

УДК 65.0(075.8)

## Використання методів формального синтезу та верифікації паралельних часопараметризованих моделей для рішення системи лінійних рівнянь методом Гауса

О. Ю. Мороз, О. Г. Толстолузька

**Мороз  
Ольга  
Юрійвна**

*старший викладач кафедри теоретичної та прикладної системотехніки факультету комп'ютерних наук; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків, Україна, 61077*

*e-mail: [o.moroz@karazin.ua](mailto:o.moroz@karazin.ua)*

<https://orcid.org/0000-0002-4920-4093>.

**Толстолузька  
Олена  
Геннадіївна**

*д.т.н., с.н.с., професор кафедри теоретичної і прикладної системотехніки факультету комп'ютерних наук; Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків, Україна, 61077*

*e-mail: [elena.tolstoluzka@karazin.ua](mailto:elena.tolstoluzka@karazin.ua)*

<https://orcid.org/0000-0003-1241-7906>.

Основним вирішенням проблеми підвищення ефективності паралельних обчислювальних систем є методи формального синтезу ефективних часопараметризованих мультипаралельних моделей задач. Стаття присвячена задачі дослідження ефективності використання методів формального синтезу даного класу паралельних моделей для конкретних прикладних задач, що робить її актуальною та практично значущою. У роботі проведено аналіз методів паралельної обробки даних та показників ефективності, а також аналіз методів синтезу та засобів специфікації та візуалізації паралельних статичних та часопараметризованих моделей задач. Розроблено паралельну часопараметризовану модель алгоритму Гауса на основі методу структур СЧС, а також паралельну часопараметризовану модель алгоритму Гауса на основі методу структур СЧС та формальних поліномів. Дана порівняльна оцінка ефективності цих двох методів синтезу для критерію мінімізації кількості міжпроцесорних обмінів повідомленнями в кластерній системі. Розроблено програмну реалізацію створення паралельних часопараметризованих моделей розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса для кластерних систем з урахуванням комунікаційної складової. Об'єктом дослідження є методи формального синтезу паралельних часопараметризованих моделей задач для обчислювальних систем з розподіленою пам'яттю (MPP, CLUSTER). Предметом дослідження є ефективність використання методів формального синтезу мультипаралельних часопараметризованих моделей конкретних прикладних завдань для критерію мінімізації кількості міжпроцесорних обмінів повідомленнями у кластерній системі.

**Ключові слова:** паралельні обчислювальні системи, кластерні системи, методи структур СЧС, методи формального синтезу, часопараметризована модель алгоритму Гауса..

## Using the methods of formal synthesis and verification of parallel time-parameterized models for solving the system of linear equations by Gaussian elimination

**Moroz  
Olha Yuriiwna**

*Senior lecturer of the Department of Theoretical and Applied Systems Engineering, Faculty of Computer Science; VN Karazin Kharkiv National University, 6 Svobody Square, Kharkiv, Ukraine, 61077*

*e-mail: [o.moroz@karazin.ua](mailto:o.moroz@karazin.ua)*

<https://orcid.org/0000-0002-4920-4093>.

The main solution to the problem of improving the efficiency of parallel computing systems is the methods of formal synthesis of efficient time-parameterized multiparallel models. The article is devoted to investigating the efficiency of using the formal synthesis methods of the given class of parallel models for the specific applied problems. The analysis of methods of parallel data processing and efficiency indicators, as well as the analysis of synthesis methods and means of specification and visualization of parallel static and time-parameterized problem models have been carried out. A parallel time-parameterized model of the Gaussian algorithm based on the method of SCS structures, as well as a parallel time-parameterized model of the Gaussian algorithm based on the method of SCS structures and formal polynomials have been developed. A comparative evaluation of the effectiveness of these two synthesis methods for the criterion of minimizing the number of interprocessor messages in the cluster system. The software implementation for creating parallel time-parameterized models of solving systems of linear equations by Gaussian elimination for cluster systems taking into account the communication component has been developed. The research object is the methods of formal synthesis of parallel time-parameterized models for computing systems with distributed memory (MPP, CLUSTER). The research subject is the efficiency of using the methods of formal synthesis of multiparallel time-parameterized models of specific applied problems for the criterion of minimizing the number of interprocessor exchanges in the cluster system.

