

УДК 001.891.572+004.942

Дослідження динаміки чотирьох хвиль covid-19 в країнах Європи

К.І. Волошина, Н.М. Кізілова, П.В. Кіпоренко

**Волошина
Катерина Ігорівна**

*студентка, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: Kate0410999@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-4218-8705>*

**Кізілова
Наталія Миколаївна**

*д.ф.-м.н., професор; професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: n.kizilova@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-9981-7616>*

**Кіпоренко
Поліна Валеріївна**

*студентка, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: kipolly1006@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-4351-2957>*

Розглядаються особливості динаміки послідовних хвиль пандемії covid-19 в Україні та інших країнах Європи методами дослідження часових рядів. Для отриманих з відкритих джерел кривих щоденних нових випадків захворілих $I(t)$, померлих $D(t)$ і одужалих $R(t)$ були виділені осереднені і осцилюючі складові. Аналіз спектру показав наявність у всіх країн головної гармоніки з періодом $T=7$ діб, яка пов'язана з особливостями тижневої роботи медичних і статистичних закладів. В ряді країн виявлені ознаки хаотичної динаміки у вигляді значних амплітуд сусідніх гармонік та значних неочікуваних змін фазових зсувів між ними. Отримані статистично достовірні експоненціальні наближення кривих $I(t)$, $D(t)$ на стадіях швидкого і повільного зростання і швидкого і повільного зменшення числа випадків для кожної з чотирьох хвиль covid-19 в країнах Європи. Ці наближення були використані для валідації математичної моделі SEIRS розповсюдження епідемії в даній країні. Отримані специфічні для країни моделі у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь можуть бути використані для більш детального дослідження динаміки кожної з хвиль та прогнозування подальшої динаміки covid-19 в країні.

Ключові слова: математична епідеміологія, covid-19, аналіз «великих даних», гармонійний аналіз, стохастична динаміка

Investigation of the dynamics of four waves covid-19 in European countries

Voloshyna Kateryna

*student
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022,
Ukraine*

Kizilova Nataliya

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Professor of the
Department of Applied Mathematics
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022,
Ukraine*

Kiporenko Polina

*student
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022,
Ukraine*

The peculiarities of the dynamics of successive waves of the covid-19 pandemic in Ukraine and other European countries have been considered by the methods of time series analyses. Both the oscillatory harmonic and growing non-harmonic dynamics have been detected. The curves of daily new cases of infected $I(t)$, deceased $D(t)$ and recovered $R(t)$ individuals have been obtained from open sources and the mean and oscillating components have been identified. For the most countries the mean components of the curves $I(t)$ and $D(t)$ exhibit a small shift in 1-3 weeks that corresponds to the incubation period of the disease. The analysis of the spectrum of the oscillating components has showed that all countries have a fundamental harmonic with a period of $T = 7$ days, associated with the specifics of the working week of medical and statistical institutions. The rest of the harmonics in most countries turns out to have been close to zero, which corresponds to random errors in the collection of statistical data for the country's institutions. In a number of countries, signs of chaotic dynamics in the form of large amplitudes of neighboring harmonics and significant unexpected changes in the phase shifts between them have been revealed. Statistically reliable exponential approximations of the $I(t)$ and $D(t)$ curves at the stages of the fast and slow growth as well as fast and slow decrease in the number of cases for each of the four covid-19 waves in European countries have been obtained. The obtained approximations have been used for validation of the SEIRS mathematical model of the epidemic spread for a given country. The

resulting country-specific models in the form of the systems of ordinary differential equations can be used for studying the dynamics of each wave in detail, and for predicting the further dynamics of covid-19 in the country.

Keywords: *mathematical epidemiology, covid-19, Big Data analysis, harmonic analysis, stochastic dynamics.*

1 Вступ

Пандемія covid-19 стала одним із важливіших викликів сучасності, який продовжує низку спалахів бактеріальних і вірусних інфекцій, які переслідують людство протягом всієї історії розвитку [1]. Нинішня пандемія почалася в Китаї в грудні 2019 р. і на наступний час охопила 223 країни і регіони. В більшості країн триває або розпочинається четверта хвиля, яка найчастіше пов'язана з модифікацією «дельта» початкового штаму, а також і з новим різновидом «омікрон». Налічується майже 248.5 млн. захворілих, більше 5 млн. померлих і більше 225 млн. одужалих, які можуть отримати повторне зараження новими штамми. Моніторинг і аналіз динаміки кожної з хвиль пандемії дозволяє проаналізувати особливості розповсюдження хвороби на території кожної країни або на таких замкнутих локаціях, як острови. Протягом 2020-2021 рр. були опубліковані результати аналізу даних пандемії в Індонезії [2], Японії і Південній Кореї [3], Китаю [4], США [5], Канаді [6], країнах Європи [7] та ряду інших. Досліджений вплив загального індексу розвинення країни, ступеню фінансування медицини, здоров'я населення та рідусоціально-економічних факторів на динаміку кривих захворюваності в різних країнах [8].

Закономірності, які знайдені шляхом обробки інформації у вигляді часових рядів, використовуються для подальшої розробки більш точних математичних моделей динаміки епідемій, які враховують особливості даного захворювання, а також для прогнозування, стабілізації і контролювання динаміки [6]. В даній роботі проведений аналіз кривих динаміки covid-19 для України і ряду сусідніх країн Європи для виявлення спільної динаміки або різних типів динамічної поведінки, а також прогнозування подальшої динаміки на математичній моделі SEIRS з використанням даних статистичного аналізу.

