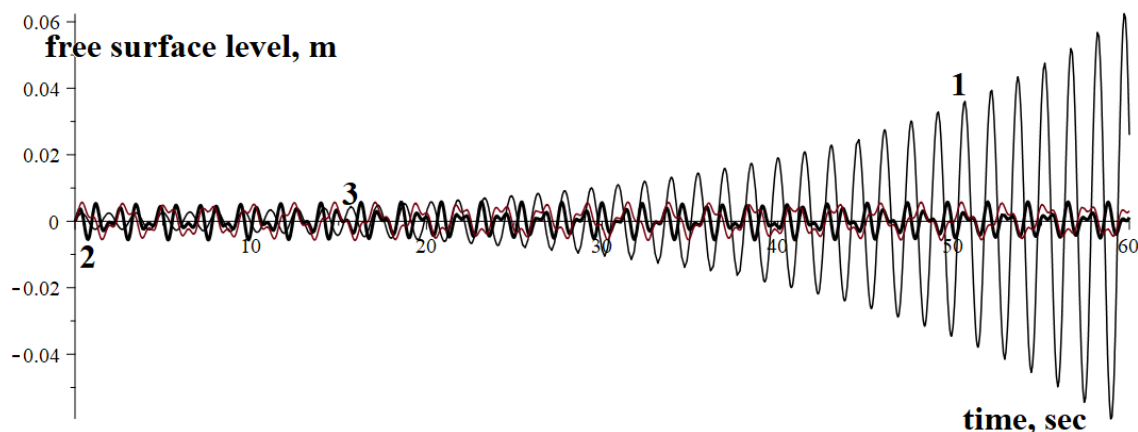


Рис.6.4. Залежність рівня підйому рідини в резервуарах при $\omega_v = \omega_h = 8.2848$ Гц

Fig. 6.4. Dependence of fluid level rise in tanks at $\omega_v = \omega_h = 8.2848$ Hz

На рис. 6.2-6.4 зображено зміну рівня вільної поверхні у точці ($\theta = 0, r = R$). Лінії, позначені (1), відповідають коливанням вільної поверхні в резервуарі без перегородок, лінії, позначені (2), описують зміну рівня вільної поверхні в резервуарі з вертикальними перегородками, криві, позначені (3), відповідають зміні рівня вільної поверхні за часом для резервуару з горизонтальною перегородкою. Зазначимо, що у всіх випадках відмічається зменшення амплітуди коливань вільної поверхні рідини при встановленні перегородок. Винятком є випадок, коли розглядається резервуар з горизонтальною перегородкою при частоті коливань сили, що змушує, яка дорівнює 2.3 Гц, що є досить близькою до першої фундаментальної частоти, яка дорівнює 2.635 Гц, але рух рідини при цьому залишається стабільним.

Висновки

Проведене дослідження підтвердило, що наявність горизонтальних та вертикальних перегородок у резервуарах істотно впливає на динаміку рідини, зокрема на стійкість її руху та характер вільної поверхні. Розроблені чисельні методи, зокрема на основі теорії потенціалу, сингулярних інтегральних рівнянь та методу граничних елементів, дозволили отримати точні результати без необхідності проведення складних та дорогих експериментів. Встановлено, що застосування перегородок дає змогу значно зменшити амплітуду коливань вільної поверхні, що сприяє зниженню динамічних навантажень на стінки резервуару та підвищенню стійкості всієї системи. Визначено області стійкої та нестійкої поведінки рідини залежно від. Отримані результати мають високу прикладну цінність і можуть бути використані при проєктуванні резервуарів у таких критичних галузях, як авіація, космонавтика, енергетика та морський транспорт, де важлива надійність та безпечність роботи з рідинами.

REFERENCES

1. L. Liu, J. Li Dynamic (2022). Deformation and Perforation of Ellipsoidal Thin Shell Impacted by Flat-Nose Projectile, *Materials*, Vol. 15(12), 4124, , [DOI:10.3390/ma15124124](https://doi.org/10.3390/ma15124124)
2. A. Karaiev, E. Strelnikova, (2020). Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells. In: Ivanov, V., Pavlenko, I., Liaposhchenko, O., Machado, J., Edl, M. (eds) *Advances in*

