

УДК 517.95 : 517.988

**Кончаковська
Оксана Сергіївна***аспірант кафедри прикладної математики
Харківський національний університет радіоелектроніки, пр. Науки
14, Харків-166, Україна, 61166
e-mail: oksana.konchakovska@nure.ua
<https://orcid.org/0000-0002-0836-6045>***Сидоров
Максим Вікторович***доктор фіз.-мат. наук, професор; завідувач кафедри прикладної
математики Харківського національного університету
радіоелектроніки, пр. Науки 14, Харків-166, Україна, 61166
e-mail: maxim.sidorov@nure.ua;
<https://orcid.org/0000-0001-8022-866X>*

Двобічний ітераційний метод на основі використання функції Гріна в задачах чисельного аналізу деяких електромеханічних систем

Актуальність. У роботі розглядається задача чисельного аналізу нелінійної крайової задачі, що моделює електростатичну мікроелектромеханічну систему під дією зовнішнього тиску. Мікроелектромеханічні системи поєднують механічні та електричні компоненти мікронних розмірів та використовуються у автомобілебудуванні, авіації, медицині. Електростатична активація цих систем є ключовою для функціонування мікродзеркал, мікрорезонаторів, акселерометрів тощо. Основним обмеженням електростатичних мікроелектромеханічних систем є явище нестабільності відхилення, що призводить до дестабілізації системи. Для нівелювання цих обмежень запропоновано дослідити параметри моделі та отримати їх оцінки.

Мета. За допомогою методів теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах розробити метод двобічних наближень розв'язання поставленої задачі.

Методи дослідження. Математична модель електростатичної мікроелектромеханічної системи представлена нелінійним еліптичним рівнянням з оператором Лапласа та однорідною крайовою умовою першого роду. За допомогою методу функцій Гріна від цієї диференціальної задачі здійснюється перехід до еквівалентного інтегрального рівняння Гаммерштейна, яке аналізується методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах.

Результати. Досліджено властивості нелінійного оператора, яке входить до рівняння Гаммерштейна, отримано умови існування єдиного додатного розв'язку розглядуваної задачі та умови збіжності до нього двобічних наближень. Для запропонованого методу двобічних наближень також отримано апостеріорну оцінку похибки та оцінку кількості ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності.

Висновки. Робота та ефективність розробленого методу продемонстрована обчислювальними експериментами для тестової задачі у круговій області з різними значеннями параметрів моделі. Результати обчислювальних експериментів представлені у вигляді числової та графічної інформації.

Ключові слова: метод двобічних наближень, метод функцій Гріна, методи нелінійного аналізу, конусний відрізок, електромеханічна система, дія зовнішнього тиску, монотонний оператор.

Як цитувати: Кончаковська О.С., Сидоров М.В. . Двобічний ітераційний метод на основі використання функції Гріна в задачах чисельного аналізу деяких електромеханічних систем. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2022. вип. 55. С.19-31. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2022-55-02>

How to quote: Konchakovska O., Sidorov M., “Two-sided iterative method based on the use of the Green's function in problems of numerical analysis of some electromechanical systems ” *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series “Mathematical modelling. Information technology. Automated control systems*, vol. 55, pp. 19-31, 2022. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2022-55-02>

1. Вступ

Із зростаючим попитом на мініатюрні механізми зі складними функціями електромеханічні системи вважаються одними з найперспективніших технологій цього століття. Такі пристрої поєднують механічні та електричні компоненти і використовуються у багатьох галузях науки і техніки. В залежності від ступеню деталізації електромеханічні системи бувають мікро- та

нанорозмірів. Мікроелектромеханічні системи (скорочено МЕМС) є найбільш поширеними для проектування більшості приладів [1].

Математичні моделі мікро- та наноелектромеханічних систем зазвичай представлені у вигляді диференціальних рівнянь в частинних похідних з відповідними початковими та граничними умовами. Найпоширеніший метод розв'язання таких нестационарних задач полягає в тому, щоб звести їх до звичайних диференціальних рівнянь за часовою змінною, а потім розв'язати отримані рівняння чисельно або аналітично. Також при редукції використовуються деякі підходи дискретизації, а саме: метод скінченних елементів, метод граничних елементів, метод скінченних різниць тощо [2]. Для чисельного аналізу відповідних стаціонарних задач зручно використовувати чисельні методи з двобічним характером збіжності. Це дозволяє апостеріорно оцінювати похибку наближеного розв'язку на кожному кроці ітераційного процесу [3].

Таким чином, розробка та вдосконалення існуючих підходів до математичного моделювання і чисельного аналізу задач, що виникають при дослідженні мікро- та наноелектромеханічних систем, є актуальною науковою задачею.

2. Постановка задачі

Більшість моделей електростатичних мікроелектромеханічних систем складаються із двох струмопровідних пластин: закріпленої вздовж межі еластичної пластини зверху та нерухокої жорсткої пластини знизу. Прикладена електрична напруга між двома пластинами призводить до відхилення еластичної пластини та подальшої зміни ємності МЕМС. Схема роботи типової електростатичної МЕМС представлена на рис. 2.1.

Електростатичні мікроелектромеханічні системи мають характерну особливість, що обмежує їх ефективність – нестабільність відхилення. Цей ефект проявляється, коли прикладена напруга перевищує певне критичне значення, внаслідок чого пластини стикаються, що обмежує діапазон стабільної роботи пристроїв. Нестабільність відхилення було виявлено та досліджено у багатьох роботах [1, 4-7] і продемонстровано для моделі із системою зосереджених мас і пружин з двома паралельними пластинами з різними потенціалами. Таким чином, для розробки надійних високопродуктивних пристроїв необхідно визначити стійкі режими роботи для запобігання виникнення нестабільності відхилення.