2 Статистичний аналіз часових рядів

В роботі вивчаються дані щоденних вимірювань кількості нових випадків захворювань $I(t)$, у яких наявність covid-19 підтверджена тестуванням; кількості смертних випадків від ускладнень covid-19 $D(t)$, кількості одужалих $R(t)$, протестованих $T(t)$, вакцинованих $V(t)$, у порівнянні із загальною кількістю населення $S(t)$, країни, яке може захворіти на covid-19. Офіційна статистика пандемії по країнам Європи в цілому починається з 22 січня 2020 р., хоча початок постійної щоденної реєстрації в різних країнах відрізняється. Так, в Україні це 3 березня 2020 р. Для цілей порівняльного аналізу обиралися дані, нормалізовані на чисельність населення станом на 2019 р., до початку пандемії. Всі дані наявні у відкритих джерелах¹.

На Рис. 1а,б наведені для порівняння згладжені нормалізовані криві $I(t)$ (Рис. 1а) і $D(t)$ (Рис. 1б) для України і деяких країн Європи. Видно, що динаміка поширення епідемії в деяких країнах суттєво відрізняється. Максимуми другої і третьої «хвиль» практично збігаються у Франції, Італії, Польщі, Великобританії і трохи запізнюються – у Німеччині і Україні. Амплітуди хвиль значно вищі у Франції, Італії, Польщі, Великобританії і значно нижчі – в інших країнах. Загальна динаміка по країнам Європи відображує сумарний вклад всіх країн і тому має складнішу багато хвильову динаміку. Максимуми кривих $D(t)$ часто майже збігаються, наприклад для першої хвилі (максимуми припадали на 31.03 – 16.05.2020 р.), другої (18.11.2020 – 23.01.2021 р.) і третьої (8.04 – 28.04.2021 р.) хвиль. Порівняння кривих $I(t)$ і $D(t)$ для кожної з країн показує, що максимуми кривих під час деяких хвиль зсунуті на 1-3 тижні, що відповідає часу розвинення різних штамів covid-19 (інкубаційний період розвинення інфекційної хвороби) та деяким іншим факторам [8].

¹ <https://www.worldometers.info/coronavirus/>
<https://ourworldindata.org/coronavirus>
<https://covid19.who.int/>

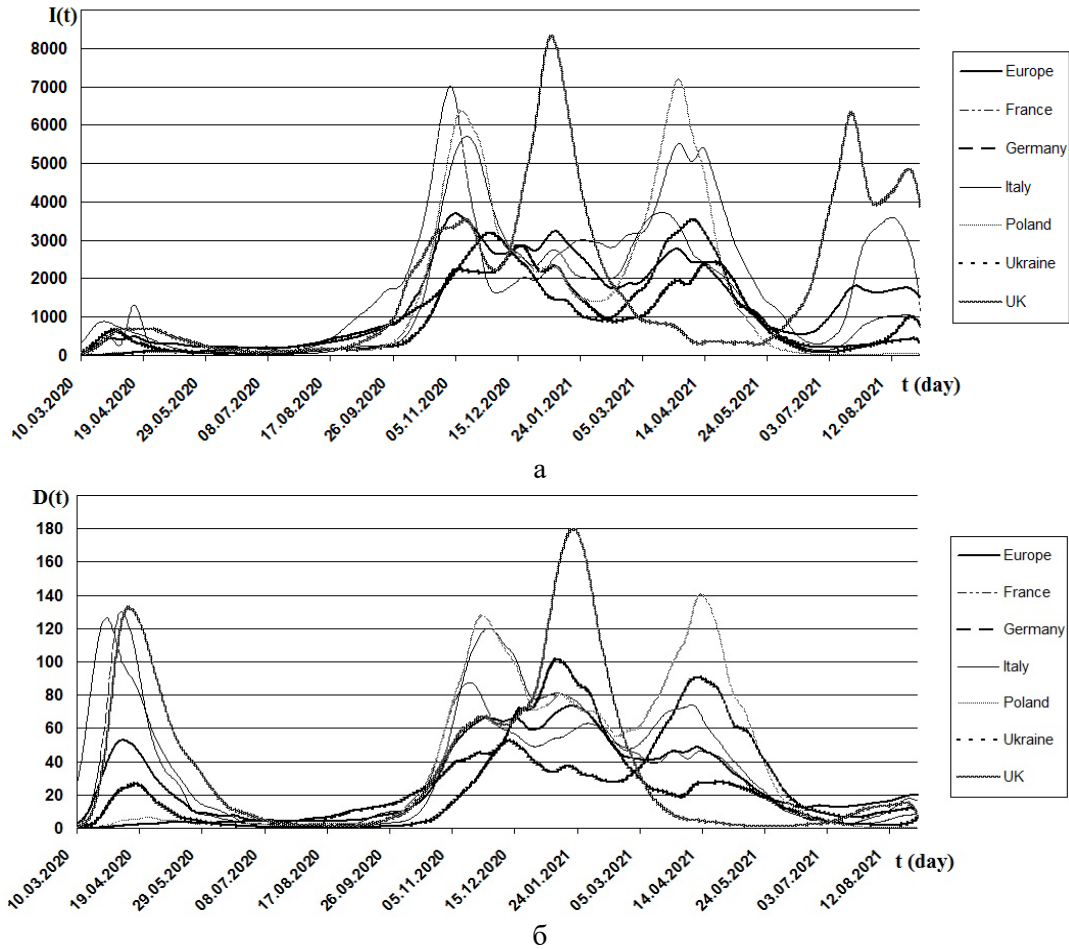


Рис.1 Різні типи динаміки кривих $I(t)$ (а) і $D(t)$ (б) в країнах Європи.

