

УДК 539.3+519.6

Гнітько

Василь Іванович

*к.т.н., старший науковий співробітник**Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН**України, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10, 61023**e-mail: [gnitkovi@gmail.com](mailto:gnitkovi@gmail.com);**<https://orcid.org/0000-0001-7855-3957>*

Дегтярьов

Кирило Гергійович

*к.т.н., науковий співробітник**Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН**України, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10, 61023**e-mail: [kdegt89@gmail.com](mailto:kdegt89@gmail.com);**<https://orcid.org/0000-0002-4486-2468>*

Дорошенко

Володимир

Олексійович

*д.ф.-м.н., професор; декан факультету інформаційно-аналітичних**технологій та менеджменту,**Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків,**пр. Науки, 14, 61166**e-mail: [volodymyr.doroshenko@nure.ua](mailto:volodymyr.doroshenko@nure.ua);**<https://orcid.org/0000-0001-8454-394X>*

Крютченко

Денис Володимірович

*доктор філософії, молодший науковий співробітник**Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН**України, м. Харків, вул. Комунальників, 2/10, 61023**e-mail: [wollydenis@gmail.com](mailto:wollydenis@gmail.com);**<https://orcid.org/0000-0003-6804-6991>*

## Спектральна крайова задача для коаксіальних оболонок обертання

Основною метою цього дослідження є розробка ефективного чисельного підходу з використанням граничних елементів для оцінки власних частот коливань рідини у складених резервуарах. Проаналізовано власні коливання конструкцій оболонок, що включають циліндричні та конічні оболонки, поєднані кільцями. Область між оболонками заповнена ідеальною нестисливою рідиною. У числовому моделюванні використовуються метод суперпозиції у поєднанні з методом граничних елементів. Здійснено числовий розв'язок спектральної граничної задачі щодо коливань рідини в жорстких оболонкових конструкціях. Частоти і форми визначаються шляхом розв'язання систем сингулярних інтегральних рівнянь. Для оболонок обертання, ці системи спрощуються до одновимірних рівнянь, де інтеграли обчислюються вздовж кривих і відрізків прямих. Для обчислення одновимірних інтегралів із логарифмічними особливостями та особливостями типу Коші використовуються ефективні числові процедури. Тестові розрахунки підтверджують високу точність і ефективність запропонованого методу. Важливість і практична значимість методу полягає в можливості досліджувати коливання рідини в реальних складених паливних баках ракет-носіїв за різні умови навантаження.

**Ключові слова:** циліндрично-конічні резервуари, системи сингулярних інтегральних рівнянь, метод граничних елементів, плескання рідини.

**Як цитувати:** Гнітько В. І., Дегтярьов К.Г., Дорошенко В.О., Крютченко Д.В. Спектральна крайова задача для коаксіальних оболонок обертання. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна, сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2023. вип. 60. С.6-14. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2023-60-01>

**How to quote:** V.I. Gnitko, K.G. Degtyarev, V.O. Doroshenko and D.V. Kriutchenko, "Spectral boundary value problem for coaxial shells of revolution", *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series Mathematical modelling. Information technology. Automated control systems*, vol. 60, pp.6-14, 2023. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2023-60-01> [In Ukrainian].

### 1 Вступ

Оболонки обертання як резервуари для зберігання рідини широко використовуються на об'єктах водопостачання, нафти і газу, в різних галузях промисловості, в ядерних установках для зберігання різноманітних рідких або подібних до них матеріалів, хімічної рідини та різних відходів. При дії раптово прикладених зовнішніх навантажень в частково заповнених резервуарах відбуваються інтенсивні плескання вільної поверхні. Плескання означає будь-який рух вільної

поверхні рідини всередині контейнера. Це явище має значний вплив на динамічний відгук контейнера. Спектральна крайова проблема для резервуарів з рідиною полягає в знаходженні власних частот та форм плескань вільної поверхні. Розрахунок гідродинамічних сил на стінки резервуарів з рідиною є важливою проблемою для забезпечення міцності та стійкості руху промислових резервуарів і посудин. Основні проблеми при вивченні рідини полягають в оцінці розподілу гідродинамічного тиску, сил, моментів і визначенні власних частот вільної поверхні рідини. Ці параметри безпосередньо впливають на динамічну стійкість і міцність контейнерів. Хоча лише натурний експеримент може надати адекватну оцінку міцності резервуарів з рухомою рідиною, але проведення таких повномасштабних експериментів є коштовною та небезпечною процедурою, тому на передній фланг в сучасних наукових дослідженнях виходить комп'ютерне моделювання.

