

УДК 593.3

Гідропружні коливання оболонок обертання при комбінованих вертикальних та горизонтальних навантаженнях

О.О. Усатова, Д.В. Крютченко

**Усатова Ольга
Олександрівна***аспірант**Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАНУ, вул.
Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна
e-mail: usatova.olia@gmail.com*<https://orcid.org/0000-0002-5813-0321>**Крютченко Денис
Володимирович***провідний інженер**Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАНУ, вул.
Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна
e-mail: wollydenis@gmail.com*<https://orcid.org/0000-0002-6804-6991>

Функціонування сучасних конструкцій відбувається в умовах дії підвищених технологічних навантажень. Оболонки обертання відносяться до найбільш застосованих елементів конструкцій. Умови експлуатації таких елементів передбачають вплив оточуючого середовища, тобто функціонування конструкцій відбувається в умовах взаємодії пружних оболонкових елементів з рідиною або газом. В роботі розглянуто коливання пружної оболонки обертання, частково заповненої рідиною, за умови дії зовнішніх навантажень в вертикальному та горизонтальному напрямках одночасно. Вважалось, що рідина є ідеальною та нестисливою, а її рух під дією прикладених навантажень є безвихровим. Це дало змогу ввести потенціал швидкостей для обчислення тиску рідини на поверхні оболонки та для визначення функції, що описує рівня підйому вільної поверхні. На першому етапі визначені частоти а форми вільних коливань оболонки з рідиною. Ці частоти зазвичай поділяють на два відокремлені спектри: частоти коливань вільної поверхні та частоти коливань пружних стінок. Для числової реалізації використано метод граничних елементів. В цьому дослідженні встановлено, що для досить тонких пружних стінок резервуара фундаментальна частота при зв'язаних коливаннях може бути набагато меншою, ніж частота рідини в оболонці з жорсткими стінками. Зі збільшенням товщини стінки резервуара цей ефект стає незначним, а нижча частота коливань оболонки з рідиною наближається до частоти коливань рідини в жорсткому резервуарі. Другий етап дослідження пов'язаний із аналізом комбінованих горизонтальних та вертикальних навантажень. Розглянуто випадки, коли частоти навантажень є близькими до фундаментальної частоти плескань та до нижчої частоти коливань пружних стінок. Досліджено ефект параметричного резонансу. З'ясовано вплив наявності перегородок на рух оболонки з рідиною при вільних та вимушених коливаннях.

Ключові слова: оболонки обертання, пружність, коливання, комбіновані навантаження, методи скінченних та граничних елементів, ідеальна нестислива рідина.

Hydroelastic vibrations of shells of revolution under combined vertical and horizontal loadings

Usatova Olga*PhD student**A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NASU, Pozharsky,
st. 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine***Kriutchenko Denis***leading engineer**A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NASU, Pozharsky,
st. 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine*

The operation of modern structures occurs under conditions of high technological loads. Shells of rotation are among the most applicable structural elements. The operating conditions of such elements provide for the influence of the environment such as the interaction of elastic shell elements with liquid or gas. The oscillations of the elastic shell of rotation, which are partially filled with liquid, under external loads in the vertical and horizontal directions simultaneously, are considered in the paper. The liquid is supposed to be ideal and incompressible, and its motion under the applied loads is irrotational. This allows us to introduce the velocity potential to calculate the pressure of the fluid on the surface of the shell and determine the function which describes the level of the free surface lift. At the first stage, the frequencies and forms of free oscillations of the shell with liquid are determined. These frequencies are usually divided into two separate spectra: the free surface vibration frequency and the elastic wall vibration frequency. The boundary element method is used for numerical implementation. It is found that for sufficiently thin elastic tank walls, the fundamental frequency of the coupled vibrations can be much lower than the frequency of the fluid in a shell with rigid walls. As the tank wall thickness increases, this effect becomes insignificant, and the lower vibration frequency of the shell with liquid approaches the vibration frequency of the liquid in a rigid tank. The

second stage of the study is related to the analysis of combined horizontal and vertical loads. The cases when the load frequencies are close to the fundamental frequency of sloshing and to the lower frequency of vibration of elastic walls are considered. The effect of parametric resonance has been investigated. The influence of the presence of partitions on the motion of the shell with the liquid at free and forced oscillations has been found out.

Keywords: shell rotation, elasticity, oscillations, combined loads, finite and boundary element methods, ideal incompressible fluid.

1 Вступ

Значна кількість елементів сучасного обладнання в енергетичній, хімічній промисловості, на транспорті, в авіаційній та космічній техніці працює в умовах підвищених технологічних навантажень, при високих температурах та рівнях тиску. При цьому зазвичай обладнання піддається дії зовнішніх навантажень різної природи. Важливими питаннями тут є гідро та аеро-пружні ефекти. Ці явища притаманні процесам коливань кришок гідротурбін [1], робочих коліс гідротурбін [2], лопатей повітряних установок [3]. Гідродинамічні ефекти спостерігаються й при дослідженні явищ підтоплення міських територій [4], Гідропоужні явища необхідно враховувати і при проектуванні та модернізації резервуарів та сховищ для вогнебезпечної та легкозаймистих речовин. Як моделі цих резервуарів зазвичай використовують оболонки обертання [5], [6] та складені оболонки обертання [7]. Вплив різного виду перегородок на частоти та амплітуди коливань резервуарів вивчався в роботах [5], [8], [9], [10]. Вимушені коливання резервуарів при частковому заповненні рідиною вивчались в [5], [11], [12]. Зазначимо, що вивчення вимушених коливань рідини в резервуарах в уточненому формулюванні залишається актуальним питанням, оскільки дає змогу визначити границі стійкості руху, що дозволяє забезпечити надійність та безпечність функціонування обладнання.