- Design, Simulation and Manufacturing III. DSMIE 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-50491-5_1
3. O.-M. Balas C. V. Doicin and E. C. Cipu, (2023). Analytical and Numerical Model of Sloshing in a Rectangular Tank Subjected to a Braking, *Mathematics*, vol. 11, P. 949-955, DOI:10.3390/math11040949
 4. E. Gani, S. Öztürk, A. Sari (2025). Effects of Liquid Sloshing in Storage Tanks: An Overview of Analytical, Numerical, and Experimental Studies. *Int J Steel Struct*, vol. 25, pp. 544–556, <https://doi.org/10.1007/s13296-025-00946-8>.
 5. E. Strelnikova, D. Kriutchenko, V. Gnitko, A. Tonkonozhenko, (2020). Liquid Vibrations in Cylindrical Tanks with and Without Baffles Under Lateral and Longitudinal Excitations, *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 25, Issue 3, P. 117-132, DOI: 10.2478/ijame-2020-0038.
 6. S.M. Lamtiuhova. (2025). Mathematical Modeling of Steady Flow Past Circular Cylinder with Splitter Plates by R-Functions Method, *International Journal of Mathematics and Physics*, DOI: 10.26577/ijmph.202516110.
 7. V.I. Gnitko, A.O. Karaiev, K.G. Degtyariov, I.A. Vierushkin, E.A. Strelnikova. (2022). Singular and hypersingular integral equations in fluid–structure interaction analysis. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, Vol.134, pp.67 – 79,. DOI:10.2495/BE450061
 8. E. Strelnikova, N. Choudhary, K. Degtyariov, D. Kriutchenko, I Vierushkin. Boundary element method for hypersingular integral equations: Implementation and applications in potential theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 169, 2024, 105999, <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2024.105999>
 9. T. Medvedovskaya, E. Strelnikova, K. Medvedyeva. (2015). Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers. *Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART)*. 1(1) pp 45 - 50. DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961.
 10. N. Smetankina and V. Pavlikov (2021) Mathematical Model of the Stress State of the Antenna Radome Joint with the Load-Bearing Edging of the Skin Cutout, *ICoRSE 2021. Lecture Notes in Networks and Systems*, vol. 305, pp. 287–295. https://doi.org/10.1007/978-3-030-83368-8_28
 11. K. Murawski, (2020). Technical Stability of Very Slender Rectangular Columns Compressed by Ball-And-Socket Joints without Friction, *Int. Journal of Structural Glass and Advanced Materials Research*, vol, 4(1), pp. 186-208, DOI: 10.3844/sgamrsp.2020.186.208
 12. P. Lampart, A. Rusanov, S. Yershov, S. Marcinkowski, A. Gardzilewicz, (2005). Validation of a 3D BANS solver with a state equation of thermally perfect and calorically imperfect gas on a multi-stage low-pressure steam turbine flow, *Journal of Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, vol. 127(1), pp. 83–93, 2005. DOI: 10.1115/1.185249.
 13. C. Tong, Y. Shao, H. B. Bingham, & F. C. W. Hanssen, (2021). An Adaptive Harmonic Polynomial Cell Method with Immersed Boundaries: Accuracy, Stability and Applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, , Vol. 122, P. 2945–2980. <https://doi.org/10.1002/nme.6648>.
 14. E. Strelnikova, D. Kriutchenko, V. Gnitko, A. Tonkonozhenko, (2020). Liquid Vibrations in Cylindrical Tanks with and Without Baffles Under Lateral and Longitudinal Excitations, *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 25, Issue 3, P. 117-132, DOI: 10.2478/ijame-2020-0038.
 15. S. K. Poguluri, Il H. Cho, (2023). Effect of vertical porous baffle on sloshing mitigation of two-layered liquid in a swaying tank, *Ocean Engineering*, vol. 289, Part 1, 115952, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801823023363>
 16. N. Choudhary, S.N. Bora and E. Strelnikova, (2021). Study on liquid sloshing in an annular rigid circular cylindrical tank with damping device placed in liquid domain, *J. Vib. Eng. Tech.*, vol. 9, pp. 1–18, DOI:10.1007/s42417-021-00314-w
 17. N. Choudhary, N. Kumar, E. Strelnikova, V. Gnitko, D. Kriutchenko, K. Degtyariov, (2021). Liquid vibrations in cylindrical tanks with flexible membranes. *Journal of King Saud University – Science*, vol. 33(8), 101589, doi.org/10.1016/j.jksus.2021.101589.
 18. E. Sierikova, E. Strelnikova, V. Koloskov, K. Degtyarev. (2021). The effective elastic parameters determining of threedimensional matrix composites with nanoinclusions. *Problems of Emergency Situations: Proc. of International Scientific-practical Conference. Kharkiv: NUCDU*, pp. 327–328, <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/13026>