## 2 Постановка проблеми та огляд сучасного стану питання

Проблема коливань рідини є викликом для різних галузей промисловості, таких як авіакосмічна, хімічна, машинобудівна, ядерна інженерія, а також складним завданням для фізиків та математиків. Коливання рідини може призводити до катастрофічних пошкоджень резервуарів для зберігання води та нафти, сходженню з розрахункової траєкторії ракет-носіїв. Завдяки потенційно небезпечному впливу, плескання рідини в резервуарах є об'єктом багатьох теоретичних та експериментальних досліджень протягом останніх кількох десятиліть [1-3]. Багато важливих явищ було розглянуто в цих дослідженнях, особливо лінійні та нелінійні ефекти плескання як для нев'язкої, так і для в'язкої рідини [4-6]. Загальний огляд існуючих підходів до проблеми плескань зроблено в [7-9]. Зауважимо, що хоча складені оболонки обертання є типовими конструкціями паливних баків ракет-носіїв, резервуарів, що використовуються в автомобільній, хімічній та сільськогосподарській галузях, в науковій літературі вивченню коливань таких резервуарів приділено недостатньо уваги [10-12].

Тому дане дослідження, присвячене розв'язанню спектральної крайової задачі щодо коливань рідини в складених оболонках обертання, виконано на актуальну тему.

## 3 Мета дослідження та формулювання задачі

Мета дослідження полягає в розробці комп'ютерної технології на основі поєднання методів суперпозицій мод та граничних елементів для оцінки власних частот та форм коливань рідини в складених оболонкових конструкціях.

Розглянуто складені оболонки обертання, частково заповнені рідиною, рис.1(а-б). Як  $S_1$  будемо позначена змочену поверхню оболонкової конструкції, тоді як  $S_0$  є вільною поверхнею рідини. Вважається, що рідина ідеальна і нестислива.

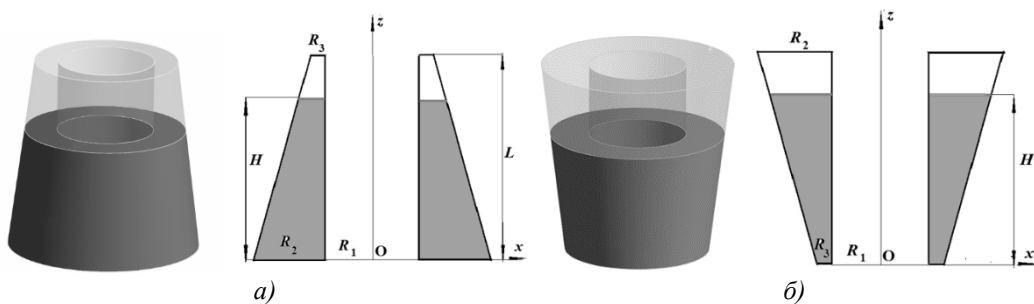


Рис. 3.1. Складені оболонкові конструкції та їх схеми

Резервуари, що розглядаються, складаються з коаксіальних циліндричної та конічної оболонок, з'єднаних кільцями, що утворюють днища. Рідина знаходиться між оболонками. Поверхні оболонок і днища змочуються, а вільна поверхня в спокої знаходиться на висоті  $H$ , утворюючи кільце, яке описується в полярній системі координат таким чином:  $\{z = H, R_1 < r < R_0\}$ . Тут  $R_0 = R_3 + (R_2 - R_3)(L - H)/L$  для оболонкової конструкції, що зображена на рис. 1а), а для конструкції 1б) маємо  $R_0 = R_3 + (R_2 - R_3)H/L$ .

Припустимо, що рух рідини, яка знаходиться між оболонками, є безвихровим. Позначимо як  $\mathbf{V}(V_x, V_y, V_z)$  вектор швидкості рідини, тоді умова нестисливості приймає вигляд  $\text{div} \mathbf{V} = 0$ . Умова потенційності руху означає, що існує скалярний потенціал швидкостей  $\Phi$ , такий що  $\mathbf{V} = \text{grad} \Phi$ .

Х цих припущень впливає, що потенціал  $\Phi$  задовольняє рівнянню Лапласа в області, що зайнята рідиною. Нехай  $\Omega$  – область, що зайнята рідиною,  $\mathbf{P}$  – точка всередині області  $\Omega$ . Тиск рідини  $p$  на змочені поверхні оболонки визначається з інтегралу Бернуллі за формулою

$$\frac{p}{\rho_l} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - gz + \frac{p_0}{\rho_l}, \quad (3.1)$$

де  $\rho_l$  – густина рідини,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $z$  – вертикальна координата точки  $\mathbf{P}$ .

Сформулюємо граничні умови для рівняння Лапласа для знаходження потенціалу  $\Phi$ . На змочених поверхнях  $S_1$  має виконуватись умова непротікання, в той час як на вільній поверхні ставимо динамічні і кінематичні умови [13]. Умова непротікання має вигляд

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{S_1} = 0. \quad (3.2)$$

На вільній поверхні виконуються кінематична та динамічна умови

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{S_0} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}; \quad p - p_0\Big|_{S_0} = 0, \quad p - p_0 = -\rho\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\zeta\right). \quad (3.3)$$

Тут  $p$  – тиск рідини на змочені поверхні,  $p_0$  – атмосферний тиск,  $\rho$  – густина рідини,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $\zeta = \zeta(x, y, t)$  – заздалегідь невідома функція, яка описує положення та рух вільної поверхні. Область, яку займає рідина, позначимо як  $\Omega$ , а як  $\mathbf{P}$  – точки всередині  $\Omega$ .