2 Формулювання задачі та основні співвідношення

Для оцінки ефектів пружності стінок оболонки при коливаннях конструкцій з рідиною розроблена математична модель, що базується на таких гіпотезах: рідина є нестисливою і нев'язкою, рух рідини є безвихровим, враховуються лише малі коливання пружних елементів [12]. Введемо потенціал цієї зв'язаної задачі як суму двох функцій

$$\tilde{\Phi}(t, x, y, z) = \Phi(t, x, y, z) + \Phi_e(t, x, y, z), \quad (2.1)$$

де потенціал $\Phi(t, x, y, z)$ визначає коливання вільної поверхні, а функція $\Phi_e(t, x, y, z)$ описує внесок пружних коливань стінки.

Для функції $\Phi_e(t, x, y, z)$ сформульовано таку крайову задачу [12]:

$$\nabla^2 \Phi_e = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_r} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_e} = \frac{\partial W}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} \right|_{S_0} = 0, \quad W = (\mathbf{U}, \mathbf{n}), \quad \iint_{S_0} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (2.2)$$

Тут змочена поверхня оболонки подана як $S_1 = S_r \cup S_e$, де S_r і S_e є жорсткою та пружною частинами поверхні оболонки відповідно, $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, y, z, t)$ - вектор пружного переміщення, і W є його нормальним компонентом.

Нехай $\mathbf{u}_{nk}(r, z)$, $k = 1, 2, \dots$ - власні форми коливань пружної порожньої оболонки, які відповідають хвильовому числу n . Для числового аналізу використовуємо метод редукованих скінченних елементів, описаний у [5]. Вектор-функція в циліндричних координатах $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\theta, r, z, t)$ може бути подана таким чином:

$$\mathbf{U} = \sum_{n=0}^N \cos n \theta \sum_{k=1}^{M_1} c_{nk}(t) \mathbf{u}_{nk}(r, z). \quad (2.3)$$

Зобразимо функцію $\Phi_e(t, x, y, z)$ у циліндричних координатах як ряд

$$\Phi_e = \sum_{n=0}^N \cos n \theta \sum_{k=1}^{M_1} \dot{c}_{nk}(t) \varphi_{nk}^e(r, z), \quad (2.4)$$

де базисні функції φ_{nk}^e визначаються з граничних задач

$$\nabla^2 \varphi_{nk}^e = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{nk}^e}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_r} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{nk}^e}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_e} = (\mathbf{u}_{nk}, \mathbf{n}), \quad \varphi_{nk}^e|_{S_0} = 0. \quad (2.5)$$

Для функції $\Phi(x, y, z, t)$ згідно з [13] маємо такий вираз,

$$\Phi = \sum_{n=0}^N \cos n\theta \sum_{k=1}^{M_1} \dot{d}_{nk}(t) \phi_{nk}(r, z)$$

Таким чином, для сумарного потенціалу $\tilde{\Phi}(t, \theta, r, z)$ маємо подання

$$\tilde{\Phi}(t, \theta, r, z) = \sum_{n=0}^N \cos n\theta \left[\sum_{k=1}^M \dot{d}_{nk}(t) \phi_{nk}(r, z) + \sum_{k=1}^{M_1} \dot{c}_{nk}(t) \phi_{nk}^e(r, z) \right]. \quad (2.6)$$

Аналогічно, для функції $\zeta(t, \theta, r)$ що описує положення та форму вільної поверхні, отримаємо

$$\zeta = \sum_{n=0}^N \cos n\theta \frac{1}{g} \left[\sum_{k=1}^M \chi_{nk}^2 d_{nk}(t) \phi_{nk}(r, 0) + \sum_{k=1}^M c_{nk}(t) \frac{\partial \phi_{nk}^e(r, z)}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{z=0} \right]. \quad (2.7)$$

Крайові задачі (2.2) та (2.5) розв'язані методом граничних елементів з використанням спеціальних процедур, що описані в [13], [14]

Отже, для функції $\tilde{\Phi}(t, \theta, r, z)$ згідно з (2.6), (2.7) маємо такі співвідношення:

$$\nabla^2 \tilde{\Phi} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_r} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_e} = \frac{\partial W}{\partial t}, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \Big|_{S_0} = 0.$$

Тому для розв'язання зв'язаної задачі з визначення коливань пружної оболонки, заповненою рідиною, необхідно обчислити невідомі коефіцієнти, що залежать лише від часу

$$c_{nk}(t), d_{nl}(t), n = 0, 1, \dots, N, k = 1, 2, \dots, M, k = 1, 2, \dots, M_1.$$

Для знаходження цих коефіцієнтів використано динамічну граничну умову на вільній поверхні [15]

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))\zeta = 0.$$

Використовуючи рівняння (2.6), (2.7), знаходимо

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \cos n\theta \left[\sum_{k=1}^M \ddot{d}_{nk}(t) \phi_{nk}(r, 0) + \sum_{k=1}^{M_1} \ddot{c}_{nk}(t) \phi_{nk}^e(r, 0) \right] + a_x(t)r \cos \theta + \\ & + (g + a_z(t)) \sum_{n=0}^N \cos n\theta \left[\frac{1}{g} \sum_{k=1}^M \chi_{nk}^2 d_{nk}(t) \phi_{nk}(r, 0) + \sum_{k=1}^{M_1} c_{nk}(t) \frac{\partial \phi_{nk}^e(r, 0)}{\partial \mathbf{n}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ще одно співвідношення для визначення невідомих, залежних від часу коефіцієнтів отримано з рівняння руху оболонки у вигляді [12]

$$\mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} = p_d \mathbf{n}, \quad p_d = -\rho_l \left[\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))\zeta \right], \quad (2.9)$$

тут \mathbf{L} та \mathbf{M} - матриці жорсткості та мас, відповідно.

Нехай Ω_{nk} є власними частотами порожньої пружної оболонки.