Порівняння початкових даних (щоденні дані) і відповідних кривих, згладжених методом ковзаючого середнього з вікном у 7 днів (загальноприйнятий підхід у відкритих джерелах даних¹) дозволяє обчислити відповідні осциляції

$$I_{osc}(t) = I(t) - \langle I(t) \rangle, \quad D_{osc}(t) = D(t) - \langle D(t) \rangle.$$

Приклад результатів обчислення наведений на Рис.2 для випадку України. Найбільш значні друга і третя хвилі мають чіткі максимуми, а швидкості зростання та зменшення числа нових випадків близькі (Рис.2а). Коливання чисельності нових випадків значно вище в третю хвилю, ніж у другу (Рис.2б), що може бути пов'язано як з недосконалістю або перевантаженістю системи контролю, так і з іншими чинниками.

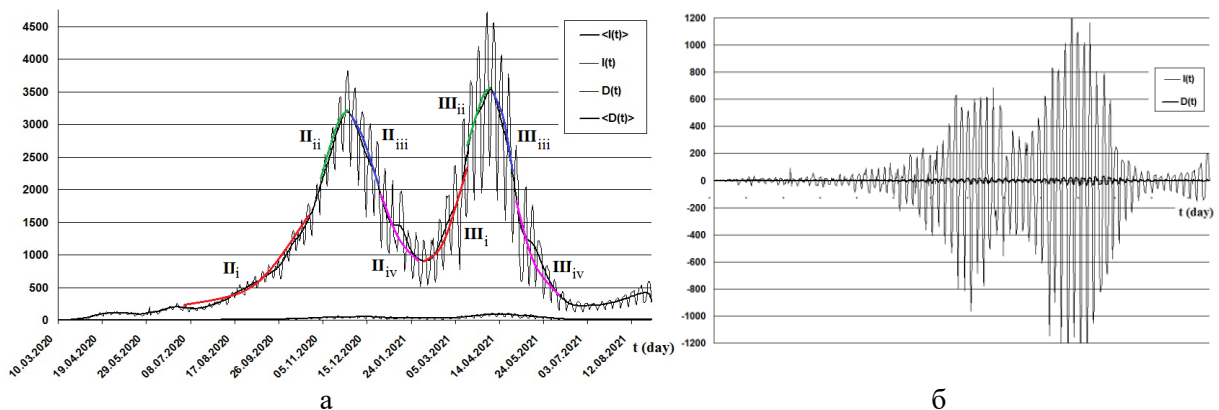


Рис.2 Вихідні і осереднені криві для нових випадків ($I(t)$, $\langle I(t) \rangle$) і для померлих ($D(t)$, $\langle D(t) \rangle$) (а) і відповідні хвильові компоненти (б); позначення i, ii, iii, iv відповідають різним стадіям хвилі.

Був проведений спектральний аналіз кривих $I_{osc}(t), D_{osc}(t)$ для України та сусідніх країн Європи. Коефіцієнти розкладення кривих в ряди Фур'є обчислювалися за формулами Ейлера для періодів коливань $T=2-21$ доби. Сезонні коливання з періодами >1 місяця не досліджувалися в силу недостатньо довгого періоду загальних спостережень. Результати розрахунків коефіцієнтів A_j, B_j розкладень по функціям $\cos(\omega_j t), \sin(\omega_j t)$ згладжених часових рядів $I_{osc}(t), D_{osc}(t)$ показали значно вищі амплітуди коливань для 2-4 хвиль і малі амплітуди, які знаходяться на межі погрішностей вимірювань, - для довгоперіодичних коливань з $T>10-14$ діб (Рис.3а).

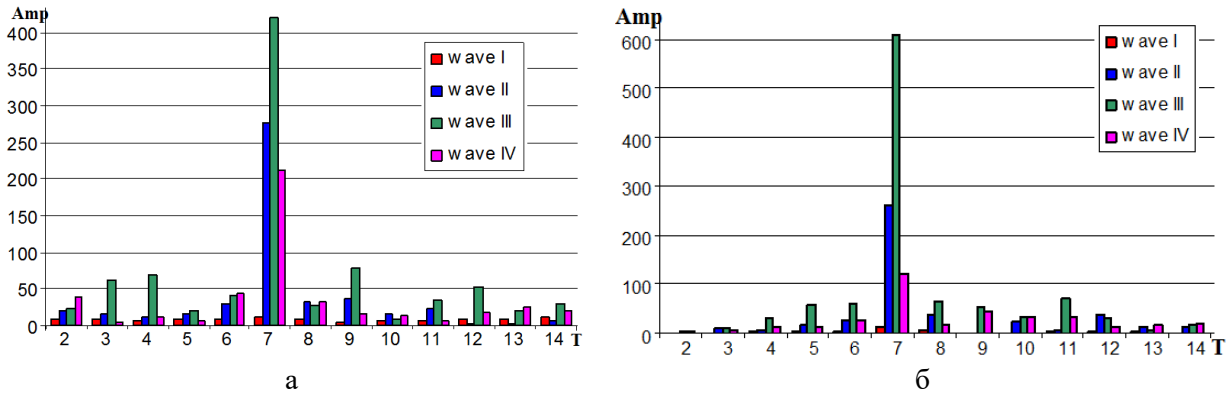
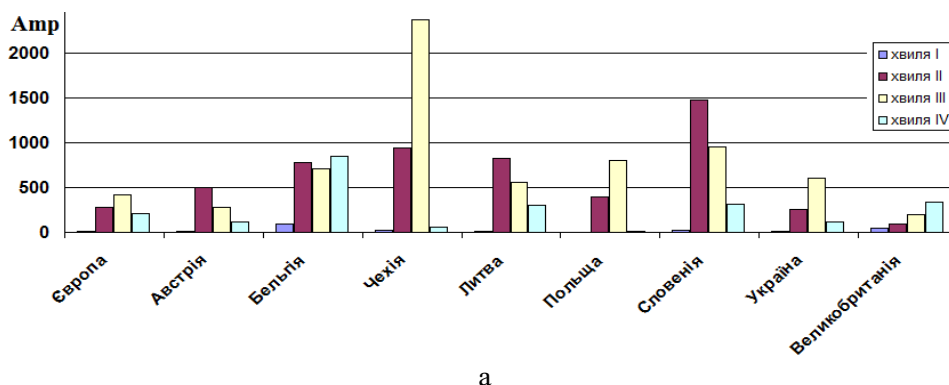


Рис.3 Спектр коливань кривих $I_{osc}(t)$ для Європи (а) і України (б).