Таким чином, для рівняння Лапласа сформульована крайова задача

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad \mathbf{P} \in \Omega, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{P} \in S_1, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial\zeta}{\partial t}, \quad p - p_0 = 0, \quad \mathbf{P} \in S_0 \quad (3.4)$$

відносно невідомого потенціалу  $\Phi$ , що пов'язаний кінематичною граничною умовою з функцією  $\zeta(x, y, t)$ .

#### 4 Метод заданих форм

Оскільки розглядаються оболонки обертання та внаслідок лінійності співвідношень (3.4) зобразимо невідомі функції  $\Phi$  та  $\zeta$  в циліндричних координатах у вигляді наступних рядів:

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_{l=0}^m \cos(l\theta) \sum_{k=1}^n d_{kl}(t) \zeta_k(r), \quad (4.1)$$

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \sum_{l=0}^m \cos(l\theta) \sum_{k=1}^{n_2} \dot{d}_{kl}(t) \varphi_k(r, z) \quad (4.2)$$

При цьому буде виконана кінематична умова, якщо між базисними функціями  $\varphi_k(r, z)$  та  $\zeta_k(r)$  на вільній поверхні існує такий зв'язок:

$$\frac{\partial\varphi_k(r, z)}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{z=H} = \zeta_k(r). \quad (4.3)$$

Функції  $\psi_{kl} = \varphi_{kl}(r, z) \cos(l\theta)$  мають задовольняти рівнянню Лапласа.

З динамічної та кінематичної умов маємо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -g\zeta, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -g\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -g\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}. \quad (4.4)$$

Припускаючи гармонічний характер зміни коефіцієнтів  $d_{kl}(t)$  за часом  $d_{kl}(t) = D_{kl} \exp(i\omega_{kl}t)$ , отримуємо з (4.4)

$$\frac{\partial\psi_{kl}}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\omega_{kl}^2}{g} \psi_{kl}. \quad (4.5)$$

Таким чином, сформульовано спектральну крайову задачу відносно  $\psi_{kl}$  [14]

$$\nabla^2 \psi_{kl} = 0, \mathbf{P} \in \Omega, \frac{\partial \psi_{kl}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \mathbf{P} \in S_1, \frac{\partial \psi_{kl}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\omega_{kl}^2}{g} \psi_{kl}, \mathbf{P} \in S_0. \quad (4.6)$$

Для розв'язання спектральної крайової задачі застосовано метод граничних елементів (МГЕ).  
Зауважимо, що в поданнях (4.1)-(4.2) можна також використовувати множники  $\sin(l\theta)$ .

### 5 Метод граничних елементів

Для застосування методу граничних елементів в прямому формулюванні використовуємо третю формулу Гріна [15]

$$2\pi \psi_{kl}(\mathbf{P}_0) = \iint_S \frac{\partial \psi_{kl}}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} dS - \iint_S \psi_{kl} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} dS, \quad (5.1)$$

де  $|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|$  – декартова відстань між точками  $\mathbf{P}, \mathbf{P}_0$ ,  $S = S_1 \cup S_0$ . З використанням крайових умов спектральної задачі (4.6) отримуємо

$$2\pi \psi_{kl} + \iint_{S_1} \psi_{kl} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} \right) dS_1 - \frac{\omega_{kl}^2}{g} \iint_{S_0} \frac{\psi_{kl}}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} dS_0 + \iint_{S_0} \psi_{kl} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} \right) dS_0 = 0, \mathbf{P}_0 \in S_1, \quad (5.2)$$

$$2\pi \psi_{kl} + \iint_{S_1} \psi_{kl} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left( \frac{1}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} \right) dS_1 + \frac{\omega_{kl}^2}{g} \iint_{S_0} \frac{\psi_{kl}}{|\mathbf{P}-\mathbf{P}_0|} dS_0 = 0, \mathbf{P}_0 \in S_0.$$

У разі оболонки обертання та з використанням подання  $\psi_{kl} = \varphi_{kl}(r, z) \cos(l\theta)$  приходимо до одновимірної системи сингулярних інтегральних рівнянь у вигляді

$$2\pi \varphi_{kl}(r_0, z_0) + \int_{\Gamma} \varphi_{kl}(r(z), z) \Theta(z, z_0) r(z) d\Gamma - \frac{\omega_{kl}^2}{g} \int_0^R \varphi_{kl}(\rho, H) \Xi(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0) \rho d\rho = 0, \mathbf{P}_0 \in S_1, \quad (5.3)$$

$$2\pi \varphi_{kl}(r_0, H) + \int_{\Gamma} \varphi_{kl}(r(z), z) \Theta(z, z_0) r(z) d\Gamma - \frac{\omega_{kl}^2}{g} \int_0^R \varphi_{kl}(\rho, H) \Xi(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0) \rho d\rho = 0, \mathbf{P}_0 \in S_0.$$

$$\Theta(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[ \frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_l(k) - F_l(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_l(k) n_z \right\},$$

$$\Xi(\mathbf{P}, \mathbf{P}_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_l(k), \quad a = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2, \quad b = 2rr_0.$$

