

УДК 532.546+514.86

Фрактальні структури і механічні властивості раковин амонітів

К.Є. Вервейко, В.В. Друшляк, Н.М. Кізілова, О.О. Корякіна,

- Вервейко Катерина Євгенівна** студент, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: katerynaverveiko@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-2539-5403>
- Друшляк Владислав Віталійович** студент, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: vladislav.drushliak@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-3937-6139>
- Кізілова Наталія Миколаївна** д.ф.-м.н., професор; професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-9981-7616>
- Корякіна Ольга Олександрівна** студентка, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: korykina67@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-2510-3615>

Досліджується фрактальна структура лопатевих ліній раковин вимерлих форм амонітів різних типів. Ці лінії відповідають з'єднувальному швам між попередньою та новою камерами, які будує молюск протягом свого поступового зростання. Еволюційно старі форми мають майже прямі або хвилясті шви, які мають низьку звивистість (відношення довжини лінії до відстані між кінцевими точками). Протягом еволюції форма цих ліній суттєво складніша і набула фрактальні властивості, так що еволюційно нові типи мають з'єднувальні шви складної форми. З використанням методу box-counting були виміряні фрактальні розмірності D_f лопатевих ліній. Було показано, що раковини різного еволюційного віку мають лінії, фрактальні розмірності яких зростають від $D_f=1.1$ до $D_f=1.9$. Крім того, зі зростанням номеру камери значення D_f зростають, причому залишаються більшими на зовнішній поверхні камери ніж на її внутрішній. Обговорюється зв'язок фрактальної структури з підвищенням механічної міцності шву.

Ключові слова: математичне моделювання, фрактальні структури, нарощування порожнистих структур, механічна міцність, еволюція

Fractal structures and mechanical properties of ammonite shells

- Vervejko Kateryna** student
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine
- Drushliak Vladyslav** student
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine
- Kizilova Nataliya** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Professor of the Department of Applied Mathematics
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine
- Koryakina Olga** student
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

The fractal structure of the blade-type lines of shells of extinct forms of ammonites of various types is investigated. These lines correspond to the connecting seams between the previous and new chambers that the mollusc builds during its gradual growth. Evolutionarily older forms have nearly straight or wavy seams with low tortuosity (the ratio of line length to end-point distance). Over the course of evolution, the shape of these lines has become more complex and acquired fractal properties, so that evolutionarily new types have connecting seams of a very complex shape. The fractal dimensions D_f of the blade lines were measured using the box-counting method. It was shown that the fractal dimensions of the lobed lines of shells of different evolutionary ages increase from $D_f=1.1$ to $D_f=1.9$. In addition, with an increase in the chamber number, the D_f values increase

and remain larger on the outer surface of the chamber than on the inner one. The relationship between the fractal structure and an increase in the mechanical strength of the weld is discussed.

Keywords: *mathematical modeling, fractal structures, build-up of hollow structures, mechanical strength, evolution.*

1 Вступ

Самоподібні (фрактальні) структури зустрічаються в живій і неживій природі майже на всіх рівнях від макроскопічного (гірські хребти, річкові системи, берегові лінії материків і островів) до мікро/нано рівня (мікроструктури ґрунтів, кристали, клітини і субклітинні структури) [1]. Ці структури утворюються з використанням простих фізичних принципів, які повторюються на поступово зменшуваних масштабах, що приводить до формування достатньо складних геометричних форм. Деякі з них, наприклад, бінарні дерева трубок, що утворюють системи кровоносних судин, дихальних шляхів, судин рослин та ін., з достатньо високою точністю відповідають моделі оптимального трубопроводу, який постачає та розподіляє рідину між розподіленою системою споживачів (клітин організму) [2]. Фрактальні структури овочів відповідають розв'язку задачі про оптимальне компакне заповнення простору. Розгалужені системи від мікрОВОЛОКНИН в клітинах до гілок дерев відповідають механічним структурам з максимальною міцністю [3]. Саме тому принципи фрактальної будови 1D, 2D і 3D структур в природі відповідають універсальним принципам оптимальності [4]. Найбільш поширеною моделлю утворення фракталів в природі є агрегація з обмеженою дифузією (diffusion-limited aggregation, DLA), тобто рух, агрегація і осадження (абсорбція) частинок на поверхнях, коли з поступовим зростанням складності поверхні зменшується можливість постачання нових частинок із розчину або повітря. В результаті рівняння моделі DLA достатньо точно описують такі різні процеси як електроосадження металевих частинок з утворенням розгалужених металевих кристалів, зростання бактеріальних колоній, утворення і розповсюдження тріщин і зростання агломерацій міст.