Маємо співвідношення

$$\mathbf{L}\mathbf{u}_{nk} = \Omega_{nk}^2 \mathbf{M}\mathbf{u}_{nk}, \quad (\mathbf{M}\mathbf{u}_{nk}, \mathbf{u}_{nj}) = \delta_{kj}, \quad (\mathbf{L}\mathbf{u}_{nk}, \mathbf{u}_{nj}) = \Omega_{nk}^2 \delta_{kj}. \quad (2.10)$$

Використав рівняння (2.7)-(2.10), приходимо до такого співвідношення:

$$\begin{aligned} & \mathbf{L} \left\{ \sum_{n=0}^N \cos n\theta \left[\sum_{k=1}^{M_1} c_{nk}(t) \phi_{nk}^e(r, z) \right] \right\} + \mathbf{M} \left\{ \sum_{n=0}^N \cos n\theta \left[\sum_{k=1}^{M_1} \ddot{c}_{nk}(t) \phi_{nk}^e(r, z) \right] \right\} = \\ & = -\rho_l \sum_{n=0}^N \cos n\theta \left[\sum_{k=1}^M \ddot{d}_{nk}(t) \phi_{nk}(r, z) + \sum_{k=1}^{M_1} \ddot{c}_{nk}(t) \phi_{nk}^e(r, z) \right] + a_x(t)r \cos \theta + \\ & + (g + a_z(t)) \sum_{n=0}^N \cos n\theta \left[\sum_{k=1}^M d_{nk}(t) \frac{\partial \phi_{nk}(r, z)}{\partial \mathbf{n}} + \sum_{k=1}^{M_1} c_{nk}(t) \frac{\partial \phi_{nk}^e(r, z)}{\partial \mathbf{n}} \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

Рівняння (2.8), (2.11) описують зв'язану задачу визначення коливань оболонки з рідиною при одночасному врахуванні пружності стінок та коливань вільної поверхні рідини.

Враховуючи результати скалярного добутку рівняння (2.10) на функції $\cos n\theta \phi_{nk}$ і рівняння (2.11) на функції \mathbf{u}_{nk} , та ортогональність форм власних коливань рідини в жорстких резервуарах

[16], отримаємо систему диференціальних рівнянь другого порядку для визначення невідомих коефіцієнтів $c_{nk}(t)$, $d_{nl}(t)$.

Якщо розглядаються задачі власних коливань, вважаємо, що

$$c_{nk}(t) = C_{nk} \exp(i\omega t), \quad d_{nk}(t) = D_{nk} \exp(i\omega t), \quad a_x(t) = 0, \quad a_z(t) = 0. \quad (2.12)$$

Тоді з рівнянь (10), (12) отримуємо задачу на власні значення для визначення власних частот і форм з урахуванням як пружності, так і ефектів плескань вільної поверхні. Тут ω - власна частота, C_{nk}, D_{nk} - невідомі константи.

3 Визначення власних частот

Як приклад числового моделювання розглянемо циліндричну оболонку з плоским дном, радіусом $R = 1m$, товщиною $h = 0.01m$, висотою $L = 2m$, з модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^5 MPa$, коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.3$, густиною матеріалу оболонки $\rho_s = 7800 kg/m^3$, густиною рідини $\rho_l = 1000 kg/m^3$, рівнем заповнення $H = 1.0m$. Положення перегородки приймаємо як $H_l = 0.5m$, радіус перегородки R_b є змінним, значення $R_b = 0$ відповідає резервуару без перегородки. Передбачається, що оболонка жорстко закріплена за контуром контуром, тобто маємо такі граничні умови: $u_r = u_z = u_\theta = 0$ при $z = -H$ і $r = R$, рис.3.1. Власні форми коливань порожньої оболонки отримано за допомогою методу скінченних елементів, як описано в [15] (це перша система базисних функцій).

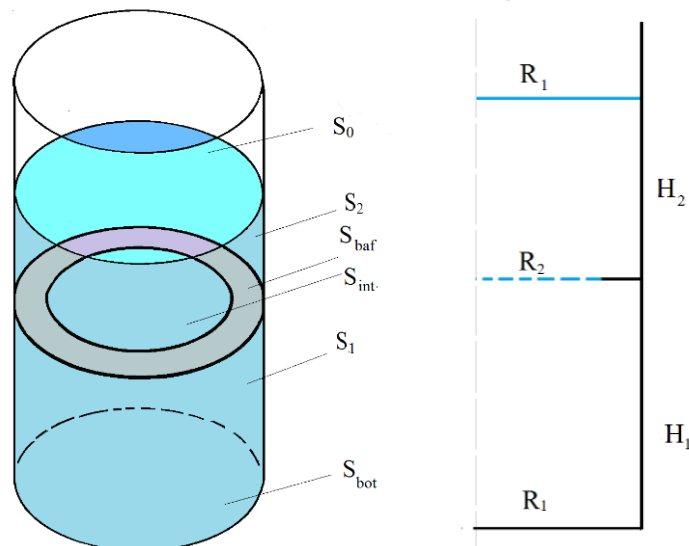


Рисунок 3.1 Циліндричний резервуар з перегородкою

Форми заповненої рідиною пружної оболонки без урахування сили тяжіння Φ_{nk}^e (друга система базисних функцій) знайдені методом, розробленим в [17]. Базисні функції Φ_{nk} що описують коливання вільної поверхні знаходимо з використанням методу інтегральних рівнянь [14]. Коли всі системи базових функцій визначені, підставляємо їх у рівняння (2.10), (2.11) та з використанням (2.12) приходимо до розв'язання задачі на власні значення. При цьому враховуються як коливання пружних стінок оболонки, так і плескання рідини.

Далі досліджено вплив наявності перегородок на власні частоти коливань системи «оболонка-рідина».

У табл. 3.1 наведені числові значення власних частот коливань для порожніх та заповнених рідиною циліндричних пружних резервуарів без перегородок. Тут коефіцієнти n_s, n_l вказують на кількість форм коливань стінок оболонки та форм плескань рідини, що враховуються в зв'язаних вібраціях, K - номер зв'язаної форми коливань. Для числового моделювання використано чотири форми коливань оболонки та п'ять форм плескань.