В (5.3) введені узагальнені еліптичні інтеграли за формулами

$$E_l(k) = (-1)^l (1 - 4l^2) \int_0^{\pi/2} \cos 2b_1 l \theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad (5.4)$$

$$F_l(k) = (-1)^l \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2b_1 l \theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad k^2 = 2b/(a + b). \quad (5.5)$$

Для обчислення інтегралів (5.4)-(5.5) використовується метод, запропонований в [16], заснований на використанні середнього арифметико-геометричного значення. Для розв'язання системи сингулярних рівнянь (5.3) застосовується метод граничних елементів зі сталою апроксимацією густини вздовж елемента [13], [17].

### 6 Аналіз числових результатів

Для тестування запропонованого методу здійснено порівняння отриманих числових результатів з даними, наведеними в [18]. Як і в [18], розглядаються як V-подібні, так і  $\Lambda$ -подібні конічні резервуари з  $R_1 = 1\text{ м}$  і  $\alpha = \pi/3$  з рідиною. Вважаємо, що  $R_2$  менший радіус конуса.

Розглянуті перші частоти з хвильовими числами  $l = 0, 1, 2$ , оскільки вони є найнижчими власними частотами, що визначають гідродинамічне навантаження. Результати порівняння надані в таблиці 6.1. для різних значень  $R_2$

При числових розрахунках обиралось 120 граничних елементів вздовж конічної частоти, 100 елементів вздовж радіусу вільної поверхні, та 100 елементів вздовж радіусу днища. Подальше збільшення кількості елементів не привело до суттєвої зміни результатів.

Результати, отримані запропонованим одновимірним МГЕ, гарно узгоджуються з даними [18]. Деяка розбіжність даних спостерігається при  $R_2=0.2\text{м}$  для  $\Lambda$ -подібних конічних резервуарів. При цьому, в [18] зроблено зауваження відносно невисокої точності полу-аналітичного методу саме в цьому випадку.

Надалі саме 120 граничних елементів використовується вздовж як циліндричної, так і конічної поверхонь для дослідження коливань рідини в коаксіальних оболонках.

Таблиця 6.1. Частоти плескань в конічних резервуарах

	V-подібні					Λ-подібні				
$R_2, \text{м}$	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
$l=0, k=1$										
[18]	3.386	3.386	3.382	3.139	2.187	24.153	10.014	6.665	4.550	2.683
МГЕ	3.389	3.390	3.391	3.192	2.200	20.027	10.034	6.669	4.545	2.678
$l=1, k=1$										
[18]	1.304	1.302	1.254	0.934	0.542	11.332	5.629	3.515	1.661	0.726
МГЕ	1.305	1.307	1.259	0.954	0.574	11.303	5.626	3.481	1.651	0.732
$l=2, k=1$										
[18]	2.263	2.263	2.255	2.015	1.361	17.760	8.967	5.941	3.724	1.923
МГЕ	2.265	2.270	2.269	2.048	1.394	17.939	8.965	5.941	3.726	1.951

Далі розв’язана спектральна гранична задача (4.6), що дозволило знайти форми  $\varphi_k(r, \theta, z)$  та відповідні їм фундаментальні частоти для конструкцій, зображених на рис.1.

Специфіка цих конструкцій полягає в тому, що вільна поверхня має форму кільця. Таку ж саме форму має вільна поверхня в при розгляданні тороїдальних оболонки, плескання рідини в таких оболонках досліджено в [11].

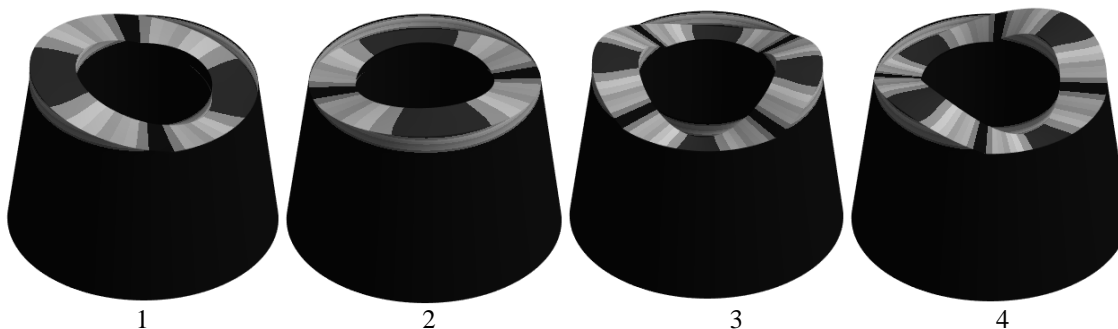
Значення нижчих восьми частот плескань коаксіальних циліндрично-конічних оболонкових конструкцій наведені в таблиці 6.2.