Пористі структури в верхніх дихальних шляхах тварин забезпечують швидкий нагрів холодного повітря у арктичних тварин і ефективне охолодження і насичення вологою – у тварин пустель. Фрактальна розмірність таких структур близька до розмірності килиму Серпінського ($D_f=1.893$) і має дуже низькі величини гідравлічного опору потоку повітря і високі значення P/S (P – периметр, S – площа перерізу), що забезпечує ефективне зволоження повітря в системі [5]. Принципи будови природних пористих структур можуть використовуватися для підвищення ефективності технічних тепломасообмінників, нагрівачів і охолоджувачів.

В даній роботі вивчаються фрактальні властивості сполучних швів у раковин амонітів. Подібні шви також є в панцирах діатомових водоростей, з'єднаннях плоских кісток у тварин і людини, форма яких варіює від синусоїдної, трикутної, анти-трапецієвидної до фрактальних [6]. В останні роки було опубліковано кілька статей, в яких вивчалися фрактальні властивості сполучних швів раковин деяких класів амонітів [7,8].

2 Аналіз геометрії раковин амонітів

Амоніти є групою вимерлих морських молюсків, які жили у спіралеподібних раковинах. М'яке тіло молюска розташується у зовнішній камері і тому, зі зростанням тіла, молюск «добудовує» нові камери більшого розміру, що приводить до спіралеподібної геометрії (Рис.1). Якщо судити з сучасних наутілусів, більшість «нежилих» камер заповнена газом (повітряні камери), а кілька – рідиною (гідростатичні камери). Завдяки активному гіперосмосу молюск виводив або додавав воду з цих камер раковини, що дозволяло керувати плавучістю і підніматися чи опускатися в воді. Перегородка між камерами має гофрований край, який утворює складну лінію прикріплення до раковини – лопатеву лінію, геометрія якої є однією з систематичних ознак амонітів. Протягом еволюції від ~409 до 66 млн.р. до н.е. лопатеві лінії істотно змінювали форму від майже прямих (Nautiloid, Рис.1а) і «хвилеподібних» (Goniatitic, Рис.1б) до зубчастих (Ceratic, Рис.1в) і складних розгалужених (Amonitic, Рис.1г). Внутрішні процеси добудови нової камери проходять за рахунок агломерації і осадження солей Са шляхом DLA, що приводить до утворення міцного 3D з'єднувального шву (Рис.2а), фрактальна форма якого добре помітна на уламках раковин (Рис.2б).

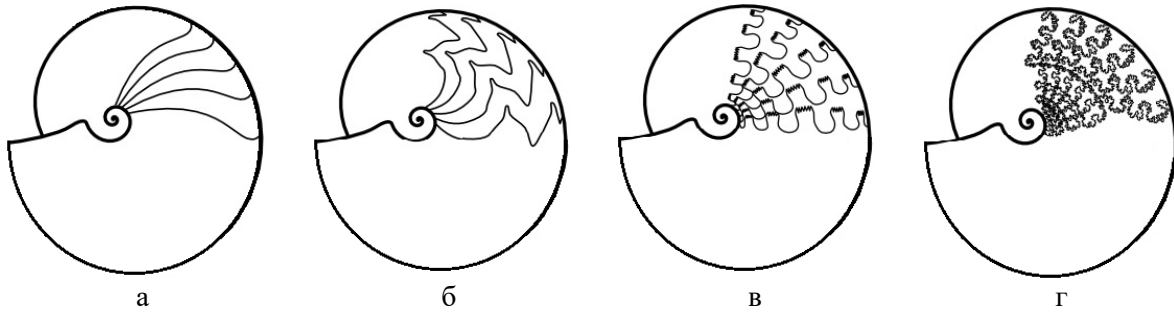


Рис.1. Чотири типи лопатевих ліній амонітів: Nautiloid (а), Goniatitic (б), Ceratitic (в), Amonitic (г)