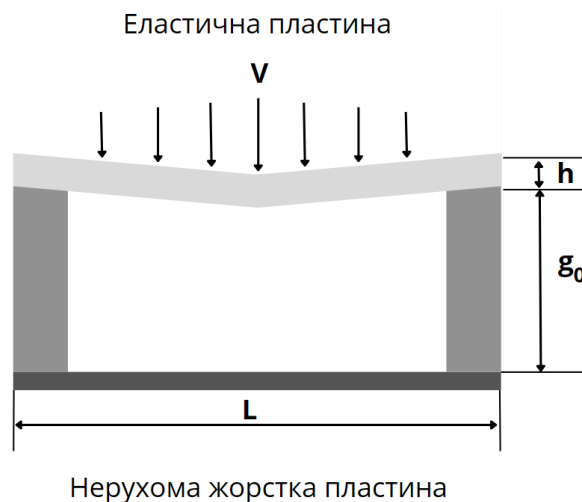


Рис. 2.1 Схема типової електростатичної МЕМС

У роботі розглядатимемо нелінійну крайову задачу, що моделює роботу електростатичної МЕМС під дією зовнішнього тиску [8, 9]:

$$-\Delta u = \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u)^2} + P(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$u(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.2)$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2.3)$$

де Ω – плоска область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $f(\mathbf{x})$ – функція, що описує діелектричні властивості пластини, $0 \leq f(\mathbf{x}) \leq 1$, u – величина прогину пластини, $P(\mathbf{x})$ – зовнішній тиск, $P(\mathbf{x}) \geq 0$, λ – параметр, що характеризує сили Кулона,

$$\lambda = \frac{\varepsilon_0 V^2 L^2}{2\sigma_0 h g_0^3},$$

ε_0 – вакуумна діелектрична стала, V – прикладена напруга, g_0 – відстань між двома пластинами за відсутності деформації, σ_0 – напруга у пластині, h – товщина деформованої пластини, L – довжина пластини.

Функціонал енергії розглядуваної системи в навантаженому стані визначається сумою потенційної енергії деформації тіла та потенціалу зовнішніх сил

$$E = \int_{\Omega} \left(\frac{T}{2} |\nabla r|^2 + \frac{D}{2} (\Delta r)^2 - \frac{f(\mathbf{x}) V^2}{L+r} + P(\mathbf{x}) r \right) d\mathbf{x},$$

де r – величина прогину пластини, $T > 0$ – стала напруги, $D = \frac{2h^3 Y}{3(1-\nu^2)}$, h – товщина пластини,

Y – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона.

Необхідна умова мінімуму функціонала E (рівняння Ейлера-Остроградського) має вигляд

$$T\Delta r - D\Delta^2 r = \frac{f(\mathbf{x})V^2}{(L+r)^2} + P(\mathbf{x}) \text{ у } \Omega,$$

$$r|_{\partial\Omega} = 0.$$

Позначимо $r = -u$ та покладемо $L=1$, $T=1$, $\lambda=V^2$, $D=0$, тоді й отримаємо нелінійну крайову задачу (2.1) – (2.3).

Математична модель (2.1) – (2.3) розглядалась у роботах [4-6, 10], але за умови, що $P(\mathbf{x}) = \text{const}$.

3. Метод дослідження

Розглянемо крайову задачу (2.1) – (2.3), де функції $f(\mathbf{x})$ і $P(\mathbf{x})$ за фізичним змістом є неперервними і невід’ємними при $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$.

Поставлена задача еквівалентна інтегральному рівнянню Гаммерштейна

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{s}, \quad (3.1)$$

де $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функція Гріна задачі (2.1) – (2.3), $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$.

Розглядатимемо рівняння (3.1) у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ функцій, неперервних в області $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, де норма вводиться за правилом $\|u\| = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |u(\mathbf{x})|$. Визначимо конус невід’ємних функцій $K_+ = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}\}$ у $C(\bar{\Omega})$. Зауважимо, що конус K_+ у $C(\bar{\Omega})$ є нормальним і навіть гострим [11]. Введемо напівопорядкованість у просторі $C(\bar{\Omega})$ за правилом:

$$u, v, \text{ якщо } v - u \in K_+, \text{ тобто } u(\mathbf{x}) \leq v(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Наразі існування класичного розв’язку задачі (2.1) – (2.3), тобто такої функції $u^* \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, яка задовольняє рівняння (2.1) і умови (2.2), (2.3), ця функція також

задовольнятиме й інтегральне рівняння (3.1). Якщо ж задача (2.1) – (2.3) не має класичного розв'язку, то рівняння (3.1) покладемо в основу означення узагальненого розв'язку задачі (2.1) – (2.3).

Означення. Узагальненим розв'язком крайової задачі (2.1) – (2.3) називатимемо функцію $u^* \in K_+$, яка є розв'язком інтегрального рівняння (3.1).

З рівнянням (3.1) пов'яжемо нелінійний інтегральний оператор T , що діє у $C(\bar{\Omega})$ за правилом

$$T(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{s}. \quad (3.2)$$

Властивості оператора T вигляду (3.2) містяться в наступній лемі.