Таблиця 6.2. Частоти плескань рідини в коаксіальних оболонках, Гц

№	1	2	3	4	5	6	7	8
Оболонкова конструкція, рис. 1а)								
частота	0,6277	0,6277	0,8892	0,8892	1,0779	1,0779	1,2355	1,2355
Оболонкова конструкція, рис. 1б)								
частота	0,5512	0,5512	0,8153	0,8153	1,0027	1,0027	1,1548	1,1548

Зауважимо, що наявні кратні частоти плескань. Вони відповідають множнику  $\sin(l\theta)$  в рівняннях (4.1)-(4.2). Відповідні форми плескань вільної поверхні зображені на рис. 6.1-6.2. Частоти плескань обох конструкцій відрізняються незначно, але для конструкцій з меншим радіусом вільної поверхні вони є більшими. Ця різниця зменшується із зростанням хвильового числа.

Найнижчі частоти відповідають першому, другому та третьому хвильовим числам. Це відповідає даним розрахунків, наведеним а роботах [5,7,10], стосовно плескань рідини в конічних та циліндричних оболонках.



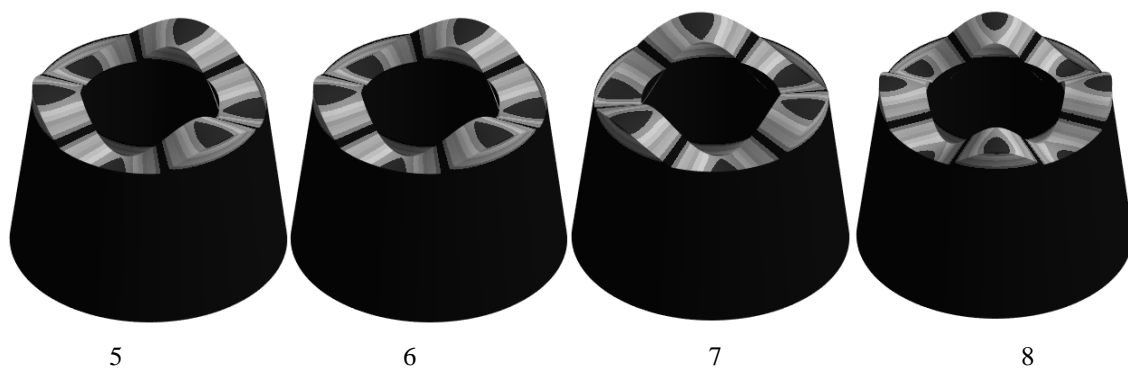


Рис. 6.2 Форми плескань  $\varphi_k(r, \theta, H)$  вільної поверхні конструкції 1а).