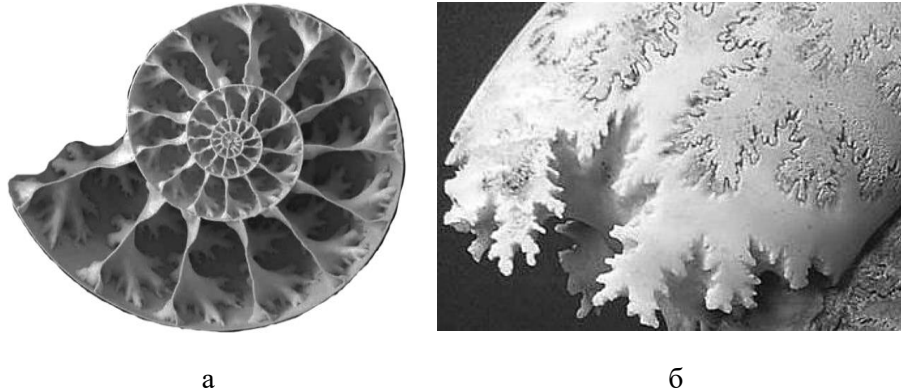


Рис.2. Внутрішня будова стінок камер (а) і лопатевої лінії (б) амонітів.

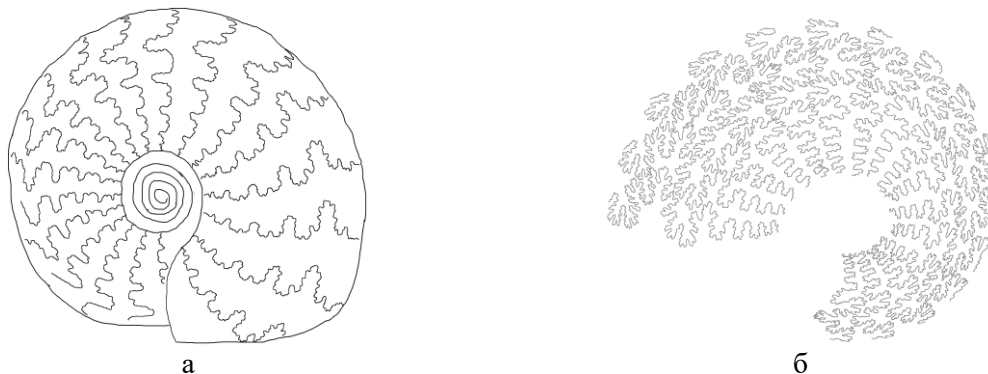
З фотографій високої роздільності (600dpi) раковин амонітів із відкритих онлайн колекцій палеонтологічних музеїв оцифрували за допомогою градієнтних фільтрів контури границь між сусідніми камерами (Рис.3). Результати показують, що складність ліній, які розташовані поблизу зовнішньої поверхні раковини вище, ніж ліній, які розташовані поблизу внутрішньої поверхні. Крім того, складність ліній між першими (малими) камерами значно нижча у порівнянні зі складністю ліній між більш крупними камерами. Таким чином, фрактальні властивості з'єднувального шву можуть відповідати потрібній механічній міцності з'єднання камер.

Фрактальні розмірності ліній вимірювали за допомогою власного коду і вбудованих бібліотек пакету Python. Був використаний метод box-counting, який складається з підрахунку числа квадратів N_ε з довжиною сторони ε та з послідовним зменшенням ε обчислити значення

$$D_f = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\varepsilon)}{\ln(\varepsilon)} \quad (1)$$

з достатньою точністю.

Валідація коду проводилася шляхом вимірювань фрактальної розмірності відомих кривих фон Коха, Мінковського та Гілберта. Розрахунки проводилися як для цілих ліній (Рис.3в,г), так і для їх першої (I), другої (II), третьої (III) та останньої (IV) четвертин.