Лема. Оператор T вигляду (3.2) є:

а) додатним оператором;

б) u_0 -додатним оператором, де функція $u_0(\mathbf{x})$ визначається рівністю

$$u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}; \quad (3.3)$$

в) є ізотонним оператором;

г) має інваріантний конусний відрізок $\langle 0, \beta \rangle$, причому стала β , $0 < \beta < 1$, є розв'язком нерівності

$$\lambda M_f \leq (\beta - M_P)(1 - \beta)^2, \quad (3.4)$$

де

$$M_f = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad M_P = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) P(\mathbf{s}) d\mathbf{s};$$

д) є на $\langle 0, \beta \rangle$ ліпшиц-неперервним оператором, тобто для всіх $v, w \in \langle 0, \beta \rangle$ виконується нерівність

$$\|T(v) - T(w)\| \leq \gamma \|v - w\|, \quad (3.5)$$

$$\text{де } \gamma = \frac{2\lambda M_f}{(1-\beta)^3}.$$

Доведення. а) Як відомо [12], функція Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ першої крайової задачі для оператора $-\Delta$ на площині неперервна при $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \bar{\Omega}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$, і задовольняє оцінці

$$0 \leq G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \leq k_0 \left| \ln \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}} \right|,$$

де $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}} = |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = \sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2}$ – відстань між точками \mathbf{x} і \mathbf{s} .

Тоді, з урахуванням невід'ємності та неперервності функцій $u(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})$ і $P(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$, невід'ємним і неперервним при $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \bar{\Omega}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$, буде і підінтегральний вираз у (3.2), а отже, функція $T(u)(\mathbf{x})$ невід'ємна та неперервна при $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$. Це означає, що оператор T вигляду (3.2) діє у просторі $C(\bar{\Omega})$ і переводить функцію з K_+ у функцію з K_+ , тобто залишає інваріантним конус K_+ і тому є додатним оператором.

б) Функція $u_0(\mathbf{x})$ вигляду (3.3) належить $K_+ \setminus \{\theta\}$ (θ – нульовий елемент простору $C(\bar{\Omega})$) і є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &> 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned}$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega.$$

Якщо Ω_0 – деяка підобласть області Ω , причому $\mu(\Omega_0) > 0$, то знайдеться таке число $\gamma = \gamma(\Omega_0) > 0$, що матиме місце нерівність [12]

$$\gamma \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \leq \int_{\Omega_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds.$$

З іншого боку, якщо $u \in K_+ \setminus \{0\}$, то для деякого $\alpha_0 > 0$ знайдеться множина $\Omega_0 \subset \Omega$ така, що $\mu(\Omega_0) > 0$ і $\frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u(\mathbf{x}))^2} + P(\mathbf{x}) \geq \alpha_0$ для всіх $\mathbf{x} \in \Omega_0$. Тоді для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} T(u)(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] ds \geq \int_{\Omega_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] ds \geq \\ &\geq \alpha_0 \int_{\Omega_0} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds \geq \alpha_0 \gamma \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds = \alpha_0 \gamma u_0(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Далі, для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} T(u)(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] ds \leq \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left[\frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u(\mathbf{x}))^2} + P(\mathbf{x}) \right] \cdot \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds = \\ &= \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left[\frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u(\mathbf{x}))^2} + P(\mathbf{x}) \right] \cdot u_0(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Отже, для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ матиме місце подвійна нерівність

$$\alpha u_0(\mathbf{x}) \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-u(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] ds \leq \beta u_0(\mathbf{x}),$$

де $\alpha = \alpha_0 \gamma > 0$, $\beta = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left[\frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u(\mathbf{x}))^2} + P(\mathbf{x}) \right] > 0$, що і означає u_0 -додатність оператора T .

в) Нехай $v, w \in K_+$ і $v \leq w$, тобто $v(\mathbf{x}) \leq w(\mathbf{x})$ для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$. Тоді для всіх $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$

$$\frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-v(\mathbf{x}))^2} + P(\mathbf{x}) \leq \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-w(\mathbf{x}))^2} + P(\mathbf{x}),$$

а отже, з огляду на невід'ємність функції Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$,

$$T(v)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-v(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] ds \leq \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-w(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] ds = T(w)(\mathbf{x}).$$

Таким чином, з $v, w \in K_+$ і $v \leq w$ випливає, що $T(v) \leq T(w)$. Це і означає ізотонність оператора T вигляду (3.2).

г) Інваріантний конусний відрізок $\langle v_0, w_0 \rangle$ визначається нерівностями $T(v_0) \leq v_0$ і $T(w_0) \geq w_0$. Якщо покласти $v_0 = 0$ і $w_0 = \beta$, то зазначені нерівності (з огляду на (3.2)) набудуть вигляду

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [\lambda f(\mathbf{s}) + P(\mathbf{s})] ds \geq 0 \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (3.6)$$

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1-\beta)^2} + P(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{s} \leq \beta \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.7)$$

Через невід'ємність функції Гріна $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ при $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \bar{\Omega}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{s}$, невід'ємність функцій $f(\mathbf{x})$ і $P(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ та додатність параметрів λ нерівність (3.6) завжди виконуватиметься. Нерівність (3.7) можна записати у вигляді

$$\frac{\lambda}{(1-\beta)^2} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}) d\mathbf{s} + \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) P(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \beta \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \Omega,$$

або, переходячи до максимумів, у вигляді

$$\frac{\lambda M_f}{(1-\beta)^2} + M_P \leq \beta, \quad (3.8)$$

де позначено

$$M_f = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad M_P = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) P(\mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

З фізичних міркувань випливає, що $0 < \beta < 1$. Тоді після множення на $(1-\beta)^2$ нерівність (3.8) набуває вигляду (3.4).