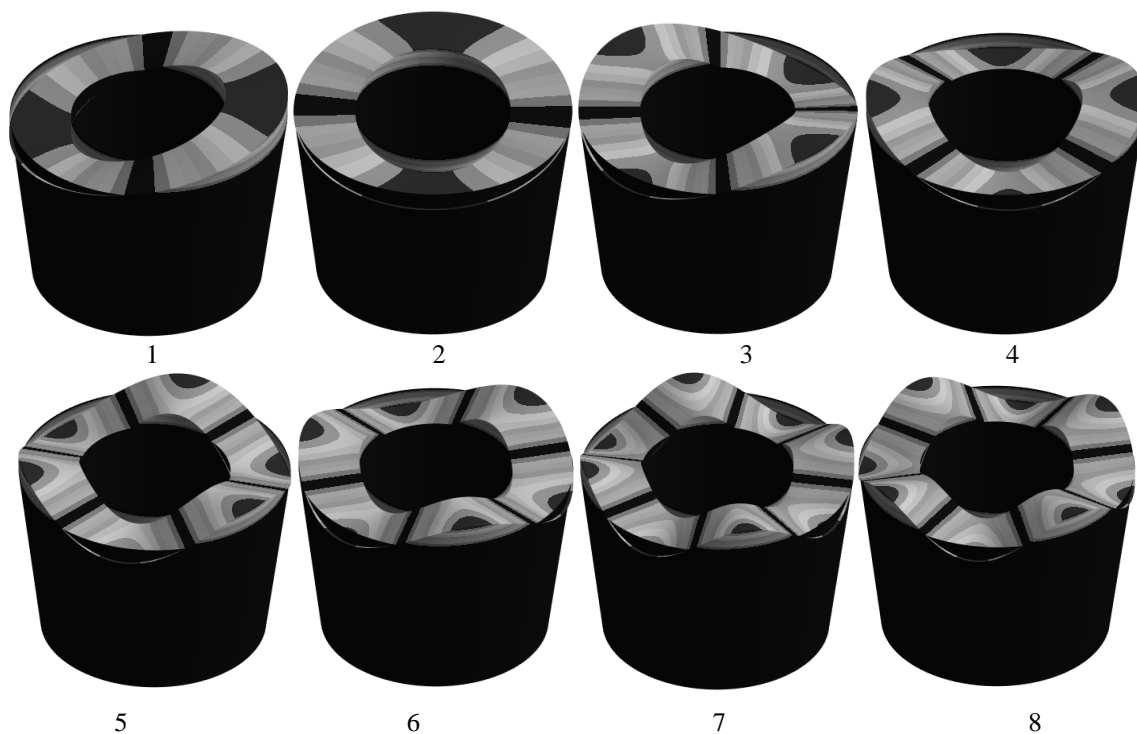


Рис. 6.3 Форми плескань  $\varphi_k(r, \theta, H)$  вільної поверхні конструкції 1б).

Таким чином, розв'язано спектральну задачу щодо визначення частот та форм коливань рідини в коаксіальних оболонкових конструкціях. Це дає змогу дослідити рух рідини в паливних баках та резервуарах при дії зовнішніх навантажень.

### Висновки

Запропоновано метод визначення частот та форм коливань рідини в складених оболонках обертання. Метод граничних елементів вперше застосовано для розв'язання спектральної крайової задачі в складених оболонках обертання. Цей підхід буде використовуватись при комп'ютерному моделюванні динамічної поведінки резервуарів з рідиною та дослідженні стійкості руху рідини в паливних баках ракет-носіїв складної форми. У подальшому передбачається дослідження коливань пружних коаксіальних оболонок з рідиною, з використанням різних композитних матеріалів [19].

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L. & Strelnikova E. Multi-Domain Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Tanks with Baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, Vol. 17(1), P. 75–87. 2016. <https://www.ikppress.org/index.php/JOBARI/article/view/3788>

2. Balas O.-M., Doicin C. V. and Cipu E. C. Analytical and Numerical Model of Sloshing in a Rectangular Tank Subjected to a Braking, *Mathematics*, Vol. 11, P. 949-955, 2023. [DOI:10.3390/math11040949](https://doi.org/10.3390/math11040949)
3. Liu J., Zang Q., Ye W., Lin G. High performance of sloshing problem in cylindrical tank with various barrels by isogeometric boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol.114, P.148-165, 2020. [DOI:10.1016/j.enganabound.2020.02.014](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.02.014).
4. Gnitko V., Karaiev A., Degtyariov K., Strelnikova E. Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells, *WIT Transactions on Engineering Sciences*, Vol.126, P.189-200, 2019. WIT Press, [DOI:10.2495/BE420171](https://doi.org/10.2495/BE420171).
5. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Tonkonozhenko A. Liquid Vibrations in Cylindrical Tanks with and Without Baffles Under Lateral and Longitudinal Excitations. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 25(3), P.117-132, 2020. [DOI:10.2478/ijame-2020-0038](https://doi.org/10.2478/ijame-2020-0038)
6. Tong, C. Shao Y., Bingham H. B. & Hanssen, FC. W. An Adaptive Harmonic Polynomial Cell Method with Immersed Boundaries: Accuracy, Stability and Applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 122, P. 2945–2980, 2021. <https://doi.org/10.1002/nme.6648>
7. Ibrahim R. A., *Liquid Sloshing Dynamics. Theory and Applications*. Cambridge University Press, 984 p., 2005.
8. Pradeepkumar K., Selvan V., Satheeshkumar K. Review of Numerical Methods for Sloshing. *International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology*. Vol.8, Issue XI, 2020, [doi.org/10.22214/ijraset.2020.32116](https://doi.org/10.22214/ijraset.2020.32116).
9. Zheng Jh., Xue, MA., Dou, P. et al. A review on liquid sloshing hydrodynamics. *J Hydrodyn* Vol. 33, P. 1089–1104, 2021. <https://doi.org/10.1007/s42241-022-0111-7>
10. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations. *Journal of Mathematics and Statistical Science*. Vol.5, P. 31-41, 2019. <http://www.ss-pub.org> > 2019/03 > [JMSS18122001](https://doi.org/10.1007/978-3-030-50491-5_1).
11. Karaiev A., Strelnikova E. Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells. In: *Ivanov, V., Pavlenko, I., Liaposhchenko, O., Machado, J., Edl, M. (eds) Advances in Design, Simulation and Manufacturing III. DSMIE 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham*. 2020. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-50491-5\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-50491-5_1)
11. Murawski K. Technical Stability of Very Slender Rectangular Columns Compressed by Ball-And-Socket Joints without Friction, *Int. Journal of Structural Glass and Advanced Materials Research*, Vol. 4(1), P. 186-208, 2020. [DOI: 10.3844/sgamrsp.2020.186.208](https://doi.org/10.3844/sgamrsp.2020.186.208)
12. Krutchenko D. V., Strelnikova E. A., Shuvalova Y. S. Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*, вип. 35, С. 31-37, 2017, <http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/13113/1/Krutchenko.pdf>.
13. Raynovskyy I. A. and Timokha A. N. Sloshing in Upright Circular Containers: Theory, Analytical Solutions, and Applications. 155p., 2020. CRC Press/Taylor and Francis Group, <https://doi.org/10.1201/9780429356711>
14. Brebbia, C.A. The birth of the boundary element method from conception to application. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, Vol. 77, P. iii-x, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.12.001>.
15. Karaiev, A, Strelnikova, E. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method. *Z Angew Math Mech*. Vol. 101, e201800339, 2021. DOI:[10.1002/zamm.201800339](https://doi.org/10.1002/zamm.201800339).
16. Naumenko V., Strelnikova H. Singular integrals accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 26, Issue 1, P. 95-98, 2002. [https://doi.org/10.1016/S0955-7997\(01\)00041-8](https://doi.org/10.1016/S0955-7997(01)00041-8).
17. Gavrilyuk I., Hermann M., Lukovsky I., Solodun O., Timokha A. Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks, *Engineering Computations*, Vol. 25, no. 6, P. 518 – 540, 2008. DOI: [10.1108/02644400810891535](https://doi.org/10.1108/02644400810891535)
18. Sierikova O, Strelnikova E, Gnitko V, Degtyarev K. Boundary Calculation Models for Elastic Properties Clarification of Three-dimensional Nanocomposites Based on the Combination of Finite and Boundary Element Methods. *IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)* P. 351–356. 2021. [doi: 10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570086](https://doi.org/10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570086)