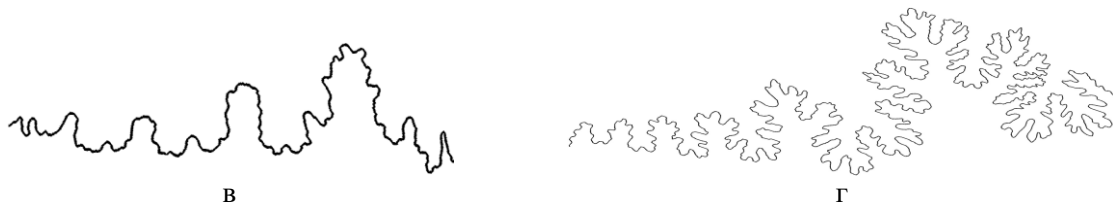


Рис.3. Оцифровані лопатеві лінії раковин тунів Amonitic (а,б) та їх окремі лінії (в,г).

3 Результати розрахунків і їх обговорення

Результати розрахунків D_f для 16 лопатевих ліній амонітового типу (Рис3б) наведені на Рис.4. Значення фрактальних розмірностей ліній лежать в діапазоні $1.25 < D_f < 1.48$, причому нижнє значення відповідає розмірності кривої фон Коха з квадратом замість трикутника ($D_f=1.26186$), а верхнє значення – модифікованій кривій фон Коха з квадратом замість трикутника ($D_f=1.46497$). Внутрішні частини лопатевих ліній (I і II) мають значно простіші форми ($D_f \sim 1.2-1.3$) у порівнянні з зовнішніми частинами (III, IV), які мають $D_f \sim 1.4-1.5$.