*Keywords: parallel computing systems, cluster systems, methods of SCS structures, methods of formal synthesis, time-parameterized model of Gaussian elimination.*

## **Использование методов формального синтеза и верификации параллельных времяпараметризованных моделей для решения системы линейных уравнений методом Гаусса**

**Мороз Ольга Юрьевна** старший преподаватель кафедры теоретической и прикладной системотехники  
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы 6, Харьков -077, Украина, 61077

**Толстолужская Елена Геннадиевна** д.т.н., с.н.с., профессор кафедры теоретической и прикладной системотехники  
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина пл. Свободы 6, Харьков -077, Украина, 61077

Основным решением проблемы повышения эффективности параллельных вычислительных систем есть методы формального синтеза эффективных времяпараметризованных мультипараллельных моделей задач. Статья посвящена задаче исследования эффективности использования методов формального синтеза данного класса параллельных моделей для конкретных прикладных задач, что делает ее актуальной и практически значимой. В работе проведен анализ методов параллельной обработки данных и показателей эффективности, а также анализ методов синтеза и средств спецификации и визуализации параллельных статических моделей. Разработана параллельная времяпараметризованная модель алгоритма Гаусса на основе метода структур СЧС, а также параллельная времяпараметризованная модель алгоритма Гаусса на основе метода структур СЧС и формальных полиномов. Дана сравнительная оценка эффективности этих двух методов синтеза для критерия минимизации количества межпроцессорных обменов сообщениями в кластерной системе. Разработана программная реализация создания параллельных времяпараметризованных моделей решения систем линейных уравнений методом Гаусса для кластерных систем с учетом коммуникационной составляющей. Объектом исследования являются методы формального синтеза параллельных времяпараметризованных моделей задач для вычислительных систем с распределенной памятью (MPP, CLUSTER). Предметом исследования является эффективность использования методов формального синтеза мультипараллельных времяпараметризованных моделей конкретных прикладных задач для критерия минимизации количества межпроцессорных обменов сообщениями в кластерной системе..

*Ключевые слова: параллельные вычислительные системы, кластерные системы, методы структур СЧС, методы формального синтеза, времяпараметризованная модель алгоритма Гаусса.*

### **1 Вступ**

На даний час центральною проблемою перспективної обчислювальної техніки є підвищення ефективності паралельних ЕОМ/мереж. Виник розрив між збільшеними запитами практики – необхідністю подальшого підвищення ефективності високопродуктивної обчислювальної техніки, з одного боку, та відсутністю можливості задоволення цих запитів за допомогою відомих паралельних ЕОМ/мереж, з іншого боку. Необхідною умовою підвищення ефективності суперЕОМ та розвитку перспективної паралельної обчислювальної техніки є підвищення ефективності паралельного програмного забезпечення. Як зазначається у роботі [1], «В даний час проблема розробки ефективного паралельного програмного забезпечення виявилася центральною проблемою паралельних обчислень загалом...» та центральне питання паралельних обчислень – яким чином створювати ефективні програми для паралельних систем?

Одним з основних шляхів вирішення цієї проблеми є підвищення ефективності паралельного програмного забезпечення за рахунок розширення методів паралельної обробки даних, переходу від традиційних статичних паралельних програм до застосування часопараметризованих мультипаралельних програм та розробки методів і технологій їх автоматичного проектування [1–3]. Відомі системи паралельного програмування не забезпечують вирішення цієї проблеми через обмежений склад методів паралельної обробки підтримки, відсутність обліку реального часу та ручного характеру проектування людиною паралельних програм [1–4]. Основою вирішення проблеми є методи формального синтезу ефективних часопараметризованих мультипаралельних моделей задач [5–7]. Саме задача дослідження ефективності використання методів формального синтезу даного класу паралельних моделей для конкретних прикладних задач є актуальною і практично значущою.

Метою роботи стало дослідження ефективності використання методів формального синтезу мультипаралельних часопараметризованих моделей для конкретних прикладних задач.