Таблиця 3.1 – Частоти порожніх та наповнених рідиною пружних резервуарів без перегородок, $n = 0, 1$, Гц

$n = 0$					$n = 1$			
K	n_S	n_L	Оболонка без рідини	Оболонка з рідиною	n_S	n_L	Оболонка без рідини	Оболонка з рідиною
1		1		0.9739		1		0.6418
2		2		1.3208		2		1.1509
3		3		1.5909		3		1.4564
4		4		1.8209		4		1.7054
5		5		2.0249		5		1.9212
6	1	1,2	23.233	7.6591	1,2		48.520	21.902
7	2,1		91.101	43.308	2,1		139.70	79.712
8	3,2		205.25	117.03	3,2,1		232.44	178.42
9	4,3,2		365.79	230.31	4,3		277.30	210.00

Наведені тут результати показують різницю між частотами заповнених рідиною та порожніх оболонок. Але зі збільшенням номера частоти ця різниця поступово зменшується. Частоти резервуарів з пружними стінками істотно перевищують частоти, пов'язані з плесканнями.

Результати впливу перегородки на частоти коливань наведені в табл. 2. Перегородка, що має форму кільця з $R_b = 0.5$ м, встановлюється на висоті $H_l = 0.5$ м в циліндричну оболонку, параметри якої описані вище, рис. 3.1.

Таблиця 3.2 – Частоти порожніх та наповнених рідиною пружних резервуарів із перегородками, $\alpha = 0$, Гц 4 Відомості про авторів та організацію.

K	n_S	n_L	Оболонка без рідини	Оболонка з рідиною
1		1		0.9475
2		2		1.3028
3		3		1.5900
4		4		1.8209
5		5		2.0249
6	1	1	23.2338	5.5213
7	2	1	40.4818	15.172
8	3	2	91.1015	43.769
9	4	2	205.253	119.145
10	5	2	213.551	168.052
11	6	1	365.794	196.125
12	7	2	553.183	370.881
13	8	3	572.280	401.324

Наведені тут результати показують різницю між частотами заповнених рідиною та порожніх оболонок. Але зі збільшенням номера частоти ця різниця поступово зменшується. Частоти резервуарів з пружними стінками істотно перевищують частоти, пов'язані з плесканнями.

У порівнянні з даними табл. 3.1 бачимо вплив наявності перегородки.

Форми осесиметричних коливань циліндричної оболонки з кільцевою перегородкою зображені на рис. 3.2.

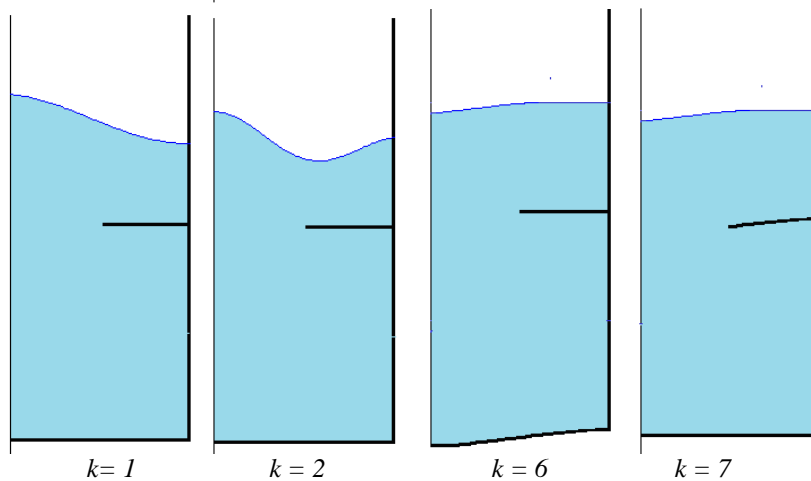


Рисунок 3.2: Форми осесиметричних коливань оболонки з кільцевою перегородкою

Порівнюючи частоти для кругових циліндричних резервуарів із перегородками і без перегородок, можна побачити, що найнижчі частоти осесиметричних коливань для обох резервуарів практично однакові. Нижча частота ω_{06} для обох порожніх пружних резервуарів $\omega_{06} = 23,233$ Гц, і її форма відповідає першій формі осесиметричних коливань днища. Частота ω_{07} для порожнього резервуара та частота ω_{08} для резервуара з перегородкою становлять 91.1015 Гц і відповідають другій формі осесиметричних коливань днища.

Слід зазначити, що встановлення перегородки призводить до більш істотних змін частоти коливань днища. Частота ω_{07} відповідає першій осесиметричній формі перегородки. Подібно до резервуара без перегородок, частоти резервуарів з пружними стінками, істотно перевищують частоти, пов'язані з плесканнями.

Зазначимо також, що зменшення товщини оболонки призводить до зменшення частот пружної оболонки. Частоти порожніх та заповнених рідиною резервуарів з кільцевою перегородкою для різної товщини наведені в табл. 3.3.

Таблиця 3.3: Залежність частот від товщини оболонки

K	Пуста оболонка, Гц				Оболонка з рідиною, Гц			
	h, м							
	0.01	0.005	0.003	0.0015	0.01	0.005	0.003	0.0015
6	23.233	11.838	7.1805	3.6308	5.5213	2.8187	1.7096	0.8644
7	40.482	20.612	12.495	6.3132	15.172	7.9277	4.8058	1.5780
8	91.101	46.271	28.023	14.153	43.769	22.249	13.479	7.0064
9	205.25	100.01	62.922	31.747	119.14	58.148	36.587	15.716
10	213.55	109.10	66.127	31.778	168.05	85.909	52.069	18.692