## REFERENCES

1. V. Gnitko, V. Naumenko, L. Rozova. & E. Strelnikova, “Multi-Domain Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Tanks with Baffles”. *Journal of Basic and Applied Research International*, 2016, Vol. 17(1), P. 75–87, <https://www.ikppress.org/index.php/JOBARI/article/view/3788>
2. O.-M., Balas C. V. Doicin and E. C. Cipu, “Analytical and Numerical Model of Sloshing in a Rectangular Tank Subjected to a Braking”, *Mathematics*, 2023, Vol. 11, P. 949-955, [DOI:10.3390/math11040949](https://doi.org/10.3390/math11040949)
3. J. Liu Q. Zang, W. Ye, G. Lin, “High performance of sloshing problem in cylindrical tank with various barrels by isogeometric boundary element method”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2020, Vol. 114, P. 148-165, [DOI:10.1016/j.enganabound.2020.02.014](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.02.014)
4. V. Gnitko, A. Karaiev, K. Degtyariv, E. Strelnikova, “Singular boundary method in a free vibration analysis of compound liquid-filled shells”, *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 2019, Vol. 126, P. 189-200, WIT Press, [DOI:10.2495/BE420171](https://doi.org/10.2495/BE420171).
5. E. Strelnikova, D. Kriutchenko, V. Gnitko, A. Tonkonozhenko, “Liquid Vibrations in Cylindrical Tanks with and Without Baffles Under Lateral and Longitudinal Excitations“, *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 25, Issue 3, P. 117-132, 2020, [DOI: 10.2478/ijame-2020-0038](https://doi.org/10.2478/ijame-2020-0038).
6. C. Tong, Y. Shao, H. B. Bingham, & F. C. W. Hanssen, “An Adaptive Harmonic Polynomial Cell Method with Immersed Boundaries: Accuracy, Stability and Applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2021, Vol. 122, P. 2945–2980. <https://doi.org/10.1002/nme.6648>
7. R. A. Ibrahim, *Liquid Sloshing Dynamics. Theory and Applications*. Cambridge University Press. 2005, 984 p.
8. K. Pradeepkumar, V. Selvan, K. Satheeshkumar, “Review of Numerical Methods for Sloshing”, *International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology*, Vol. 8, Issue XI, 2020, [doi.org/10.22214/ijraset.2020.32116](https://doi.org/10.22214/ijraset.2020.32116).
9. Jh. Zheng, MA. Xue, P. Dou, et al. “A review on liquid sloshing hydrodynamics. *J Hydrodyn* 2021, Vol. 33, P. 1089–1104. <https://doi.org/10.1007/s42241-022-01111-7>
10. E. Strelnikova, D. Kriutchenko, V. Gnitko, “Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations”, *Journal of Mathematics and Statistical Science*, 2019, Vol. 5, P. 31-41. <http://www.ss-pub.org/v2019/03/JMSS18122001>.
11. A. Karaiev, E. Strelnikova, “Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells”, In: Ivanov, V., Pavlenko, I., Liaposhchenko, O., Machado, J., Edl, M. (eds) *Advances in Design, Simulation and Manufacturing III. DSMIE 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Springer, Cham, 2020, [https://doi.org/10.1007/978-3-030-50491-5\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-50491-5_1)
12. K. Murawski, “Technical Stability of Very Slender Rectangular Columns Compressed by Ball-And-Socket Joints without Friction”, *Int. Journal of Structural Glass and Advanced Materials Research*, 2020, Vol. 4(1), P. 186-208, [DOI: 10.3844/sgamrsp.2020.186.208](https://doi.org/10.3844/sgamrsp.2020.186.208).
13. D. V. Krutchenko, E. A. Strelnikova, Yu. S. Shuvalova, “Discrete singularities method in problems of seismic and impulse impacts on reservoirs”, *Bulletin of VN Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems»*, 2017, vol. 35, P. 31-37. <http://lib.kart.edu.ua/bitstream/123456789/13113/1/Krutchenko.pdf>.
14. I. A. Raynovskyy and A. N. Timokha, *Sloshing in Upright Circular Containers: Theory, Analytical Solutions, and Applications*. CRC Press/Taylor and Francis Group, 155p., 2020. <https://doi.org/10.1201/9780429356711>
15. C.A Brebbia, “The birth of the boundary element method from conception to application”, *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2017. vol. 77, pp. iii-x, <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.12.001>.
16. A. Karaiev, E. Strelnikova, “Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method”. *Z Angew Math Mech*. Vol. 101, e201800339, 2021. [DOI:10.1002/zamm.201800339](https://doi.org/10.1002/zamm.201800339).
17. V. Naumenko, H. Strelnikova, “Singular integrals accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 26 (1), P. 95-98, 2002. [https://doi.org/10.1016/S0955-7997\(01\)00041-8](https://doi.org/10.1016/S0955-7997(01)00041-8).