Задачі дослідження: провести аналіз методів паралельної обробки даних та показників ефективності; провести аналіз методів синтезу та засобів специфікації та візуалізації паралельних статичних та часопараметризованих моделей задач; розробити паралельну часопараметризовану модель алгоритму Гауса на основі методу структур СЧС; розробити паралельну часопараметризовану модель алгоритму Гауса на основі методу структур СЧС та формальних поліномів; дати порівняльну оцінку ефективності цих двох методів синтезу для критерію мінімізації кількості міжпроцесорних обмінів повідомленнями у кластерній системі; розробити програмну реалізацію створення паралельних часопараметризованих моделей розв’язання систем лінійних рівнянь методом Гауса для кластерних систем з урахуванням комунікаційної складової.

Об’єктом дослідження є методи формального синтезу паралельних часопараметризованих моделей задач для обчислювальних систем з розподіленою пам’яттю (MPP, CLUSTER).

Предметом дослідження є ефективність використання методів формального синтезу мультипаралельних часопараметризованих моделей конкретних прикладних задач для критерію мінімізації кількості міжпроцесорних обмінів повідомленнями у кластерній системі.

Як засоби числового опису паралельних часових моделей задач було використано структури семантико-числової специфікації (СЧС) та утворюючі поліноми (УП) [4-7]. Засобами графічної візуалізації є Сі-графи та часові паралельні граф-схеми 4,6].

## 2 Постановка задачі

Початкові дані:

- досліджується «прогнозована» ефективність – потенційна ефективність майбутнього використання аналізованих/розроблюваних методів формального синтезу моделей;
- склад досліджуваних методів формального синтезу моделей [6]:
  - а) «Метод структур СЧС»;
  - б) «Метод структур СЧС та Формальних Поліномів»;
- підтримуваний клас паралельних обчислювальних систем (ОС) – системи з розподіленою пам’яттю (MPP, CLUSTER);
- прикладна задача – послідовний алгоритм Гауса вирішення системи лінійних рівнянь;
- методи паралельної обробки даних, що підтримуються, – поєднання незалежних операцій завдань;
- оцінювані показники ефективності – час вирішення задач, можливості зменшення часових витрат за обмін повідомленнями;
- тривалість виконання  $t_j^0$  операцій (у тактах).

тип	Vx	+,-	=	*	%	/	vix	Bp	stop	cont
$t_j^0$	1.00	1.00	2.00	10.00	35.00	35.00	1.00	1.00	1.00	1.00

## 3. Математична модель алгоритму Гауса

Математична модель розв’язання системи л інійних рівнянь методом Гауса має такий вигляд [4].

Дана система  $n$  лінійних рівнянь алгебри:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = a_{1\ n+1}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = a_{2\ n+1}$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = a_{n\ n+1}$$

Рішення системи рівнянь за компактною схемою полягає у послідовному визначенні  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$  із системи рівнянь:

$$x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = c_{1\ n+1}$$

$$x_2 + \dots + c_{2n}x_n = c_{2\ n+1}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_n = c_{n \ n+1}$$

Ця система виходить як результат розкладання вихідної матриці на трикутні матриці відповідно до наступних формул:

$$b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} \cdot c_{kj}, \quad 1 \leq j, j \leq n, i \geq j;$$

$$c_{ij} = \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} \cdot c_{kj} \right) / b_{ii}, \quad 1 \leq j \leq n, 1 < j \leq n+1, i < j.$$

Результаті обчислень виходить матриця

$$b_{11}c_{12}c_{13}\dots c_{1n}c_{1 \ n+1}$$

$$b_{21}b_{22}c_{23}\dots c_{2n}c_{2 \ n+1}$$

$$\dots$$

$$b_{n1}b_{n2}b_{n3}\dots b_{nn}c_{n \ n+1}.$$

Власне обчислення значень  $x_i, i = n, n-1, \dots, 1$  виконується за формулою:

$$x_i = c_{i \ n+1} - \sum_{k=1}^{n-i} c_{i, n-k+1} \cdot x_{n-k+1}.$$

Метод Гауса ґрунтується на можливості виконання еквівалентних перетворень лінійних рівнянь, які не змінюють рішення системи, що розглядається. До таких перетворень ставляться:

- множення будь-якого рівняння на ненульову константу;
- перестановка рівнянь; h
- додавання до рівняння будь-якого іншого рівняння системи.