Амплітуди коливань з періодом $T=7$ діб відрізняються не тільки в різних країнах Європи, але й протягом різних хвиль (I-IV хвилі) в одній країні (Рис.4), що вказує на різні рівні підготовленості і напруженості систем медичної допомоги і контролю в країнах. Слід відмітити, що значність 7-денної компоненти в коливаннях числа нових випадків хвороби схожа в більшості країн Європи та в Європі в цілому (Рис.4а), але в статистиці смертельних випадків може відрізнитися в деяких країнах як в бік збільшення, так і зменшення (Рис.4б). Ця компонента не має математичного обґрунтування і тому значно ускладнює аналіз статистичних даних з метою виявлення закономірностей і формулювання математичної моделі.

Для цілей аналізу даних, пов'язаних саме з розповсюдженням вірусу, а не з особливостями статистичної служби в різних країнах, ця компонента з відповідною амплітудою була видалена з нормалізованих осереднених рядів даних $I_{osc}(t), D_{osc}(t), T_{osc}(t), V_{osc}(t), R_{osc}(t)$. Спектральний аналіз амплітуд $Amp_j = \sqrt{A_j^2 + B_j^2}$ і фазових зсувів $\varphi_j = \arctg(B_j / A_j)$ отриманих осциляцій показав, що в більшості країн амплітуди і зсуви фаз інших компонентів $T_j = 2 - 6, 7, 8 - 21$ незначні, але в деяких країнах спостерігаються хаотичні стрибки обох параметрів від гармоніки до гармоніки, що відповідає можливості хаотичної динаміки. На Рис.5 наведений приклад такої динамічної поведінки для Словенії. Амплітуда окремих гармонік змінюється в різних хвилях (Рис.5а), а зсуви фаз немонотонно зростають з номером гармоніки для майже всіх значень $j=2-21$ (Рис.5б). Така динамічна поведінка може вказувати як на специфіку розповсюдженні вірусу, так і на недостатність соціально-економічних заходів протидії пандемії.



а

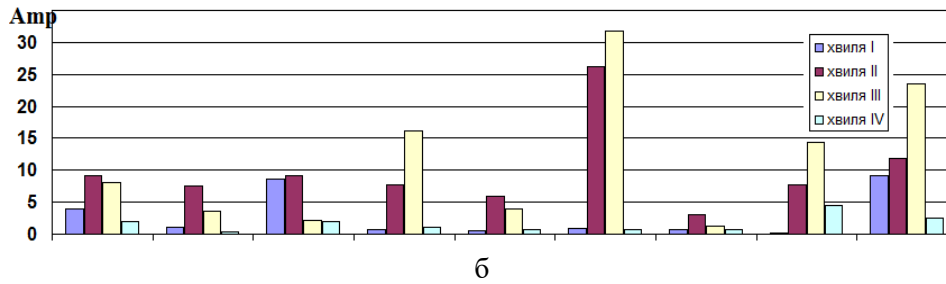


Рис.4 Амплітуди спектрів кривих $I_{osc}(t)$ (а) і $D_{osc}(t)$ (б) з періодом $T=7$ діб.