18. I. Gavrilyuk, M. Hermann, I. Lukovsky, O. Solodun, A. Timokha, “Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks”, *Engineering Computations*, Vol. 25, no. 6, P. 518 – 540, 2008. DOI: [10.1108/02644400810891535](https://doi.org/10.1108/02644400810891535)
19. O. Sierikova, E. Strelnikova, V. Gnitko, K. Degtyarev, “Boundary Calculation Models for Elastic Properties Clarification of Three-dimensional Nanocomposites Based on the Combination of Finite and Boundary Element Methods”, *IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*, P. 351–356, 2021. DOI: [10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570086](https://doi.org/10.1109/KhPIWeek53812.2021.9570086)

**Gnitko Vasyi** *PhD, senior researcher*  
*A. Pidhorny Institute of Mechanical Engineering Problems*  
*vul. Pozharskogo, 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine,*

**Degtyarev Kirill** *PhD, researcher*  
*A. Pidhorny Institute of Mechanical Engineering Problems*  
*vul. Pozharskogo, 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine*

**Doroshenko Volodymir** *DSc, Professor*  
*Kharkiv National University of Radio Electronics*  
*Nauky Ave, 14, Kharkiv, 61166, Ukraine*

**Krutchenko Denys** *PhD, junior researcher*  
*A. Pidhorny Institute of Mechanical Engineering Problems*  
*vul. Pozharskogo, 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine*

## Spectral boundary value problem for coaxial shells of revolution

The main objective of this study is to develop an efficient numerical approach using boundary elements to estimate natural frequencies of liquid vibrations in composite tanks. The spectral boundary value problem for liquid tanks is to find the natural frequencies and modes of free surface sloshing. The calculation of hydrodynamic forces on the walls of tanks with liquid is an important problem for ensuring the strength and stability of movement of industrial tanks and vessels. The vibrations of shell structures, including cylindrical and conical shells connected by rings, are analyzed. The area between the shells is filled with an ideal incompressible fluid. Numerical modeling uses the superposition method in combination with the boundary element method. A numerical solution of the spectral boundary value problem regarding fluid vibrations in rigid shell structures has been carried out. Frequencies and modes are determined by solving systems of singular integral equations. For the shells of revolution, these systems are simplified to one-dimensional equations, where the integrals are calculated along curves and line segments. Efficient numerical procedures are used to calculate one-dimensional integrals with logarithmic and Cauchy features. Test calculations confirm the high accuracy and efficiency of the proposed method. The importance and practical significance of the method lies in the ability to study fluid fluctuations in real compound fuel tanks of launch vehicles under different load conditions. This makes it possible to study the movement of liquid in fuel tanks and reservoirs under the action of external loads. The elaborated method will be used in computer modeling the dynamic behavior of liquid tanks and the stability study of liquid movement in compound fuel tanks of launch vehicles. In the future, it is planned to study the vibrations of elastic coaxial shells with liquid, using various composite materials.

**Keywords:** *cylindrical-conical tanks, systems of singular integral equations, boundary element method, liquid sloshing.*