Основна ідея методу полягає у приведенні матриці  $A/U$  коефіцієнтів за допомогою еквівалентних перетворень до трикутного вигляду, після чого значення невідомих можуть бути отримані безпосередньо в явному вигляді.

#### 4. Узагальнений алгоритм методів синтезу паралельних часових моделей завдань для класів MPP/CLUSTER

Архітектура узагальненого методу формального синтезу часових паралельних моделей завдань кластерних систем представляє рис. 1 [6]

Етап 1 (п. 2, рис. 1). Змістом етапу є формування для вихідної Сі-програми структур семантико-числової інформації (СЧС), які є основою наступних етапів формального синтезу часопараметризованих паралельних MPP/CLUSTER моделей/програм.

Етап 2 (п. 3 рис. 1). Змістом етапу є формальний синтез та візуалізація графічної специфікації Сі-програми у вигляді Сі-графа з деталізацією до інструкцій/функцій мови Сі. Сі-граф задає, так само як і структури BF і CF семантико-числової специфікації, склад інструкцій/функцій вихідної Сі-програми та їх зв'язок за даними та управлінням.

Етап 3 (п. 4 рис. 1). Змістом етапу є верифікація синтезованих семантико-числової та графічної специфікацій (структур СЧС та Сі-графа) Сі-програми. Метою верифікації є перевірка коректності результатів, що використовуються як вихідні дані при виконанні наступних етапів синтезу часопараметризованих паралельних MPP/CLUSTER - моделей/програм.

Етап 4 (п. 5 рис. 1). Змістом етапу є розширення складу операторів та зв'язків структур BF і CF семантико-числової специфікації Сі-програми за рахунок введення додаткових змінних, що представляють результати проміжних обчислень, та відповідних цим змінним операторів роботи з пам'яттю. Це забезпечує перехід до конструктивних (Constructive, C) структур CBF і CCF семантико-числової специфікації, що відображає повний склад та зв'язки операторів, що підлягають виконанню при вирішенні задачі.

Етап 5 (п. 6 рис. 1). Забезпечує перевірку наявної системи часових чи ресурсних вимог/обмежень, наявність яких визначає вибір конкретного методу та алгоритму синтезу

часопараметризованих паралельних *MPP/CLUSTER* моделей/програм: методу структур СЧС і методу структур СЧС та формальних поліномів.