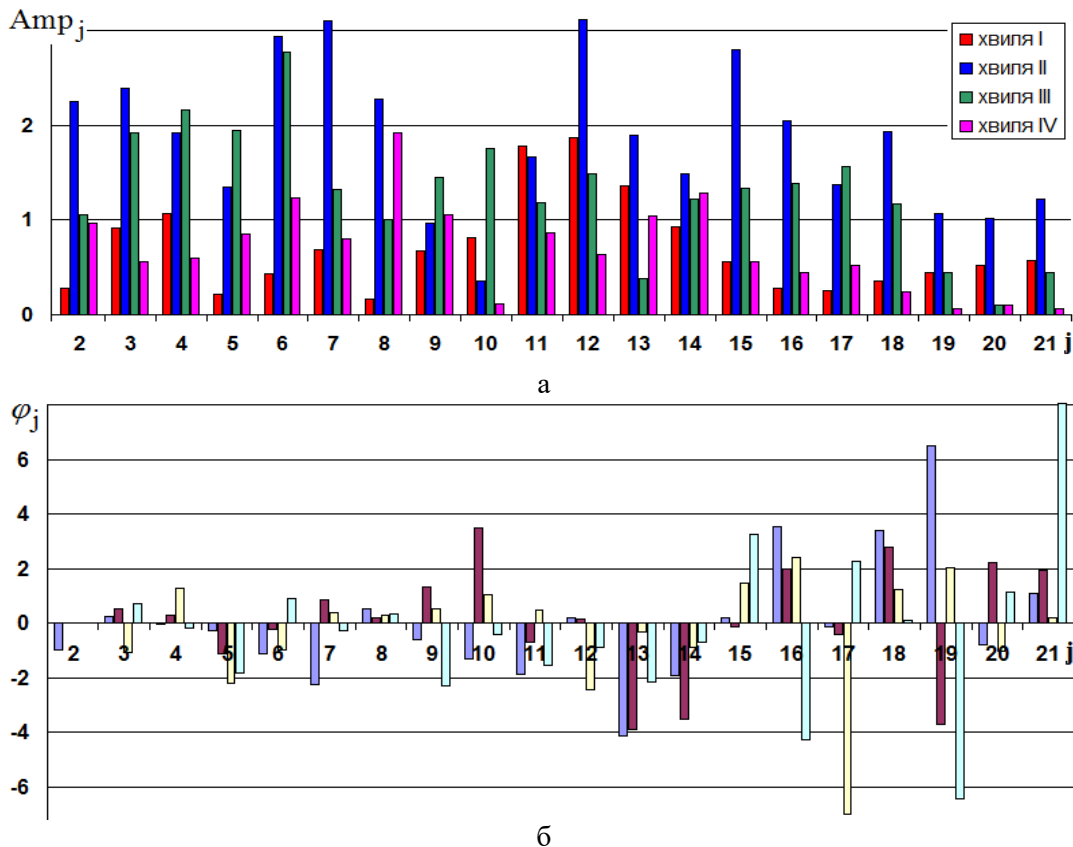


Рис.5 Амплітуди (а) і зсуви фаз (б) спектру кривих $D_{osc}(t)$ для Словенії.

Для кожної з хвиль I-III кожної з досліджених країн Європи були отримані статистичні апроксимації ділянок експоненціального зростання і спадання осереднених кривих $I(t)$ і $D(t)$, а саме стадій швидкого (i) і повільного (ii) зростання, швидкого (iii) і повільного (iv) зменшення числа випадків в кожній із хвиль (Рис.2а) у вигляді залежностей $I_k(t) = a_{1k} \exp(b_{1k}t)$, $D_k(t) = a_{2k} \exp(b_{2k}t)$, де $k = \{i, ii, iii, iv\}$, $a_{1k}, b_{1k}, a_{2k}, b_{2k} = \text{const}$. Отримані залежності будуть використані для валідації математичної моделі пандемії у кожній країні.

3 Математичні моделі динаміки популяцій

Ще в 1760-1766 рр. відомий математик і механік Д. Бернуллі вивчав можливість збільшення тривалості життя шляхом ліквідації віспи, яка на той час була однією з головних причин смерті [9]. Пізніше, в 1798 р. Т. Мальтус розробив математичну модель експоненціального зростання чисельності населення без обмежень ресурсів. В 1838 р П.-Ф. Ферхюльст запропонував логістичну криву, яка відповідала самообмеженого зростання колонії бактерій, коли швидкість розмноження пропорційна як чисельності популяції, так і кількості доступних ресурсів (тепла, світла, кисню, живильних речовин тощо).

В 1870-х рр. Р. Кох і Л. Пастер підтвердили, що інфекційні захворювання викликаються мікроорганізмами. Такі захворювання вивчали шляхом аналізу кривих захворілих та померлих.

На початку 1900-х рр. Дж. Сноу висунув гіпотезу, що епідемії закінчуються, коли доступність сприйнятливих осіб зменшується. В 1906 р. В. Хамер визначив дворічний період для міських спалахів захворювань на кір, і пояснив цю динаміку гіпотезою Сноу. В 1911 р. епідеміолог А. МакКендрік заново відкрив логістичну модель Ферхюльста для зростання бактерій і експериментально оцінив нелінійний параметр цієї моделі. З цього часу розпочався бурхливий розвиток математичної теорії епідемій. В 1916 р. Р. Росс вперше застосував теорію ймовірності до опису динаміки передачі інфекції. В 1925 р. А. Лотка заново відкрив логістичне рівняння і назвав його законом зростання населення, а в 1926 р. В. Вольтерра запропонував двокомпонентну модель динаміки популяцій вигляду «хижак-жертва». В 1927 р. Кермак і МакКендрік запропонували аналогічну трикомпонентну модель для динаміки поширення інфекційного захворювання у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) [10]

$$\frac{dx}{dt} = -axy, \quad \frac{dy}{dt} = axy - by, \quad \frac{dz}{dt} = by, \quad (1)$$

з початковими умовами

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0, \quad (2)$$

де x – кількість здорових, y – хворих, z – вибули з класу y , тобто одужали або померли, причому $x + y + z = N$, де N - чисельність популяції (населення).

У цій моделі було вперше застосовано статистичну фізику та «закон діючих мас» для опису передачі інфекції в результаті соціального контакту між інфікованими (I) та сприйнятливими (S) людьми. МакКендрік висунув гіпотезу, що популяція поводить себе як сукупність «частинок» різних типів, які випадковим чином рухаються в навколишньому середовищі, де кожне «зіткнення» між частинками з груп S і I має однакову ймовірність того, що частинка S-типу перетвориться на частинку I-типу. Був отриманий розв'язок (1), (2) і порівняний з кривими епідемії грипу «іспанка» в різних країнах Європи. Буди визначені набори значень параметрів (a,b) моделі, які із задовільною точністю описували як зростання числа хворих і померлих, так і спад епідемії. Пізніше ця модель була названа SIR-model (Susceptible – Infected – Recovered), а число померлих обчислювалося як $D = N - S - I - R$.