Відповідно до рис. 3.1, у табл. 3.3 номер $K = 6$ відповідає першій осесиметричній формі коливань пружного днища, а $K = 7$ відповідає першій осесиметричній формі коливань пружної перегородки. Частоти, наведені в табл. 3.3 для товщини $h = 0.01\text{ м}$, $h = 0.005\text{ м}$, $h = 0.003\text{ м}$, вище ніж частоти плескань. Результати табл. 5.3 свідчать про те, що найнижчі частоти пружних оболонок зменшуються зі зменшенням товщини оболонки. Отже, для дуже тонких пружних стінок резервуара фундаментальна частота при зв'язаних коливаннях може бути набагато меншою, ніж частота рідини в оболонці з жорсткими стінками. Зі збільшенням товщини стінки резервуара цей ефект стає незначним, а нижча частота коливань оболонки з рідиною наближається до частоти коливань рідини в жорсткому резервуарі. Але використання таких тонких оболонок як елементів відповідальних конструкцій, що працюють при інтенсивних зовнішніх навантаженнях, вимагає ретельного аналізу напружено-деформованого стану, щоб уникнути втрати стійкості.

У роботі [18] були отримані умови, коли вплив плескань стає незначним при вивченні коливань пружної оболонки. Таким чином, для оцінки найнижчих частот коливань оболонки, заповненої рідиною, доцільно обмежити дослідження жорсткими оболонками, принаймні, якщо відношення товщини до характерного розміру оболонки більше, ніж 0.003.

4 Дослідження взаємної дії горизонтальних та вертикальних навантажень на пружний резервуар частково заповнений рідиною

Розглядається задача про вимушені коливання рідини в пружній оболонці. Передбачається, що рідина ідеальна, нестислива, а її рух, що почався зі стану спокою, є безвихровим. Позначимо змочену поверхню оболонки через S_1 , а вільну поверхню через S_0 . Систему рівнянь руху оболонкової конструкції з відсіками, частково заповненою рідиною, та інтеграл Коші-Лагранжа, застосовуємо у вигляді (2.9).

Будемо шукати власні форми коливань резервуару з рідиною у вигляді (2.3).

Приходимо до системи диференціальних рівнянь (2.8), (2.11) для знаходження невідомі функції часу $c_k(t)$ та $d_k(t)$. Для їх однозначного визначення використовуємо початкові умови

$$c_k(0) = c_{k0}, \quad \dot{c}_k(0) = c_{k1}, \quad d_k(0) = d_{k0}, \quad \dot{d}_k(0) = d_{k1}.$$

Після виконання скалярного добутку отримаємо

$$c_l(t) + \Omega_l^2 c_l(t) = -\rho_l \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) (\phi_{1k}, u_l) + \sum_{k=1}^M \ddot{d}_k(t) (\phi_{2k}, u_l) + a_x(t)(x, u_l) + a_z(t)(z, u_l) = 0, \quad (4.1)$$

$$\ddot{d}_l(\varphi_{2l}, \varphi_{2l}) + \chi_k^2 d_l(\varphi_{2l}, \varphi_{2l}) + (a_z(t) + g) \chi_k^2 d_l(\varphi_{2l}, \varphi_{2l}) + \sum_{k=1}^N c_k \left(\frac{\partial \phi_{1k}}{\partial n}, \varphi_{2l} \right) + a_x(t)(x, \varphi_{2l}) = 0. \quad (4.2)$$

Розв'язок системи (4.1) - (4.2) дає змогу проаналізувати вимушені коливання системи «оболонка-рідина» з різними силами, що збуджують.

При числовому моделюванні розглянуто циліндричну оболонку з плоским днищем, з параметрами, описаними в підрозділі 3.

З наведених в таблиці 3.2 даних щодо плескань рідини у резервуарі, бачимо, що найнижчі частоти є 0.64 Гц та 0.97 Гц. Ці частоти відповідають першій та нульовій гармонікам. Дані таблиці 3.1 свідчать про те, що найнижча частота коливань стінок циліндричного резервуара є 0.947 Гц.

Будемо розглядати одночасну дію горизонтальних та вертикальних навантажень. Припустимо, що

$$a_x(t) = a_h \cos \omega_h t, \quad a_z(t) = a_v \cos \omega_v t.$$

Зауважимо, що нижча частота плескань відповідає першій гармоніці, а нижча частота коливань пружних стінок відповідає осесиметричним коливанням днища. З цього випливає, що $(x, u_1) = 0$ оскільки $x = \rho \cos \theta$. Тому в рівняннях (4.1) буде наявною лише дія вертикального збудження. Але в рівняннях (4.2) будуть ненульовими всі доданки, що відповідають за вплив зовнішнього навантаження.

Припустимо, що $\omega_h = \omega_v = 0.945$ Гц. Обчислимо функції $d_l, c_l, l = 0, 1$ та побудуємо графік зміни рівня вільної поверхні резервуару в точці з координатами $z=H, R=1, \theta=0$.

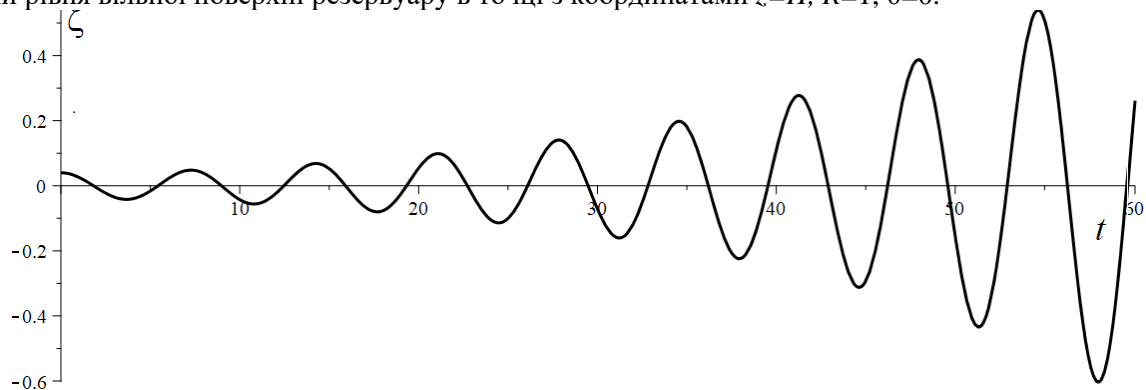


Рисунок 4.1: Рівень підйому вільної поверхні за умови що $\omega_h = \omega_v = 0.945$ Гц.