д) Позначимо

$$F(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) = \frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-u(\mathbf{x}))^2} + P(\mathbf{x}).$$

Нехай $v, w \in (0, \beta)$. Розглянемо вираз

$$\begin{aligned} |F(\mathbf{x}, v(\mathbf{x})) - F(\mathbf{x}, w(\mathbf{x}))| &= \left| \left(\frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-v(\mathbf{x}))^2} + P(\mathbf{x}) \right) - \left(\frac{\lambda f(\mathbf{x})}{(1-w(\mathbf{x}))^2} + P(\mathbf{x}) \right) \right| = \\ &= \left| \lambda f(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{(1-v(\mathbf{x}))^2} - \frac{1}{(1-w(\mathbf{x}))^2} \right) \right| = \lambda f(\mathbf{x}) \left| \frac{1}{(1-v(\mathbf{x}))^2} - \frac{1}{(1-w(\mathbf{x}))^2} \right|. \end{aligned}$$

Оскільки при $0 < v, w < \beta$

$$\left| \frac{1}{(1-v)^2} - \frac{1}{(1-w)^2} \right| \leq \frac{2}{(1-\beta)^3} |v-w|,$$

то отримаємо нерівність

$$|F(\mathbf{x}, v(\mathbf{x})) - F(\mathbf{x}, w(\mathbf{x}))| \leq \frac{2\lambda f(\mathbf{x})}{(1-\beta)^3} |v(\mathbf{x}) - w(\mathbf{x})|.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \|T(v) - T(w)\| &= \max_{\mathbf{x} \in \Omega} |T(v)(\mathbf{x}) - T(w)(\mathbf{x})| = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \left| \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) [F(\mathbf{s}, v(\mathbf{s})) - F(\mathbf{s}, w(\mathbf{s}))] d\mathbf{s} \right| \leq \\ &\leq \frac{2\lambda}{(1-\beta)^3} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \cdot \max_{\mathbf{x} \in \Omega} |v(\mathbf{x}) - w(\mathbf{x})| = \frac{2\lambda M_f}{(1-\beta)^3} \|v - w\| = \gamma \|v - w\|. \end{aligned}$$

Лему доведено.

Зауважимо, що оператор T вигляду (3.2) є неперервним і цілком неперервним.

Побудуємо метод двобічних наближень знаходження додатного розв'язку інтегрального рівняння (3.1) (а отже, і крайової задачі (2.1) – (2.3)). Оскільки за початкове наближення обиратимуться кінці інваріантного конусного відрізка $\langle 0, \beta \rangle$, то спочатку проаналізуємо нерівність (3.4) за умови $0 < \beta < 1$. Позначимо $\varphi(\beta) = (\beta - M_P)(1 - \beta)^2$. Тоді нерівність (3.4) набуває вигляду $\lambda M_f \leq \varphi(\beta)$. Очевидно, що $\varphi(0) = -M_P \leq 0$, $\varphi(1) = \varphi(M_P) = 0$ і якщо $M_P \geq 1$, то $\varphi(\beta) < 0$ при $0 < \beta < 1$ і нерівність (3.4) не виконуватиметься. Отже, має бути виконана умова $0 \leq M_P < 1$. За виконання неї $\varphi(\beta) > 0$, якщо $M_P < \beta < 1$. Знаходимо також, що за умови $0 \leq M_P < 1$

$$\sup_{0 < \beta < 1} \varphi(\beta) = \varphi\left(\frac{2M_P + 1}{3}\right) = \frac{4(1 - M_P)^3}{27} > 0.$$

Отже, нерівність (3.4) не може бути виконана, якщо $\sup_{0 < \beta < 1} \varphi(\beta) < \lambda M_f$. Тому, якщо нерівність

(3.4) має розв'язки, то має виконуватися нерівність $\lambda M_f \leq \frac{4(1 - M_P)^3}{27}$, тобто значення параметра λ має задовольняти нерівність

$$\lambda \leq \frac{4(1 - M_P)^3}{27M_f}. \quad (3.9)$$

Тоді нерівність (3.4) не матиме розв'язку у випадку, коли $\lambda > \frac{4(1 - M_P)^3}{27M_f}$, матиме розв'язок

$\beta = \beta_0 = \frac{2M_P + 1}{3}$ у випадку, якщо $\lambda = \frac{4(1 - M_P)^3}{27M_f}$, і матиме у випадку, коли $\lambda < \frac{4(1 - M_P)^3}{27M_f}$,

розв'язок $\underline{\beta} \leq \beta \leq \bar{\beta}$, де $\underline{\beta}$, $\bar{\beta}$ – відповідно найменший та найбільший корені рівняння $\lambda M_f = (\beta - M_P)(1 - \beta)^2$ на інтервалі $(0; 1)$.

Зауважимо, що $M_P < \underline{\beta} < \bar{\beta} < 1$.

Сформуємо ітераційний процес за схемою

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1 - v^{(k)}(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (3.10)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{\lambda f(\mathbf{s})}{(1 - w^{(k)}(\mathbf{s}))^2} + P(\mathbf{s}) \right] d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (3.11)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta. \quad (3.12)$$

Враховуючи інваріантність конусного відрізка $\langle 0, \beta \rangle$ та ізотонність оператора послідовності $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$ і $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$ неспадають та незростають за конусом K_+ відповідно. Існування границь цих послідовностей $v^*(\mathbf{x})$ і $w^*(\mathbf{x})$ впливає з нормальності конуса K_+ і повної неперервності оператора T . Отже, справджується ланцюг нерівностей

$$v^0 = v^{(0)} \leq v^{(1)} \leq \dots \leq v^{(k)} \leq \dots \leq v^* \leq w^* \leq \dots \leq w^{(k)} \leq \dots \leq w^{(1)} \leq w^{(0)} = w^0.$$

Можливими є два випадки: $v^* < w^*$ і $v^* = w^*$. У другому випадку $u^* := v^* = w^*$ – єдина на конусному відрізку $\langle 0, \beta \rangle$ нерухома точка оператора T , а отже, u^* – єдиний на $\langle 0, \beta \rangle$ додатний розв'язок розглядуваної крайової задачі (2.1) – (2.3).