Особливості динаміки covid-19 пов'язані з тим, що в результаті «зіткнень» з інфікованою людиною деякі з індивідів з групи S можуть бути носіями інфекції, які не мають жодної прояви захворювання, або перенести її в легкій формі. Крім того, індивіди, які перенесли ковід, можуть через деякий, навіть достатньо короткий час, бути інфікованими і захворіти повторно, тобто частина осіб з класу R знов попадає до класу S [11]. Для опису такої динаміки введена модифікація SEIR-model, яка включає додаткову групу експонованих осіб $E(t)$ (exposed). Система рівнянь моделі SEIR і початкові умови для неї мають вигляд [8,11]

$$\frac{dS}{dt} = \lambda - \beta SI + \delta R - \alpha S, \quad \frac{dE}{dt} = \beta SI - (\alpha + \psi) E, \quad (3)$$

$$\frac{dI}{dt} = \psi E - \gamma I - \phi I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I - (\alpha + \delta) R, \quad (4)$$

$$S(0) = S_0, \quad E(0) = E_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0,$$

де λ і α - природні народжуваність та смертність, які беруться для кожної області/регіону/країни з демографічних таблиць 2019 р., β , ψ і γ - коефіцієнти експозиції, захворюваності і одужання, ϕ - смертність від ковіду, δ - доля перехворілих, які можуть бути інфіковані повторно; усі значення обчислюються на 1 млн. населення країни.

Для чисельності померлих $D = N - S - E - I - R$ з (3) маємо

$$\frac{dD}{dt} = \alpha(S + E + R) + \phi I, \quad (5)$$

де другий доданок в правій частині відповідає смертності від ковіду, а перший – від інших причин.

Сума рівнянь (3), (5) дає для чисельності населення рівняння лінійного зростання $\frac{dN}{dt} = \lambda$.

Система (3) має дві стаціонарні точки

$$1) S^0 = \frac{\lambda}{\alpha}, \quad E^0 = I^0 = R^0 = 0,$$

(6)

$$2) \quad \begin{aligned} I^0 &= \frac{((\alpha + \psi)(\gamma + \alpha + \phi)\alpha - \lambda\psi\beta)(\alpha + \delta)}{\beta(\delta\gamma\psi - (\alpha + \delta)(\alpha + \psi)(\gamma + \alpha + \phi))}, & E^0 &= \frac{(\gamma + \alpha + \phi)I^0}{\psi}, & R^0 &= \frac{\gamma I^0}{(\alpha + \delta)}, \\ S^0 &= \frac{\lambda}{\alpha} + \left(\frac{\delta\gamma}{\alpha(\alpha + \delta)} - \frac{(\alpha + \psi)(\gamma + \alpha + \phi)}{\alpha\psi} \right) I^0, \end{aligned} \quad (7)$$

з яких перша відповідає випадку відсутності епідемії, а друга - постійному числу хворих і одужалих.

Стійкість і динамічну поведінку системи ЗДУ (3) навколо стаціонарної точки можна дослідити якщо знайти розв'язок (3) у вигляді

$$\begin{aligned} S(t) &= S^0 + S^t(t), & S^t(t) &= A_S \cos(\omega t) + B_S \sin(\omega t), \\ E(t) &= E^0 + E^t(t), & E^t(t) &= A_E \cos(\omega t) + B_E \sin(\omega t), \\ I(t) &= I^0 + I^t(t), & I^t(t) &= A_I \cos(\omega t) + B_I \sin(\omega t), \\ R(t) &= R^0 + R^t(t), & R^t(t) &= A_R \cos(\omega t) + B_R \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (8)$$

де осцилюючі компоненти S^t, E^t, I^t, R^t можна знайти з лінеаризованої навколо стаціонарної точки системи (3) у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dS^t}{dt} &= -\beta(S^0 I^t + S^t I^0) + \delta R^t - \alpha S^t, & \frac{dI^t}{dt} &= \psi E^t - \gamma I^t - \phi I^t, \\ \frac{dE^t}{dt} &= \beta(S^0 I^t + S^t I^0) - (\alpha + \psi) E^t, & \frac{dR^t}{dt} &= \gamma I^t - (\alpha + \delta) R^t. \end{aligned} \quad (9)$$

Підстановка (8) в (9) дає систему 8 алгебраїчних рівнянь, з яких легко отримати вирази для $A_S, B_S, A_E, B_E, A_R, B_R$ як функцій A_I, B_I , а також вираз $B_I(A_I)$, звідки з початковими умовами (4) можна визначити всі коефіцієнти A_j, B_j .

Умова сумісності однорідної системи алгебраїчних рівнянь для випадку стаціонарної точки 2) має вигляд алгебраїчного рівняння 4-го порядку для ω^2

$$\omega^8 + A_1 \omega^6 + A_2 \omega^4 + A_3 \omega^2 + A_4 = 0, \quad (10)$$

де остаточні вирази для $A_1 - A_4$ не наводяться в силу їх громіздкості.

Для стаціонарної точки 1) умова сумісності – це рівняння 3-го порядку для ω^2 . Розв'язки цих рівнянь, а тому і тип динамічної поведінки системи (3), залежать від параметрів моделі. Таким чином, для (3), (4) можна обчислити коефіцієнти A_j, B_j коливань з різними періодами $T_j = 2\pi\omega_j$, частоти яких в загальному випадку задовольняють (10). Амплітуди відповідних коливань можна обчислити як $\text{Amp}_j = \left(A_j^2 + B_j^2 \right)^{1/2}$, а фазові зсуви – як $\varphi_j = \arctg(B_j / A_j)$, і дослідити амплітудний і фазовий спектри розв'язків моделі при різних значеннях частот, які задовольняють умові сумісності (10). Порівнюючи значення коефіцієнтів, які були розраховані для кожної країни з використанням статистичних методів (розділ 2) з обчисленими за допомогою математичної моделі, можна провести ідентифікацію параметрів моделі і її верифікацію. Для цього в роботі використовувався метод найменших квадратів. Сумарна «відстань» між статистичними F_{osc} і теоретичними F^t осцилюючими компонентами кривих $F = \{I(t), D(t), R(t)\}$ або інших є

$$\text{Dist}(F_{\text{osc}}(t), F^t(t)) = \left(m^{-1} \sum_{i=1}^{1+m} (F_{\text{osc}}(t_i) - F^t(t_i))^2 \right)^{1/2} \rightarrow \min, \quad (11)$$

де m - довжина вибірки із ряду статистичних даних, яка є функцією параметрів моделі, тобто $\text{Dist} = \text{Dist}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \phi, \lambda)$. Тоді з умови (11) для мінімальної відстані маємо

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \text{Dist} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \text{Dist} \gg 0, \quad (12)$$

де $\chi = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \psi, \phi, \lambda\}$, можна обчислити набір параметрів моделі.