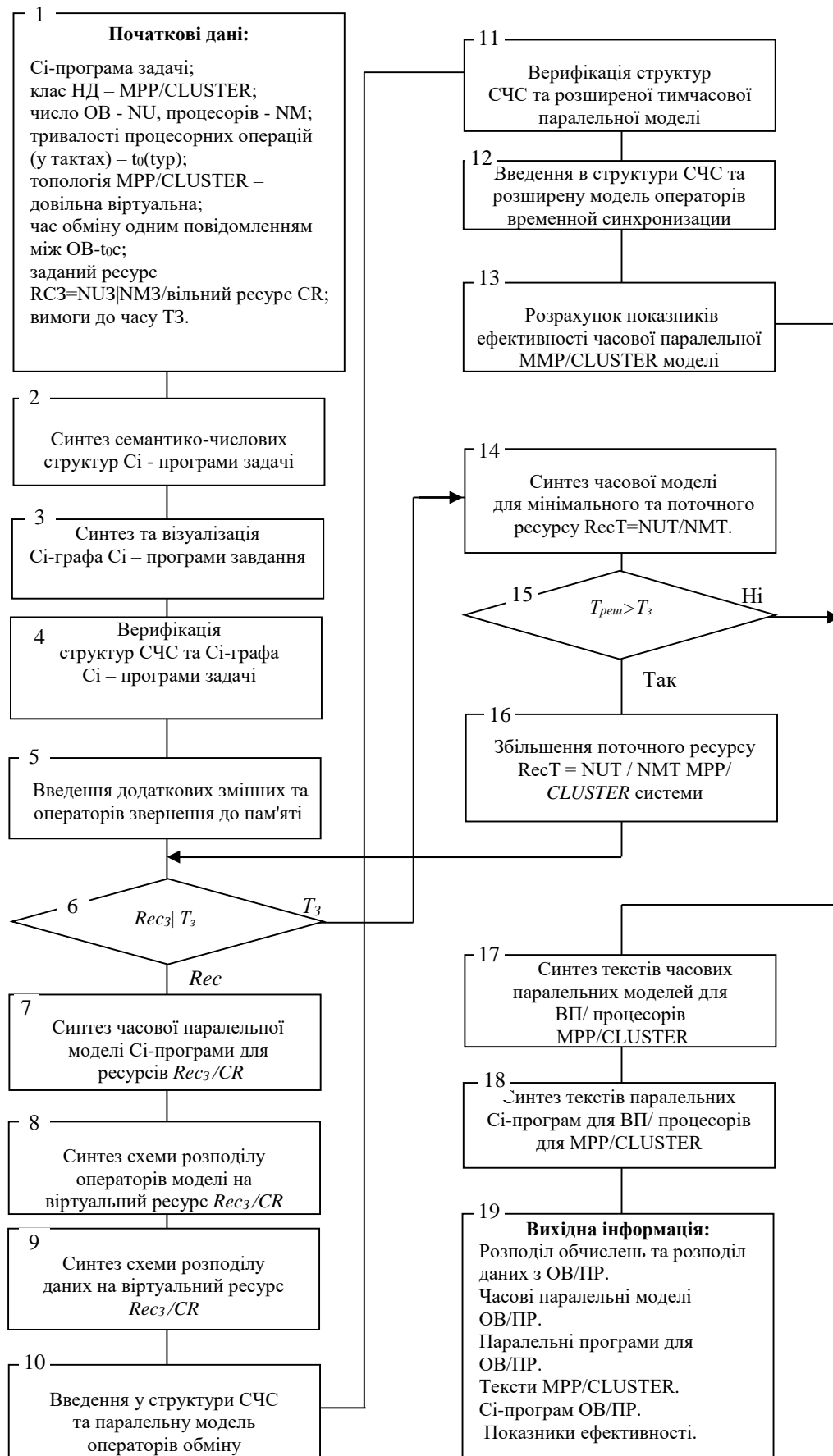


Рис. 1. Узагальнений метод синтезу та верифікації часових паралельних моделей.

Етап 6 (п.7 рис. 1). Змістом етапу є синтез часової паралельної моделі вихідної Сі-програми для заданого ресурсу обчислювальних вузлів/процесорів  $NU_3/NM_3$  та перевірка її коректності.

Основні етапи методів формального синтезу представлені на рис. 2 [6]

Етап 7 (п. 8 ... 16 рис. 1). Змістом етапу є вирішення наступних задач:

- розподіл операторів часової паралельної ресурсно-орієнтованої моделі Сі-програми між компонентами заданого ресурсу  $Rec_3=NU_3/NM_3$  для подальшого виконання;
- розподіл даних між відповідними модулями пам'яті, що підтримує прийнятий на заданому ресурсі  $Rec_3$  розподіл операторів;
- введення в часову паралельну ресурсно-орієнтовану модель операторів обміну повідомленнями ( $send(...)$ ,  $recieve(...)$ ), які забезпечують обмін даними між обчислювальними вузлами/процесорами MPP/CLUSTER системи.

Розглянемо призначення та математичний опис основних етапів синтезу, показаних на рис. 2 [6].

Етап 1 (п. 2 рис. 2) забезпечує вирішення двох завдань:

а) розрахунок для кожної вершини  $P_j \in P$  Сі-графа  $GO = GO(P, U)$  значення рангу  $r_j$  відповідно до наступних співвідношень:

$$r_j = t_j^0 \text{ якщо } W(P_j) = 0,$$

$$r_j = \max_{P_\xi \in W(P_j)} (r_\xi + t_j^0) \text{ якщо } W(P_j) \neq 0;$$

б) розрахунок для операторів  $P_j \in P$  значення пріоритету  $d_j$ , що визначає важливість оператора  $P_j$  стосовно інших операторів  $P_k$ , з безлічі  $P$  і тим самим черговість його розгляду при вирішенні задачі виділення обладнання з метою його реалізації.