Отримаємо умови, за виконання яких, $v^* = w^*$. Для цього оцінимо норму $\|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\|$. З огляду на нерівність (3.5), отримаємо

$$\begin{aligned} \|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| &= \|T(w^{(k)}) - T(v^{(k)})\| \leq \gamma \|w^{(k)} - v^{(k)}\| = \gamma \|T(w^{(k-1)}) - T(v^{(k-1)})\| \leq \\ &\leq \gamma^2 \|w^{(k-1)} - v^{(k-1)}\| \leq \dots \leq \gamma^{k+1} \|w^{(0)} - v^{(0)}\| = \gamma^{k+1} \beta. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \|w^{(k+1)} - v^{(k+1)}\| = 0$, тобто $v^* = w^*$, якщо $\gamma < 1$.

Отже, справджується така теорема.

Теорема 3.1. Нехай $\langle 0, \beta \rangle$ – інваріантний конусний відрізок для оператора T вигляду (3.2) і $\gamma < 1$. Тоді ітераційний процес (3.10) – (3.12) двобічно збігається у нормі простору $C(\bar{\Omega})$ до єдиного на $\langle 0, \beta \rangle$ неперервного додатного розв'язку u^* крайової задачі (2.1) – (2.3).

Якщо на k -й ітерації за наближений розв'язок крайової задачі (2.1) – (2.3) обрати функцію

$$u^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{v^{(k)}(\mathbf{x}) + w^{(k)}(\mathbf{x})}{2},$$

то, з огляду на викладене вище, похибка цього наближення оцінюватиметься нерівністю

$$\|u^* - u^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \|w^{(k)} - v^{(k)}\| \leq \frac{1}{2} \gamma^k \beta. \quad (3.13)$$

Отже, якщо задана точність $\varepsilon > 0$, то ітераційний процес (3.10) – (3.12) слід проводити до виконання нерівності

$$\|w^{(k)} - v^{(k)}\| = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < 2\varepsilon$$

або нерівності $\gamma^k \beta < 2\varepsilon$ і тоді з точністю ε можна вважати, що $u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(k)}(\mathbf{x})$.

З апіорної оцінки (3.13) можна отримати оцінку для кількості ітерацій, необхідних для досягнення заданої точності. А саме, розв'язуючи нерівність $\frac{1}{2} \gamma^k \beta < \varepsilon$, знаходимо, що для досягнення точності ε треба зробити

$$k_0(\varepsilon) = \left[\ln \frac{\beta}{2\varepsilon} / \ln \frac{1}{\gamma} \right] + 1$$

ітерацій, де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

Як бачимо, з отриманих оцінок для найбільш швидкої збіжності ітераційного процесу треба обирати $\beta = \underline{\beta}$.

4. Результати обчислювального експерименту

Розглянемо задачу (2.1) – (2.3) у області $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\} \subset \mathbf{R}^2$. Функція Гріна такої задачі має вигляд

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\rho r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1}},$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$, $\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$, точки \mathbf{s} , \mathbf{s}^1 – точки, симетричні відносно одиничного кола, $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}$, $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1}$ – відстань між точками \mathbf{x} , \mathbf{s} та \mathbf{x} , \mathbf{s}^1 відповідно.

Відомо [6], що функція для опису діелектричних властивостей пластини у круговій області може мати вигляд

$$f(\mathbf{x}) = e^{\zeta(|\mathbf{x}|^2 - 1)} = e^{\zeta(x_1^2 + x_2^2 - 1)},$$

де ζ – невід’ємна стала.

Для моделювання впливу зовнішнього тиску пропонується обрати функцію

$$P(\mathbf{x}) = \kappa(1 - |\mathbf{x}|^2)(5 - (1 - |\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2)), \quad \kappa > 0, \quad \mathbf{a} = (0,75; 0,75)$$

(випадок $\kappa = 0$ відповідатиме відсутності зовнішнього тиску).

Нехай $\zeta = 2$, $\kappa = 0,5$. Тоді $M_f = 0,0623$, $M_P = 0,3497$. Графіки поверхонь функцій $f(\mathbf{x})$ та $P(\mathbf{x})$ представлені на рис. 4.1 та рис. 4.2 відповідно. З умови (3.9) маємо, що $\lambda \leq 0,6536$. Тоді для кінців сильно інваріантного конусного відрізка згідно (3.4) отримаємо наступну умову $0,4983 \leq \beta \leq 0,5787$. Таким чином, конусний відрізок має вигляд $\langle 0, \beta \rangle = \langle 0, \underline{\beta} \rangle = \langle 0; 0,4983 \rangle$.