Заголовки повинні набиратися 11 кеглем шрифту Times New Roman, вирівнюватися по лівому краю. Далі розглянемо випадок, коли $\omega_h = \omega_v = 0.969$ Гц. Зміна рівня вільної поверхні за часом подана на рис. 4.2.

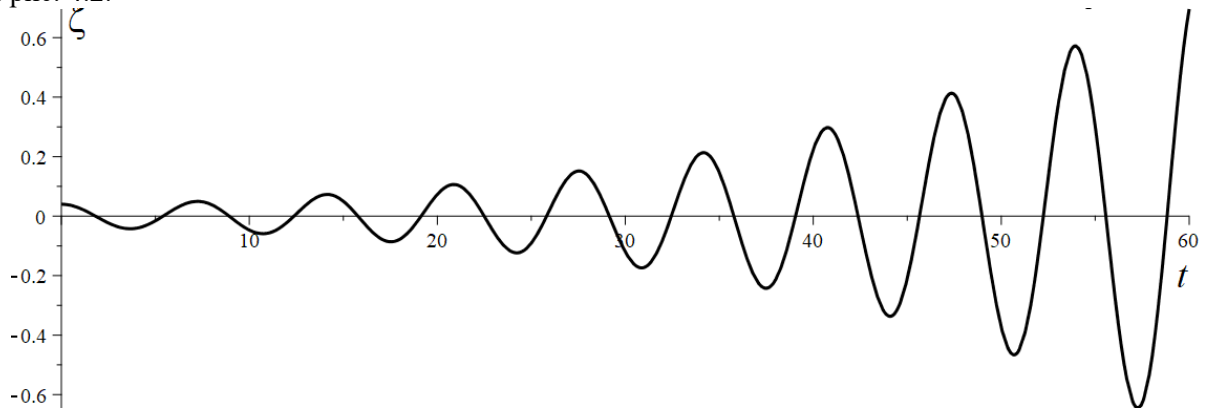


Рисунок 4.2: Рівень підйому вільної поверхні за умови що $\omega_h = \omega_v = 0.969$ Гц

З даних, наведених на рис. 4.1 та 4.2, бачимо що наближення частоти сил, що змушують, до нижчої частоти коливань пружних стінок призводить до втрати стійкості руху.

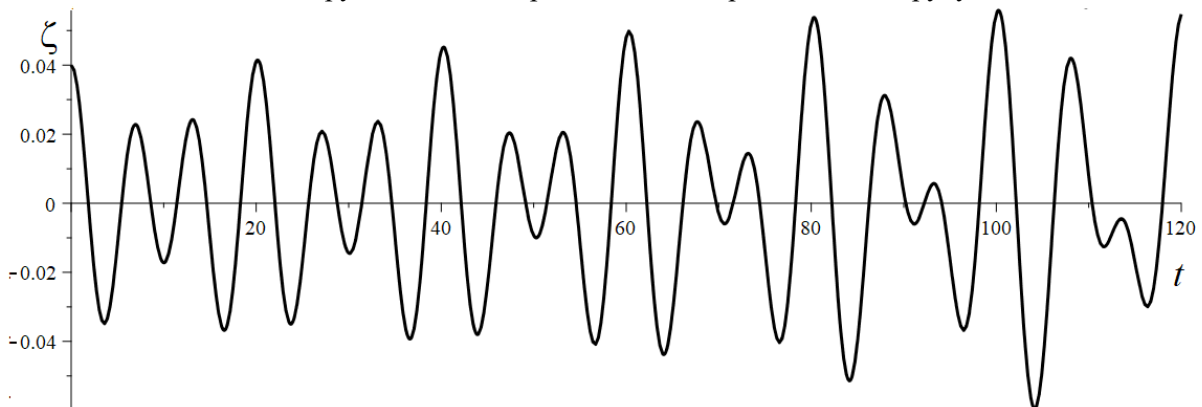


Рисунок 4.3: Рівень підйому вільної поверхні за умови що $\omega_h = \omega_v = 0.639$ Гц

На рис. 4.3. наведено графік зміни рівня вільної поверхні рідини за умови наближення частоти сил, що змушують, до першої фундаментальної частоти плескань.

Рис.4.4. відповідає тій частоті сил, що змушують, що дорівнює подвоєній фундаментальній.



Рисунок 4.4: Рівень підйому вільної поверхні за умови що $\omega_h = \omega_v = 1.28$ Гц.

Рис. 4.5 демонструє зміну рівня вільної поверхні при частоті, яка дорівнює 0.3 Гц, та не є близькою ані до нижчих частот плескань, ані до нижчої частоти коливань пружних стінок.

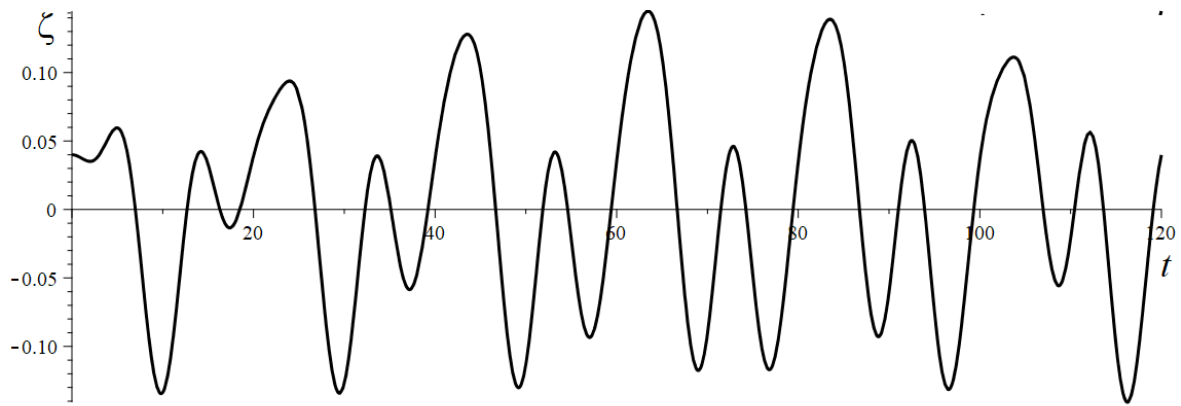


Рисунок 4.5: Рівень підйому вільної поверхні за умови що $\omega_h = \omega_v = 0.3$ Гц.