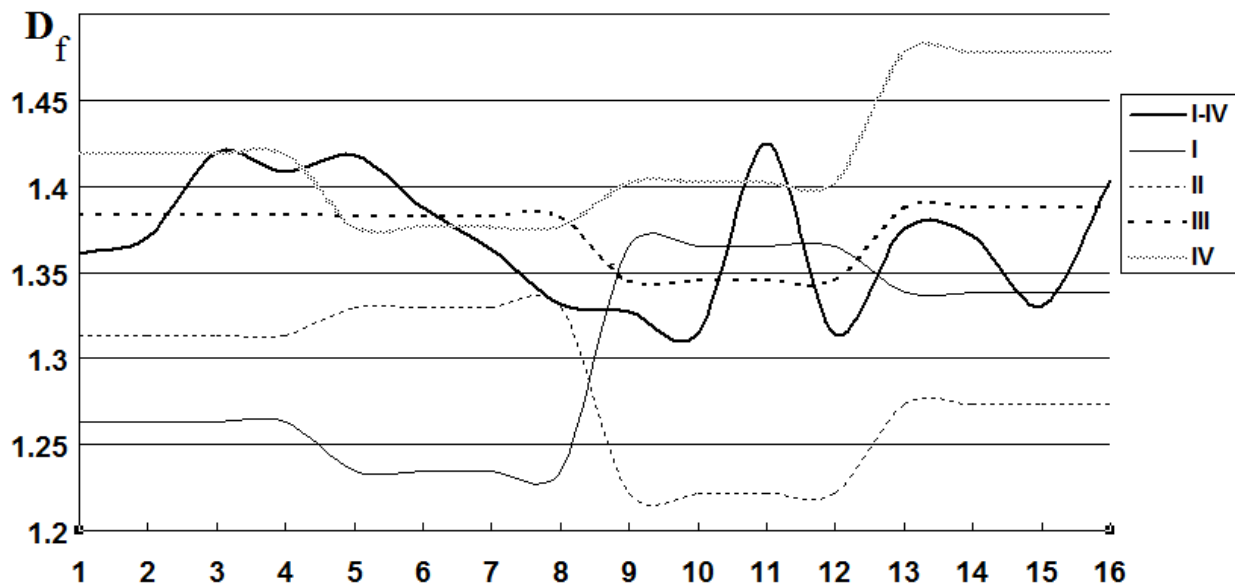

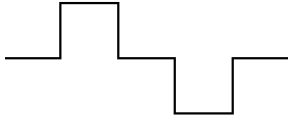

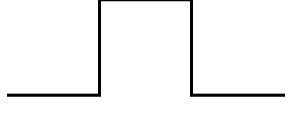
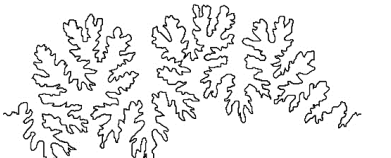
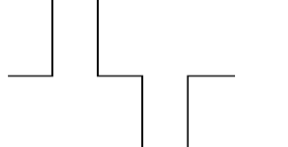

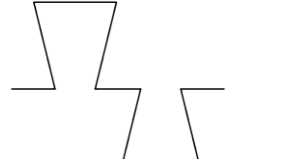
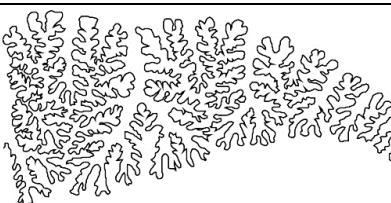
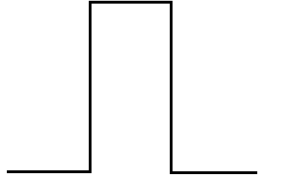
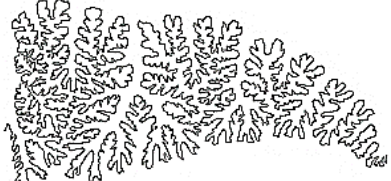
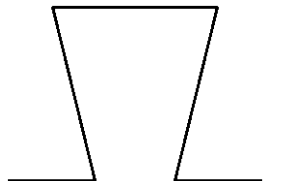


Рис.4. Значення D_f для лопатевих ліній в цілому (I-IV) і їх частин I, II, III, IV.

Для еволюційно молодих форм Goniatic, Seratic фрактальні розмірності внутрішніх частин ліній наближуються до $D_f \sim 1.1-1.2$. Спираючись на результати розрахунків можна виділити наступні за складністю типи лопатевих ліній та відповідні їм фрактальні моделі (Табл.1). Таким чином, найбільш складні лінії з $D_f \sim 1.6-1.8$ відповідають найміцнішим механічним закріпленням швів у вигляді анти-трапецієвидної форми [6]. Цікаво, що природні пористі структури дихальних шляхів арктичних тварин теж мають фрактальної розмірності з цього ж діапазону значень $D_f \sim 1.6-1.8$, а найближчою моделлю для таких структур є килими Серпінського різної форми [5].

Таблиця 1. Характерні типи лопатевих ліній та їх математичні моделі.

	Лінія	D_f лінії	Модель	D_f моделі
1		1.1-1.2		$\frac{\ln 7}{\ln 5} \approx 1.20906$
2		1.2-1.3		$\frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26186$

3		1.3-1.4		$\frac{\ln 9}{\ln 5} \approx 1.36521$
4		1.4-1.5		$\frac{\ln 5}{\ln 3} \approx 1.46497$
5		1.5-1.6		$\frac{\ln 13}{\ln 5} \approx 1.5937$
6		1.6-1.7		$\frac{\ln 15}{\ln 5} \approx 1.6826$
7		1.7-1.8		$\frac{\ln 7}{\ln 3} \approx 1.7712$
8		1.8-1.9		$\frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.8928$

5 Висновки

Еволюційні зміни раковин амонітів протягом ~340 млн. років набували значних змін форми лопатевих ліній, які відповідають з'єднувальним швам між сусідніми камерами, які надбудує молюск в порожнинній раковині. Структура цих ліній змінювалася від майже плоских (кола в гофрованій структурі, Рис.1а) у Nautiloid до само подібних звивистих форм з фрактальними розмірностями $D_f \sim 1.1-1.2$ у Goniatic, $D_f \sim 1.2 - 1.5$ - у Ceratic, і $D_f \sim 1.2-1.9$ - у Amonitic. При цьому частини ліній, які розташовані на зовнішній поверхні раковини і зазнають значніших механічних навантажень, є більш складнішими і мають вищі значення D_f . Ті лінії, які розташовані на внутрішніх поверхнях, що звиті у спіраль і, таким чином, мають додаткове механічне підкріплення, є більш простішими і мають менші значення D_f . Побудовані математичні моделі відповідних фрактальних ліній, які можна запропонувати до використання в якості з'єднувальних швів в технічних конструкціях.