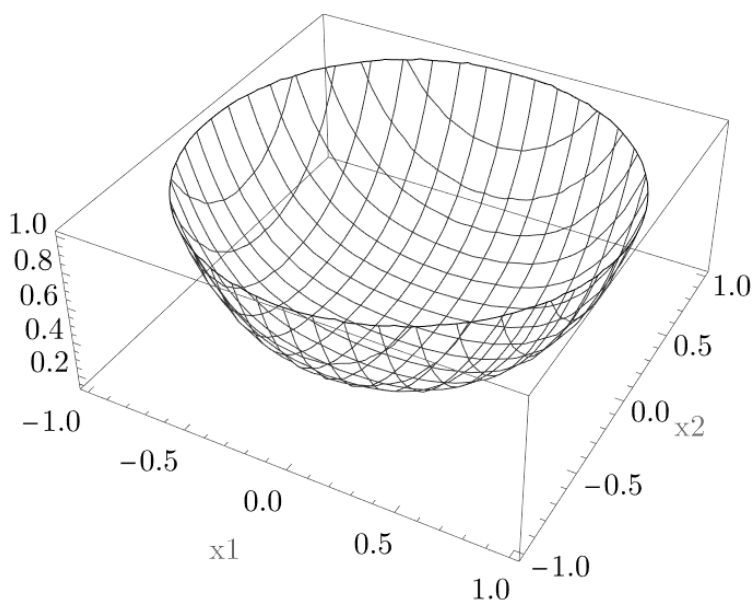


Рис. 4.1 Графік поверхні функції $f(\mathbf{x})$

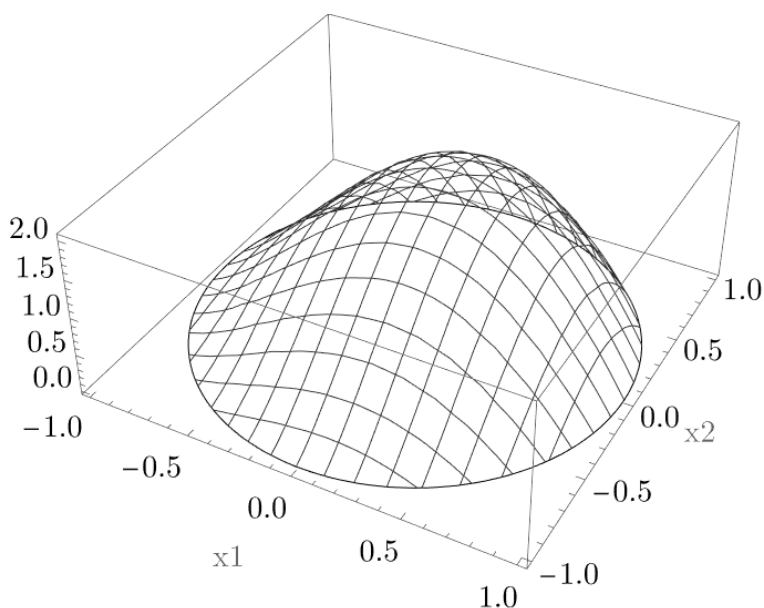


Рис. 4.2 Графік поверхні функції $P(\mathbf{x})$

Оберемо $\lambda = 0,6$. Тоді $\gamma = 0,5922$. Оскільки $\gamma < 1$, то згідно з теоремою 3.1 послідовні наближення, що формуються за схемою (3.10) – (3.12), двобічно збігаються до єдиного на $\langle 0, \beta \rangle$ розв'язку задачі.

Нехай задано точність $\varepsilon = 10^{-4}$. Оскільки на п'ятій ітерації виконується умова

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w^{(5)}(\mathbf{x}) - v^{(5)}(\mathbf{x})) = 0,24 \cdot 10^{-3},$$

то з точністю $0,12 \cdot 10^{-4}$ отримаємо $u^*(\mathbf{x}) \approx u^{(5)}(\mathbf{x}) = \frac{w^{(5)}(\mathbf{x}) + v^{(5)}(\mathbf{x})}{2}$.

При цьому $\|u^{(5)}\| = 0,4157$. Двобічний характер збіжності послідовних наближень проілюстровано рис. 4.3, де представлені графіки верхніх (суцільна лінія) та нижніх (пунктирна лінія) наближень до розв'язку задачі при $x_2 = 0$. Лінії рівня та поверхня наближеного розв'язку $u^{(5)}(\mathbf{x})$ зображені на рис. 4.4 та 4.5 відповідно.

Також обчислювальний експеримент було проведено для різних значень ζ . У таблиці 1 представлено значення норми наближеного розв'язку задачі (2.1) – (2.3) в залежності від параметрів ζ та λ .

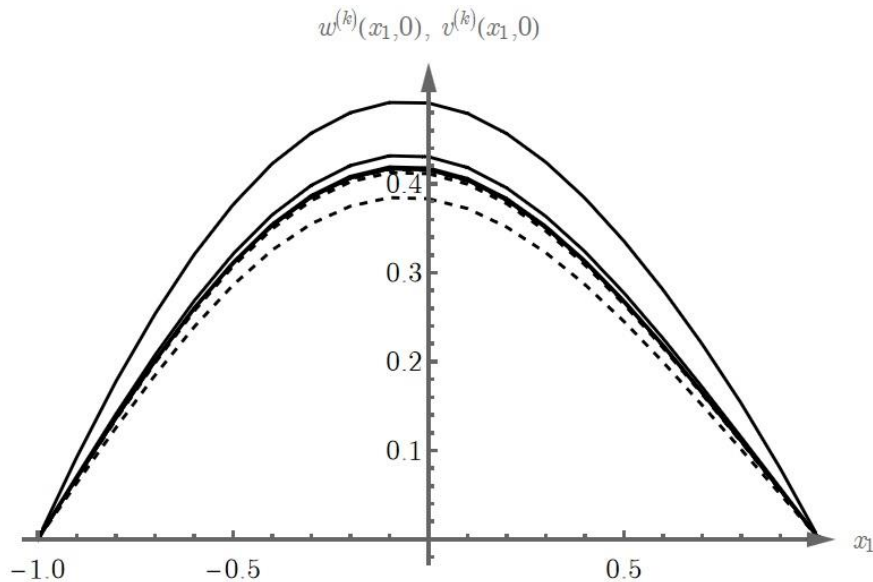


Рис. 4.3 Графіки верхніх та нижніх наближень до розв'язку задачі у перерізі $x_2 = 0$