З наведених результатів можна зробити висновок про те, що в випадку досить тонких оболонок, коли нижча частота коливань пружних стінок стає приблизно рівною нижчим частотам плескань, відбувається втрата стійкості. В цьому випадку спектри частот коливань пружних стінок та коливань вільної поверхні рідини не є відокремленими, і впливом пружності стінок неможливо нехтувати.

5 Висновки

Розглянуто коливання пружної оболонки обертання, частково заповненої рідиною, за умови дії зовнішніх навантажень в вертикальному та горизонтальному напрямках одночасно. Встановлено, що для досить тонких пружних стінок резервуара фундаментальна частота при зв'язаних коливаннях може бути набагато меншою, ніж частота рідини в оболонці з жорсткими стінками. Зі збільшенням товщини стінки резервуара цей ефект стає незначним, а нижча частота коливань оболонки з рідиною наближається до частоти коливань рідини в жорсткому резервуарі. Розглянуто випадки, коли частоти навантажень є близькими до фундаментальної частоти плескань та до нижчої частоти коливань пружних стінок. Встановлено, що спектри частот коливань пружних стінок та коливань вільної поверхні рідини не є відокремленими, і впливом пружності стінок неможливо нехтувати.

ЛІТЕРАТУРА

1. Місюра С. Ю., Сметанкіна Н. В., Місюра Є. Ю. Рациональное моделирование крышки гидротурбины для анализа мощности. Вісн. Нац. техн. ун-ту «ХПІ». Сер. Динаміка і міцність машин. 2019. № 1. С. 34–39. <http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/44370>
2. Ганчин Е.В., Ржевская И.Е., Стрельникова Е.А. Исследование динамических характеристик лопастей рабочих колес поворотно-лопастных гидротурбин при взаимодействии с жидкостью. Вісник Харківського національного університету, 2009. – № 847. – С. 79-86. <http://mia.univer.kharkov.ua/11/30078.pdf>
3. Дегтярев К.Г., Стрельникова Е. А., Шелудько Г. А. Компьютерное моделирование лопастей ветроустановок с оптимальными параметрами / Вісн. Харківського нац. ун-ту імені В.Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління, No 19, 2012, С.81-86 <http://mia.univer.kharkov.ua/19/30251.pdf>
4. Serikova E., Strelnikova E., Yakovlev V. Mathematical model of dangerous changing the groundwater level in Ukrainian industrial cities. Journal of Environment Protection and Sustainable Development. 2015. Vol.1. P. 86-90. URL: <https://www.researchgate.net/publication/281784323>
5. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles J. Modern Technology & Engineering Vol.3, No.1, 2018, pp.15-52 <http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf>
6. Karaiev A., Strelnikova E. Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells. In: Ivanov V., Pavlenko I., Liaposhchenko O., Machado J., Edl M. (eds) Advances in Design, Simulation and Manufacturing III. DSMIE 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham, 2020. P.3-13. DOI: 10.1007/978-3-030-50491-5_1

7. Дегтярев К.Г., Гнисько В.И., Тонконоженко А.М. Компьютерное моделирование разрушающей нагрузки на топливный бак. Вісник Харківського національного університету імені ВН Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» N 1105, 2014, С.51-59. http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKKhIMAM_2014_1105_24_7
8. Behshad, A., Shekari, M.: A boundary element study for evaluation of the effects of the rigid baffles on liquid sloshing in rigid containers. International Journal of Maritime Technology № 10, 2018, pp.45-54, DOI: 10.29252/ijmt.10.45.
9. Mohammad Yaghoob Abdollahzadeh Jamalabadi. Analytical Solution of Sloshing in a Cylindrical Tank with an Elastic Cover. Mathematics 2019, 7(11), 1070; <https://doi.org/10.3390/math7111070>
10. Крютченко Д. Моделювання коливань рідини в призматичних резервуарах з хрестовими перегородками. Вісник Харківського національного університету імені ВН Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління» N 44, 2019, С. 43-50. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2019-44-05>
11. Wenyuan Wang, Quansheng Zang, Zhijun Wei, Zijian Guo, An isogeometric boundary element method for liquid sloshing in the horizontal eccentric annular tanks with multiple porous baffles, Ocean Engineering, Volume 189, 2019, 106367, <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.106367>
12. Strelnikova E.A., Choudhary N., Kriutchenko D.V., Gnitko V.I., Тонконоженко А.М. Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without baffles under horizontal and vertical excitations, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2020, 120, pp. 13–27. DOI: 10.1016/j.enganabound.2020.07.024
13. Naumenko V.V., Strelnikova H.A. Singular integral accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods. Engineering analysis with boundary elements. №26, pp. 95-98, 2002. DOI: 10.1016/S0955-7997(01)00041-8
14. Karaiev A., Strelnikova E. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics. International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. □ 2020 □ Vol. 11, № 1, 2050003. DOI: 10.1142/S1793962320500038
15. Gnitko V., Degtyariov K., Karaiev A. and Strelnikova E. Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity, WIT Transactions on Engineering Sciences, Vol. 122, WIT Press, pp.13-25, 2019. DOI: 10.2495/BE410021
16. Raynovskyy, I.A., Timokha, A.N.: Sloshing in Upright Circular Containers: Theory, Analytical Solutions, and Applications. CRC Press/Taylor & Francis Group, (2020). 170 pp.. ISBN 9780367362898
17. Ravnik, J., Strelnikova, E., Gnitko V., Degtyarev, K., Ogorodnyk, U., BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank, Engineering Analysis with Boundary Elements, 67, pp. 13-25, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.02.006>
18. Ibrahim, R. A., Pilipchuk, V. N., and Ikeda, T. (March 1, 2001). "Recent Advances in Liquid Sloshing Dynamics." ASME. Appl. Mech. Rev. March 2001; 54(2): 133–199. <https://doi.org/10.1115/1.3097293>