Розрахунки за (12) проводилися для десяти випадкових сегментів з $m=100$ часових рядів, довжина яких складала $n > 600$, в залежності від початку безперервного запису даних в даній країні.

4 Чисельні розрахунки і обговорення результатів

Чисельні розрахунки за (11) з використанням експериментальних кривих $I^t(t), R^t(t), D^t(t)$ для України та різних країн Європи дозволили за допомогою методу найменших квадратів (11),(12) знайти наступні значення параметрів відповідних індивідуальних моделей SEIRS для досліджених країн (Таблиця 1). Обчислені значення відповідають аналогічним значенням, які були раніше отримані для Індонезії [2], Японії і Південній Кореї [3], Китаю [4], США [5], Канади [6] та деяких країн Європи [7]. Похибка розрахунків параметрів $\beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi$ моделі не перевищувала 1.76%. Чутливість моделей SIRS і SEIRS до параметрів вивчалася раніше і був показаний значний розкид параметрів для країн Європи, Азії, Південної і Північної Америки, Австралії і Океанії [11]. Обчислені в Табл.1 значення узгоджуються з даними про фінансову підтримку медицини в досліджених країнах [8].

Таблиця 1. Результати ідентифікації параметрів моделі SEIRS.

	$\lambda (\cdot 10^{-3})$	$\alpha (\cdot 10^{-3})$	$\beta (\cdot 10^{-7})$	γ	$\varphi (\cdot 10^{-2})$	ψ	δ
Австрія	9.4	9.4	1.224	0.246	4.534	0.343	0.425
Франція	12.3	8.8	1.242	0.313	4.221	0.367	0.437
Норвегія	11.9	8.2	1.113	0.184	3.126	0.293	0.412
Іспанія	9.6	8.6	1.357	0.292	4.778	0.381	0.464
Україна	10.8	13.4	1.436	0.348	6.228	0.465	0.423
Німеччина	8.5	10.9	1.292	0.267	3.782	0.331	0.419
Італія	8.8	10.2	1.528	0.288	4.551	0.322	0.428
Великобританія	12.4	9.1	1.482	0.304	4.021	0.314	0.434
Польща	10	9.9	1.344	0.298	4.981	0.328	0.452
Бельгія	11.4	9.8	1.323	0.256	4.352	0.356	0.417
Чехія	10.4	10.3	1.427	0.321	4.781	0.367	0.422
Литва	10.4	13.5	1.455	0.309	5.025	0.376	0.432
Словенія	10.5	9.2	1.496	0.297	5.104	0.379	0.439

Після ідентифікації параметрів система ЗДР (3) може використовуватися для прогнозування динаміки кривих $I(t), R(t), D(t)$ в досліджених країнах (Табл.1) в найближчому часі, коли в більшості з країн Європи хвиля IV або закінчується, або знаходиться на максимумі (плато). Результати прогнозувань динаміки covid-19 для України при варіаціях параметрів моделі $\pm 10\%$ від обчислених в Табл.1 наведені на Рис.6. Такі варіації можуть з'явитися у зв'язку з непередбачуваними змінами метеорологічних, економічних, соціальних та інших факторів [11]. В результаті можуть спостерігатися зміни поведінки динамічної системи як в напрямку регулярної хвильової, так і хаотичної динаміки. Наведені результати дозволяють краще зрозуміти, які саме параметри моделі (3) потребують керування у вигляді змін параметрів $\beta, \gamma, \delta, \psi, \varphi$ за рахунок збільшення койко-місць, якості їх обладнання та медперсоналу у шпиталях, введення антиковідних обмежень, і т.д.

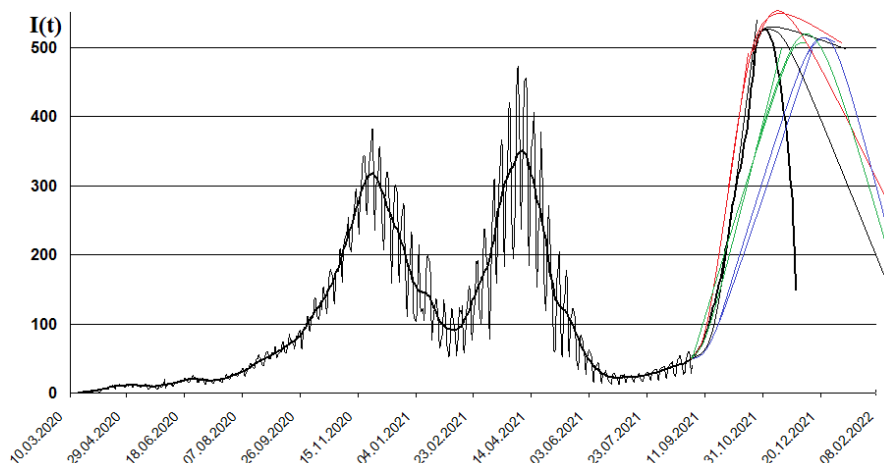


Рис.6 Результати прогнозу динаміки covid-19 в Україні при різних наборах параметрів моделі.