19. K. Degtyariv, V. Gnitko, Y. Kononenko, D. Kriutchenko, O. Sierikova, E. Strelnikova. (2022). Fuzzy methods for modelling earthquake induced sloshing in rigid reservoirs. *2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*, pp. 1-6, DOI: [10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916466](https://doi.org/10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916466)
20. M. Konopka, F., De Rose, H. Strauch, C. Jetschmann, N. Darkow, J. Gerstmann, (2019). Active slosh control and damping - Simulation and experiment, *Acta Astronautica*, vol. 158, pp. 89 - 102, <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.06.055>.
21. I. A. Raynovskyy and A. N. Timokha. (2020). Sloshing in Upright Circular Containers: Theory, Analytical Solutions, and Applications, *CRC Press/Taylor and Francis Group*, DOI: [0.1201/9780429356711](https://doi.org/10.1201/9780429356711).
22. Strelnikova, E., Kriutchenko, D., Gnitko, V., Tonkonozhenko, A.: Liquid Vibrations in cylindrical tanks with and without baffles under lateral and longitudinal excitations. *Int. J. Appl. Mech. Eng.* 25(3), 117–132 (2020). <https://doi.org/10.2478/ijame-2020-0038>

Gnitko Vasyi	<i>PhD, senior researcher Anatolii Pidhornyi institute of power machines and systems vul. Komunalnykiv, 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine</i>
Degtyarev Kirill	<i>PhD, senior researcher Anatolii Pidhornyi institute of power machines and systems vul. Komunalnykiv, 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine</i>
Kolodiazhny Andriy	<i>Post-graduate student Anatolii Pidhornyi institute of power machines and systems vul. Komunalnykiv, 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine</i>
Kriutchenko Denys	<i>PhD, researcher Anatolii Pidhornyi institute of power machines and systems vul. Komunalnykiv, 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine</i>
Strelnikova Elena	<i>Leading researcher Anatolii Pidhornyi institute of power machines and systems vul. Komunalnykiv, 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine</i>

Computer modeling of liquid sloshing in tanks with baffles.

Research Objective. The objective of this study is to develop numerical methods for analyzing the stability of fluid motion in tanks equipped with various types of internal baffles. **Relevance.** The investigation of fluid motion stability in tanks with horizontal and vertical baffles is of significant theoretical and practical importance for many fields — from aerospace and aviation to marine and ground-based liquid storage (e.g., fuels, process fluids, chemical reagents). The presence of baffles substantially alters the sloshing behavior: they affect the frequency spectrum of the free surface, vortex structures, energy localization, and the emergence of resonant modes. Improper consideration of these effects may lead to reduced safety, increased dynamic loads on the structure, and degraded performance of the overall system. Experimental studies of such processes are often technically complex, costly, and potentially hazardous. Testing real liquid volumes requires large-scale facilities, high material and equipment expenses, as well as rigorous safety measures when dealing with flammable, aggressive, or explosive substances. Therefore, the development of accurate mathematical models, numerical algorithms, and simulation methods for fluid motion in baffled tanks is of particular relevance. Computer-based modeling provides a safe and relatively low-cost means to explore a wide range of fluid behavior regimes.

Research Methods. The study employs methods from potential theory and singular integral equations, the boundary element method (BEM), the subdomain method, and the method of prescribed normal forms.

Results. Systems of one-dimensional singular integral equations were derived to determine the velocity potential. Basis functions were obtained, specifically the free surface oscillation modes, which were then used to solve the problem of forced oscillations. The influence of combined horizontal and vertical excitations was analyzed for tanks of various designs — both without baffles and with vertical or horizontal baffles. Regions of stable and unstable fluid motion were identified. It was found that the presence of baffles significantly reduces the amplitude of free surface oscillations. **Conclusions.** The obtained results demonstrated that the use of horizontal and vertical baffles has a significant impact on the stability of fluid motion in tanks, specifically by considerably reducing the amplitude of free surface oscillations. The data obtained may be applied to improve the reliability and safety of tank systems across various engineering domains, particularly in aviation, space, marine, and energy industries.

Keywords: liquid sloshing, baffled tanks, subdomain method, systems of singular integral equations, boundary element method, damping, Ains–Strett diagram.