ЛІТЕРАТУРА

1. Mandelbrot B. *The Fractal Geometry of Nature*. Echo Point Books & Media, LLC. 1982. - 490 p.
2. Кизилова Н.Н., Попова Н.А. Критерии оптимального функционирования ветвящихся транспортных систем живой природы. // *Вестник Харьковского университета. Сер. Математика, прикладная математика и механика*. - 1999, N444. - С.148-156.

3. Kizilova N. Biomimetic composites reinforced by branched nanofibers. // *Nanoplasmonics, Nano-Optics, Nanocomposites, and Surface Studies. Springer Proceedings in Physics*, Vol.167. O. Fesenko and L. Yatsenko, (Eds.). – 2015. – P. 7–23.
4. Ball Ph. *The self-made tapestry: pattern formation in nature*. Oxford: Oxford University Press. 2001. – 288 p.
5. Кізілова Н.М., Світличний О.В., Чуйко В.В. Дослідження зв'язку фрактальних та гідравлічних властивостей пористих структур верхніх дихальних шляхів деяких арктичних тварин. // *Вісник Харківського національного університету. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. – 2020. – вип. 46. – С.17-24. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2020-46-02>
6. Li Y., Ortiz Ch., Boyce M.C. A generalized mechanical model for suture interfaces of arbitrary geometry. // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2013. Vol.61. - P.1144–1167. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmps.2012.10.004>
7. Inoue Sh., Kondo Sh. Suture pattern formation in ammonites and the unknown rear mantle structure. // *Scientific Reports*. - 2016. Vol.6. - P.33689. doi: 10.1038/srep3368.
8. Pérez-Claros J.A., Bengtson P. Evolution of complexity and natural selection: Suture complexity and its relation to taxonomic longevity in Cretaceous ammonoids. // *Cretaceous Research*. - 2018. - Vol. 88. P. 55-61. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cretres.2017.02.008>

REFERENCES

1. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Echo Point Books & Media, LLC, 1982, 490 p.
2. N. Kizilova, N. Popova, “Criteria for the optimal functioning of branching transport systems of living nature”, *Bulletin of Kharkov University, Ser. Mathematics, applied mathematics and mechanics*, 1999, N444, P.148-156.
3. N. Kizilova, “Biomimetic composites reinforced by branched nanofibers”, In: *Nanoplasmonics, Nano-Optics, Nanocomposites, and Surface Studies. Springer Proceedings in Physics*, Vol.167. O. Fesenko and L. Yatsenko, (Eds.), 2015, P. 7–23.
4. Ph. Ball, *The self-made tapestry: pattern formation in nature*, Oxford University Press, Oxford, 2001, 288 p.
5. N. Kizilova, O. Svitlichnyj, V. Chujko, “Study on connections between the fractal and hydraulic properties of porous structures of the upper airways of some arctic animals”, V.N. Karazin Kharkov National University, Ser. Mathematic modeling. Information technology. Automated control systems, 2020, Vol. 46, C.17-24. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2020-46-02>
6. Y. Li, Ch. Ortiz, M.C. Boyce, “A generalized mechanical model for suture interfaces of arbitrary geometry”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2013, Vol.61, P.1144–1167. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmps.2012.10.004>
7. Sh. Inoue, Sh. Kondo, “Suture pattern formation in ammonites and the unknown rear mantle structure”, *Scientific Reports*, 2016, Vol.6, P.33689. doi: 10.1038/srep3368.
8. J.A. Pérez-Claros, P. Bengtson, “Evolution of complexity and natural selection: Suture complexity and its relation to taxonomic longevity in Cretaceous ammonoids”, *Cretaceous Research*, 2018, Vol. 88, P. 55-61. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cretres.2017.02.008>