5 Висновки

Аналіз наявних даних по covid-19 дозволив провести ідентифікацію параметрів моделі SERIS для України та ряду сусідніх країн Європи. Спектральний аналіз даних динаміки числа нових захворювань виявив 7-денну періодичність, яка пов'язана як з меншою доступністю лабораторної діагностики covid-19 у вихідні дні, так і з психологією людей з першими симптомами хвороби. 7-денна періодичність, виявлена у всіх країнах, також відрізняється по амплітудному і фазовому спектрам. У більшості країн пік смертності відстає на 0.5-2.5 добу від піку захворюваності, але в деяких випадках (особливо хвиля I) спостерігалася і протилежна динаміка. Аналіз фазового спектру показує, що величина зсуву між піком захворюваності і смертності немонотонно збільшується зі зростанням періоду хвилі, причому в динамічних системах ряду країн може мати місце хаотична динаміка, яка повинна бути виявлена за допомогою вейвлет і фрактального аналізу часових рядів. Запропонована модель дозволяє прогнозувати динаміку кожної хвилі covid-19. Оцінка точності прогнозів буде проведена в наступних дослідженнях.

ЛІТЕРАТУРА

1. Baccar N. *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. Springer-Verlag, London. 2011. 160с.
2. Aldila D., Khoshnaw S.H.A., Safitri E., et al. A mathematical study on the spread of COVID-19 considering social distancing and rapid assessment: The case of Jakarta, Indonesia. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. Vol. 139, 110042. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110042>
3. Duan X., Zhang X. ARIMA modelling and forecasting of irregularly patterned COVID-19 outbreaks using Japanese and South Korean data. *Data in Brief*. 2020. Vol. 31, 105779. <https://doi.org/10.1016/j.dib.2020.105779>
4. Li Q., Guan X., Wu P., et al. Early transmission dynamics in Wuhan, China, of novel coronavirus-infected pneumonia. *New England Journal of Medicine*, 2020. Vol. 382, 1199-1207. <https://doi.org/10.1056/NEJMoa2001316>
5. Asadi-Zeydabadi M., Buscema M., Lodwick W., et al. Analysis of COVID-19 pandemic in USA, using Topological Weighted Centroid. *Computers in Biology and Medicine*. 2021. Vol. 136, 104670. <https://doi.org/10.1016/j.compbiomed.2021.104670>
6. Sun J. Forecasting COVID-19 pandemic in Alberta, Canada using modified ARIMA model. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2021. Vol. 22, 100029. <https://doi.org/10.1016/j.cmpbup.2021.100029>
7. James N., Menzies M. Trends in COVID-19 prevalence and mortality: A year in review. *Physica D*. 2021. Vol. 425, 132968. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.132968>
8. Захарова А.А., Кізілова Н.М. Дослідження кореляцій динаміки захворювання на COVID-19 з деякими соціально-економічними факторами. *Вісник Харківського національного університету серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2020. Вип. 47. С.49-56. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2020-48-04>
9. Костецька В.В., Кізілова Н.М. Математичне моделювання динаміки пандемії COVID-19. *Вісник Харківського національного університету серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2020. Вип. 48. С.65-71. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2020-48-06>
10. Kermack M., Mckendrick A. Contributions to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society London*. 1927. v.115(5). P.700–721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
11. Computational Modeling and Data Analysis in COVID-19 Research. Ed. by Ch.R.Panigrahi, B. Pati, M. Rath, R. Buyya. CRC Press. 2021.

REFERENCES

1. N. Bacaër, *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. Springer-Verlag, London. 2011. 160c.
2. D. Aldila, S.H.A. Khoshnaw, E. Safitri, et al. “A mathematical study on the spread of COVID-19 considering social distancing and rapid assessment: The case of Jakarta, Indonesia”, *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. Vol. 139, 110042. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110042>
3. X. Duan, X. Zhang., “ARIMA modelling and forecasting of irregularly patterned COVID-19 outbreaks using Japanese and South Korean data”, *Data in Brief*. 2020. Vol. 31, 105779. <https://doi.org/10.1016/j.dib.2020.105779>
4. Q. Li, X. Guan, P. Wu, et al. “Early transmission dynamics in Wuhan, China, of novel coronavirus–infected pneumonia”, *New England Journal of Medicine*, 2020. Vol. 382, 1199-1207. <https://doi.org/10.1056/NEJMoa2001316>
5. M. Asadi-Zeydabadi, M. Buscema, W. Lodwick, et al. “Analysis of COVID-19 pandemic in USA, using Topological Weighted Centroid”, *Computers in Biology and Medicine*. 2021. Vol. 136, 104670. <https://doi.org/10.1016/j.compbiomed.2021.104670>
6. J. Sun, “Forecasting COVID-19 pandemic in Alberta, Canada using modified ARIMA model”, *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2021. Vol. 22, 100029. <https://doi.org/10.1016/j.cmpbup.2021.100029>
7. N. James, M. Menzies, “Trends in COVID-19 prevalence and mortality: A year in review”, *Physica D*. 2021. Vol. 425, 132968. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.132968>
8. A. Zakharova, N. Kizilova, “Study on correlations of disease dynamics on COVID-19 with some socio-economic factors”, *Bulletin of Kharkiv National University, series "Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems"*, 2020, Vol. 47, P.49-56. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2020-48-04>
9. V. Kostetzka, N. Kizilova, “Mathematical modeling of the dynamics of the COVID-19 pandemic”, *Bulletin of Kharkiv National University, series "Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems"*, 2020, Vol. 48, P.65-71. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2020-48-06>
10. M. Kermack, A. McKendrick, “Contributions to the mathematical theory of epidemics”, *Proceedings of the Royal Society London*, 1927, v.115(5), P.700–721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
11. *Computational Modeling and Data Analysis in COVID-19 Research*. Ed. by Ch.R.Panigrahi, B. Pati, M. Rath, R. Buyya. CRC Press. 2021.