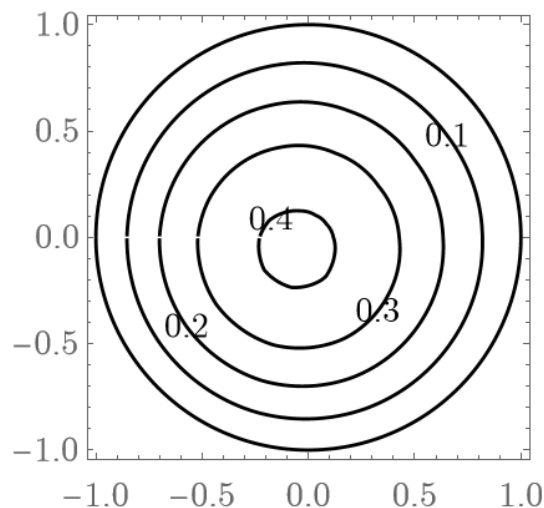


Рис. 4.4 Графік ліній рівня наближеного розв'язку

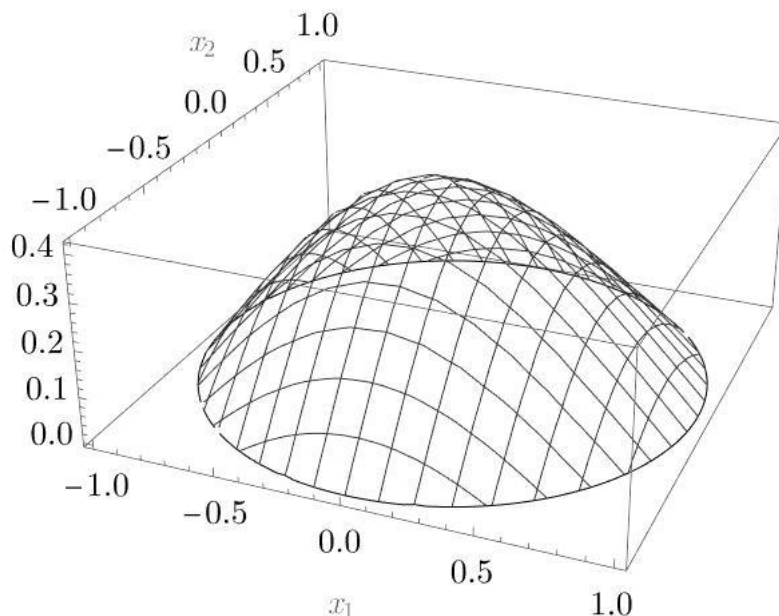


Рис. 4.5 Графік поверхні наближеного розв'язку

Таблиця 1. Значення норми наближеного розв'язку в залежності від параметрів задачі

ζ	$\lambda_{\max}(\zeta)$	λ	$\ u\ $	ζ	$\lambda_{\max}(\zeta)$	λ	$\ u\ $
0	0,1629	0,04	0,3646	1	0,3361	0,08	0,3631
		0,08	0,3850			0,16	0,3817
		0,12	0,4077			0,24	0,4020
		0,16	0,4333			0,32	0,4245
0,5	0,2356	0,05	0,3616	1,5	0,4724	0,10	0,3607
		0,10	0,3784			0,20	0,3765
		0,15	0,3967			0,30	0,3935
		0,20	0,4167			0,40	0,4118

Аналіз результатів обчислювального експерименту показав, що при фіксованому значенні k зі зростанням значення параметра ζ також зростають $\lambda_{\max}(\zeta)$ та норма $\|u\|$. Крім того, $\|u\|$ зростає також зі зростанням λ при фіксованих значеннях k і ζ . Ці дані можуть бути використані для визначення стійких режимів роботи MEMС. Також слід відзначити, що вибір нерівномірно та несиметрично розподіленого зовнішнього тиску призводить до порушення радіальної симетрії розв'язку задачі.

5. Висновки

У роботі було вперше розглянуто узагальнену математичну модель електростатичних мікроелектромеханічних систем під дією зовнішнього тиску для випадку, коли $P(\mathbf{x}) \neq \text{const}$. Також вперше до неї застосовано метод двобічних наближень на основі використання функції Гріна, що дозволило отримати як умови існування єдиного додатного розв'язку задачі, так і наближення до нього з двосторонньою оцінкою похибки. Обчислювальний експеримент, проведений для тестових значень параметрів, показав ефективність запропонованого методу та можливість його використання для дослідження параметрів та режимів роботи реальних MEMС. Цим визначається наукова новизна та практична значущість отриманих результатів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Pelesko J. A., Bernstein D. H. Modeling MEMS and NEMS. Cleveland: CRC Press, 2002. 351 p.
2. Nayfeh A. H., Younis M. I., Abdel-Rahman E. M. Reduced-order models for MEMS applications. *Nonlinear dynamics*. 2005. Vol. 41, № 1. P. 211–236.