REFERENCES

1. Missouri C. Yu., Smetankina NV, Missouri E. Yu. Rational modeling of a hydroturbine cover for strength analysis. Visn. Nat. tech. KhPI University. Ser. Dynamics and strength of machines. 2019. № 1. S. 34–39. <http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/44370> [in Ukrainian]
2. Ganchin EV, Rzhetskaya IE, Strelnikova EA Investigation of the dynamic characteristics of the impellers of rotary-vane hydraulic turbines when interacting with a liquid. Bulletin of Kharkiv National University, 2009. - № 847. - P. 79-86. <http://mia.univer.kharkov.ua/11/30078.pdf> [in Ukrainian]
3. Degtyarev KG, Strelnikova EA, Sheludko GA Computer modeling of wind turbine blades with optimal parameters / Visn. Kharkiv National University VN University Karazina. Series: Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems, No 19, 2012, P.81-86 <http://mia.univer.kharkov.ua/19/30251.pdf> [in Ukrainian]
4. Serikova E., Strelnikova E., Yakovlev V. Mathematical model of dangerous changing the groundwater level in Ukrainian industrial cities. Journal of Environment Protection and Sustainable

- Development. 2015. Vol.1. P. 86-90. URL: <https://www.researchgate.net/publication/281784323> [in English]
5. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles J. Modern Technology & Engineering Vol.3, No.1, 2018, pp.15-52 <http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf> [in English]
 6. Karaiev A., Strelnikova E. Liquid Sloshing in Circular Toroidal and Coaxial Cylindrical Shells. In: Ivanov V., Pavlenko I., Liaposhchenko O., Machado J., Edl M. (eds) Advances in Design, Simulation and Manufacturing III. DSMIE 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham, 2020. P.3-13. DOI: 10.1007/978-3-030-50491-5_1 [in English]
 7. Degtyarev K.G., Gnitko V.I., Tonkonozhenko A.M. Computer simulation of the destructive load on the fuel tank. Bulletin of Kharkiv National University named after VN Karazin, series "Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems "N 1105, 2014, P.51-59. http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKhIMAM_2014_1105_24_7 [in Ukrainian]
 8. Behshad, A., Shekari, M.: A boundary element study for evaluation of the effects of the rigid baffles on liquid sloshing in rigid containers. International Journal of Maritime Technology № 10, 2018, pp.45-54, DOI: 10.29252/ijmt.10.45 [in English]
 9. Mohammad Yaghoub Abdollahzadeh Jamalabadi. Analytical Solution of Sloshing in a Cylindrical Tank with an Elastic Cover. Mathematics 2019, 7(11), 1070; <https://doi.org/10.3390/math7111070> <https://periodicals.karazin.ua/mia/issue/download/773/940> [in English]
 10. Krytchenko D. Modeling of fluid oscillations in prismatic tanks with cross partitions. Bulletin of Kharkiv National University named after VN Karazin, series "Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems "N 44, 2019, P. 43-50. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2019-44-05> [in Ukrainian]
 11. Wenyuan Wang, Quansheng Zang, Zhijun Wei, Zijian Guo, An isogeometric boundary element method for liquid sloshing in the horizontal eccentric annular tanks with multiple porous baffles, Ocean Engineering, Volume 189, 2019, 106367, <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.106367>[in English]
 12. Strelnikova E.A., Choudhary N., Kriutchenko D.V., Gnitko V.I., Tonkonozhenko A.M. Liquid vibrations in circular cylindrical tanks with and without baffles under horizontal and vertical excitations, Engineering Analysis with Boundary Elements, 2020, 120, pp. 13–27. DOI: 10.1016/j.enganabound.2020.07.024 [in English]
 13. Naumenko V.V., Strelnikova H.A. Singular integral accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods. Engineering analysis with boundary elements. №26, pp. 95-98, 2002. DOI: 10.1016/S0955-7997(01)00041-8 [in English]
 14. Karaiev A., Strelnikova E. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics. International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing., 2020, Vol. 11, № 1, 2050003. DOI: 10.1142/S1793962320500038 [in English]
 15. Gnitko V., Degtyariov K., Karaiev A. and Strelnikova E. Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity, WIT Transactions on Engineering Sciences, Vol. 122, WIT Press, pp.13-25, 2019. DOI: 10.2495/BE410021 [in English]
 16. Raynovskyy, I.A., Timokha, A.N.: Sloshing in Upright Circular Containers: Theory, Analytical Solutions, and Applications. CRC Press/Taylor & Francis Group, (2020). 170 pp.. ISBN 9780367362898 [in English]
 17. Ravnik, J., Strelnikova, E., Gnitko V., Degtyarev, K., Ogorodnyk, U., BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank, Engineering Analysis with Boundary Elements, 67, pp. 13-25, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.02.006> [in English]
 18. Ibrahim, R. A., Pilipchuk, V. N., and Ikeda, T. (March 1, 2001). "Recent Advances in Liquid Sloshing Dynamics." ASME. Appl. Mech. Rev. March 2001; 54(2): 133–199. <https://doi.org/10.1115/1.3097293> [in English]