Співвідношення, що забезпечують розрахунок приватних пріоритетів  $b_j^\delta = 1$  операторів конкретного алгоритму  $P^\delta = \{P_j^\delta\}$ , мають такий вигляд:

$$b_j^\delta = 1 \text{ якщо } r_j = \max_{P_i \in P^\delta} r_i \text{ и } r_i < r_j \text{ якщо } i \neq j;$$

$$b_j^\delta < b_i^\delta \text{ якщо } r_i = r_j \text{ и } t_j^0 > t_i^0;$$

$$b_j^\delta < b_i^\delta \text{ якщо } r_j > r_i;$$

$$b_j^\delta < b_i^\delta \text{ якщо } r_i = r_j, t_j^0 = t_i^0 \text{ и } |W_j| > |W_i|;$$

$$b_j^\delta < b_i^\delta \text{ якщо } r_i = r_j, t_j^0 = t_i^0 \text{ та } |W_j| = |W_i|, \text{ для } j < i.$$

У цих співвідношеннях  $t_i, r_j$  – ранги операторів  $P_i, P_j$ , що визначаються наступним чином:  $r_j = t_j^0$  якщо  $W_j = \emptyset$  (якщо оператор  $P_j$  є вихідним оператором алгоритму, що формує остаточний результат);  $r_j = \max_{P_\xi \in W_j} (r_\xi + t_j^0)$  якщо  $W_j \neq \emptyset$  (якщо  $P_j$  здійснює обчислення проміжного результату, використовуваного іншим (іншими) операторами алгоритму).

**Етап 2** (п. 4 рис. 2) забезпечує формування безлічі  $E_{nj}^c$  операторів  $P_j^\delta$  – кандидатів на початок виконання в момент  $t$  відповідно до наступних співвідношень (індекс «с» в  $E_{nj}^c$  відповідає застосуванню методу суміщення операцій). Логіка формування множини  $E_{nj}^c$  задається такими співвідношеннями

$$E_{nj}^c = R_{nj-1}^c \cup K_{nj}^c,$$

де  $R_{nj-1}^c$  безліч операторів  $P_j$ , реалізація яких була розпочата на  $nj-1$ -му ярусі у зв'язку з відсутністю необхідних вільних компонентів;  $K_{nj}^c$  – безліч операторів, виконання яких може бути

розпочато на  $n_j$ -му ярусі у зв'язку з наявністю всіх необхідних для них даних, тобто з урахуванням раніше виконаних операторів та інформаційно-керуючих зв'язків між операторами  $P_j \in P$ .