3. Sidorov M. V. Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems. *Carpathian Mathematical Publications*. 2018. Vol. 10, № 2. P. 360–375.
4. Pelesko J. A. Mathematical modeling of electrostatic MEMS with tailored dielectric properties. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2002. Vol. 62, № 3. P. 888–908.
5. Guo Y., Pan Z., Ward M. J. Touchdown and pull-in voltage behavior of a MEMS device with varying dielectric properties. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2005. Vol. 66, № 1. P. 309–338.
6. Esposito P., Ghoussoub N., Guo Y. *Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS*. Providence: American Mathematical Society, 2010. 262 p.
7. Lin F., Yang Y. Nonlinear non-local elliptic equation modeling electrostatic actuation. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2007. Vol. 463, № 2081. P. 1323–1337.
8. Beckham J. R., Pelesko J. A. An electrostatic-elastic membrane system with an external pressure. *Mathematical and computer modelling*. 2011. Vol. 54, №11–12. P. 2686–2708.
9. Guo Y., Zhang Y., Zhou F. Singular behavior of an electrostatic-elastic membrane system with an external pressure. *Nonlinear Analysis*. 2020. Vol. 190. P. 111611.
10. Кончаковська О. С., Сидоров М. В. Метод двобічних наближень у чисельному аналізі однієї мікроелектромеханічної системи. *Вісник ХНУ ім. В.Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. 2018. Вип. 39. С. 33–41.
11. Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. *Нелинейные операторы в пространствах с конусом*. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. 246 с.
12. Красносельский М. А. *Положительные решения операторных уравнений*. М.: Физматгиз, 1962. 394 с.

REFERENCES

1. J. A. Pelesko, D. H. Bernstein *Modeling MEMS and NEMS*, Cleveland: CRC Press, 2002. 351 p.
2. A. H. Nayfeh, M. I. Younis “Reduced-order models for MEMS applications”, *Nonlinear dynamics*, vol. 41, no. 1, pp. 211-236, 2005.
3. M. V. Sidorov “Green-Rvachev's quasi-function method for constructing two-sided approximations to positive solution of nonlinear boundary value problems”, *Carpathian Mathematical Publications*, vol. 10, no. 2, pp. 360-375, 2018.
4. J. A. Pelesko “Mathematical modeling of electrostatic MEMS with tailored dielectric properties”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 62, no. 3, pp. 888-908, 2002.
5. Y. Guo, Z. Pan and M. J. Ward “Touchdown and pull-in voltage behavior of a MEMS device with varying dielectric properties”, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, vol. 66, no. 1, pp. 309-338, 2005.
6. P. Esposito, N. Ghoussoub and Y. Guo *Mathematical analysis of partial differential equations modeling electrostatic MEMS*, Providence: American Mathematical Society, 2010. 262 p.
7. F. Lin and Y. Yang “Nonlinear non-local elliptic equation modeling electrostatic actuation”, *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 463, no. 2081, pp. 1323-1337, 2007.
8. J. R. Beckham, J. A. Pelesko “An electrostatic-elastic membrane system with an external pressure”, *Mathematical and computer modelling*, vol. 54, no. 11-12, pp. 2686-2708, 2011.
9. Y. Guo, Y. Zhang and F. Zhou “Singular behavior of an electrostatic-elastic membrane system with an external pressure”, *Nonlinear Analysis*, vol. 190, pp. 111611, 2020.
10. O. S. Konchakovska, M. V. Sidorov “The two-sided method in numerical analysis of one microelectromechanical system”, *Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University. Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems*, vol. 39, pp. 33-41, 2018 [in Ukrainian].
11. V. I. Opojtsjev, T. A. Khurodze *Nonlinear Operators in Spaces with a Cone*, Tbilisi, USSR: Izdatel'stvo Tbilisskogo Universiteta, 1984. 246 p. [in Russian].
12. M. A. Krasnosel'skij *Positive Solutions of Operator Equations*. Moscow: Fizmatgiz, 1962. 394 p. [in Russian].

Konchakovska Oksana

*postgraduate student of the Department of Applied Mathematics;
Kharkiv National University of Radio Electronics, Nauky Avenue 14,
Kharkiv, Ukraine, 61166*

e-mail: oksana.konchakovska@nure.ua

<https://orcid.org/0000-0002-0836-6045>

Sidorov Maxim

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Head of
the Department of Applied Mathematics;
Kharkiv National University of Radio Electronics, Nauky Avenue 14,
Kharkiv, Ukraine, 61166*

e-mail: maxim.sidorov@nure.ua;

<https://orcid.org/0000-0001-8022-866X>

Two-sided iterative method based on the use of the Green's function in problems of numerical analysis of some electromechanical systems

Relevance. The paper considers the problem of numerical analysis of a nonlinear boundary value problem that models an electrostatic microelectromechanical system under the action of external pressure. Microelectromechanical systems combine mechanical and electrical components of micron size and are used in automotive, aviation, and medicine. Electrostatic activation of these systems is crucial to micromirrors, microresonators, accelerometers, etc. The main limitation of electrostatic microelectromechanical systems is the pull-in instability, leading to system destabilization. It is proposed to investigate the model's parameters and obtain their estimates to eliminate these limitations.

Goal. Using the methods of the theory of nonlinear operators in semi-ordered spaces, develop a method of two-sided approximations for solving the given problem.

Research methods. A nonlinear elliptic equation with the Laplace operator and a homogeneous boundary condition of the first kind represents the mathematical model of the electrostatic microelectromechanical system. Using the method of Green's functions, this differential problem is transferred to the equivalent integral equation of Hammerstein, which is analyzed by methods of the theory of nonlinear operators in semi-ordered spaces.

The results. The nonlinear operator's properties included in the Hammerstein equation were studied, and the conditions for the existence of a unique positive solution to the considered problem and the conditions for the convergence of two-sided approximations were obtained. For the proposed method of two-sided approximations, a posteriori estimation of the error and estimation of the number of iterations necessary to achieve the specified accuracy were also obtained.

Conclusions. Computational experiments demonstrate the operation and efficiency of the developed method for a test problem in a circular area with different values of model parameters. The results of computational experiments are presented as numerical and graphical information.

Keywords: *method of two-sided approximations, method of Green's functions, methods of nonlinear analysis, conic segment, electromechanical system, effect of external pressure, monotonic operator.*