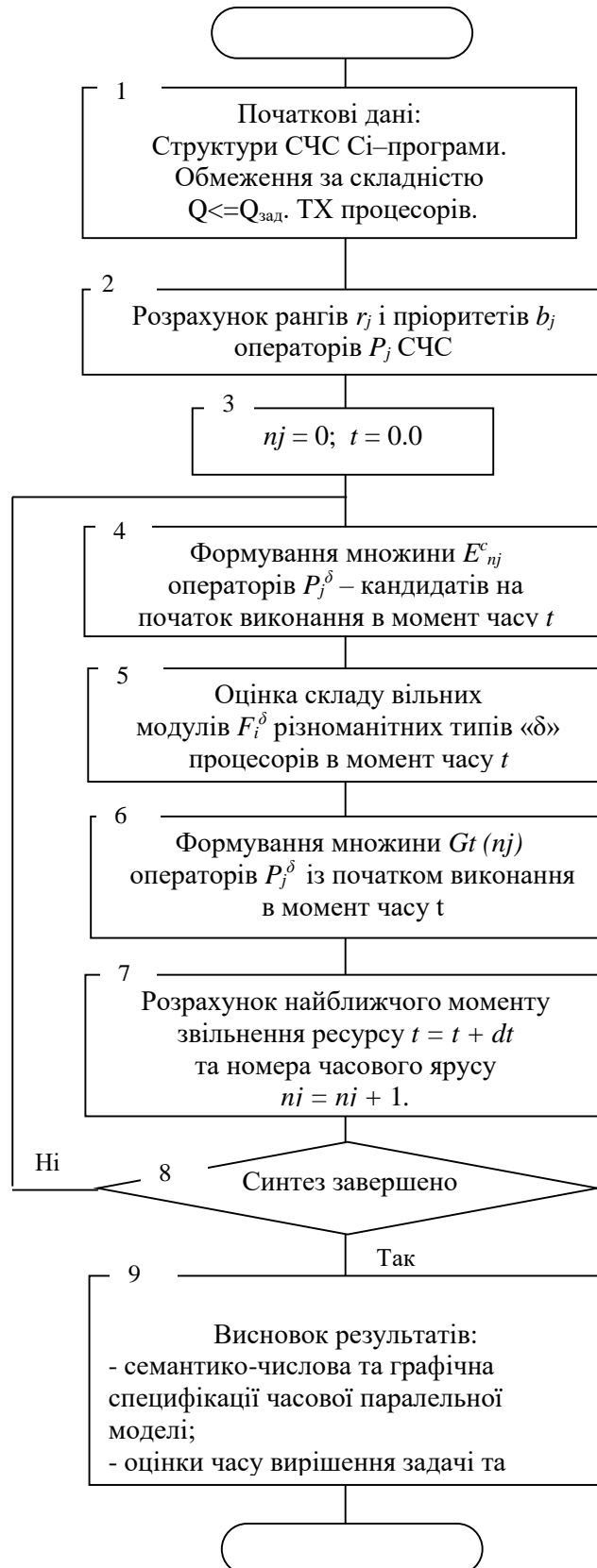


Рис. 2. Етапи формального синтезу часових паралельних моделей задач при ресурсних вимогах/обмеженнях.

$$R_{nj-1}^c = \begin{cases} 0 & \text{при } nj=0, \\ E_{nj-1}^c \setminus G_{nj-1}^c & \text{при } nj > 0; \end{cases}$$

$$K_{nj}^c = \begin{cases} \bigcup_j P_j & \text{при } S(P_j)=0 \text{ (якщо } nj=0), \\ \bigcup_j P_j & \text{за умови виконання для } P_j \text{ наступних умов:} \end{cases}$$

а)  $P_j \in \bigcup_{P_\xi \in G_{nj-1}^c} W(P_\xi)$ , якщо  $S(P_j) \subseteq G_{nj-1}^c$ ;

б)  $t_\xi^H + t_\xi^0 \leq t(nj)$  для усіх  $P_\xi \in S(P_j)$ .

Тут  $G_{nj-1}^c$  – безліч операторів  $P_j$ , реалізація яких було розпочато на ярусах  $nj = 1 \dots nj - 1$ .

**Етап 3** (п. 5, 6, 7 рис. 2) забезпечують вирішення наступних задач формування множини  $G_t(nj)$  операторів  $P_j^{\delta z}$  початком виконання на  $nj$ -му ярусі в момент часу  $t$ , у тому числі:

- оцінки вільного в момент часу  $t(nj)$  складу ресурсу (функціональних модулів різних типів – для варіанта апаратної реалізації моделі та кількості процесорів – для варіанта програмної реалізації моделі);
- вибору з безлічі операторів – кандидатів  $E_{nj}^c$  операторів  $P_j$  (у порядку зменшення пріоритетів) та перевірки наявності необхідного для виконання оператора  $P_j$  вільного ресурсу;
- призначення оператора  $P_j$  на відповідний ресурс та розрахунку моменту звільнення ресурсу після завершення виконання оператора.

#### 4. Розробка часової паралельної моделі алгоритму Гауса на основі Методу структур СЧС

Для Сі-програми розв’язання системи лінійних рівнянь (рис. 3) за допомогою «Синтезатора графів Сі-програм» і «Синтезатора паралельних моделей Сі – програм» автоматично синтезуються структури ВФС, СФС та часовий файл TF [6]. На основі цих файлів за допомогою програми «Автоматичний візуалізатор паралельних моделей та структур»[7] для «Методу структур СЧС» (рис. 1, рис. 2) та заданого ресурсу  $Rec_3$  процесорів синтезується графічна візуалізація паралельної часопараметризованої моделі (рис. 3).

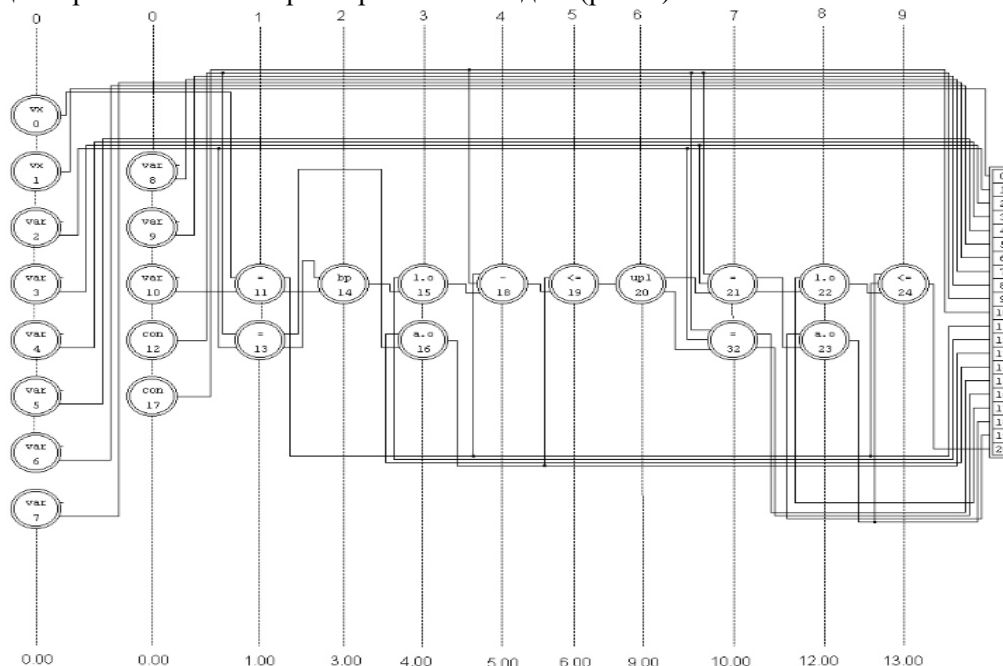


Рис. 3. Паралельна часова модель розв’язання систем лінійних рівнянь методом Гауса (початок).



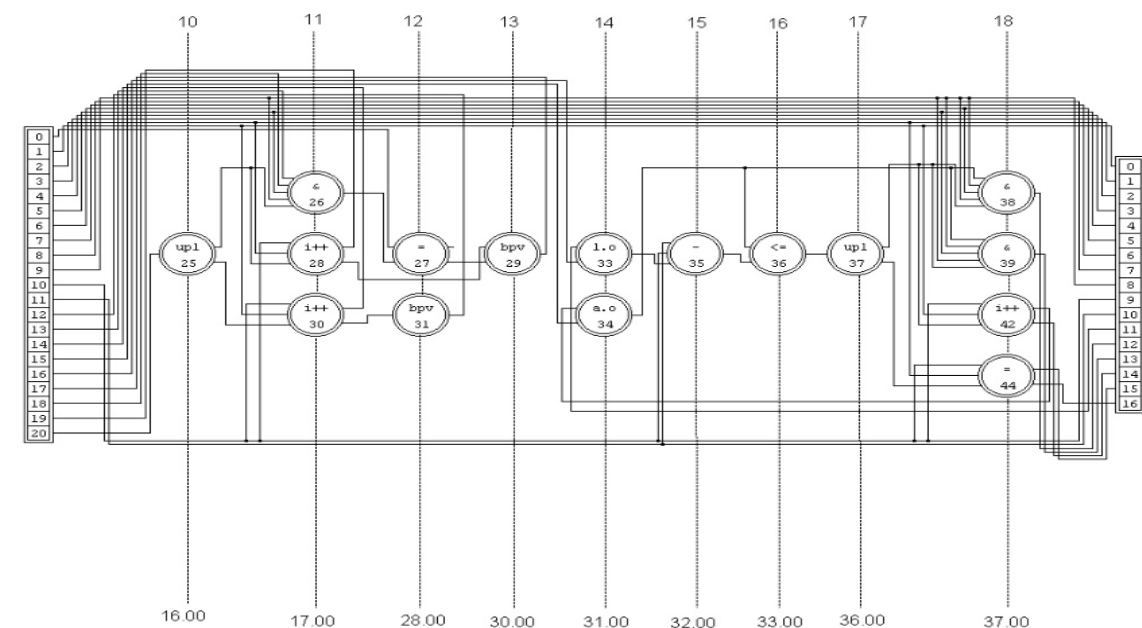


Рис. 3. Паралельна часопараметризована модель розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса (продовження 1).

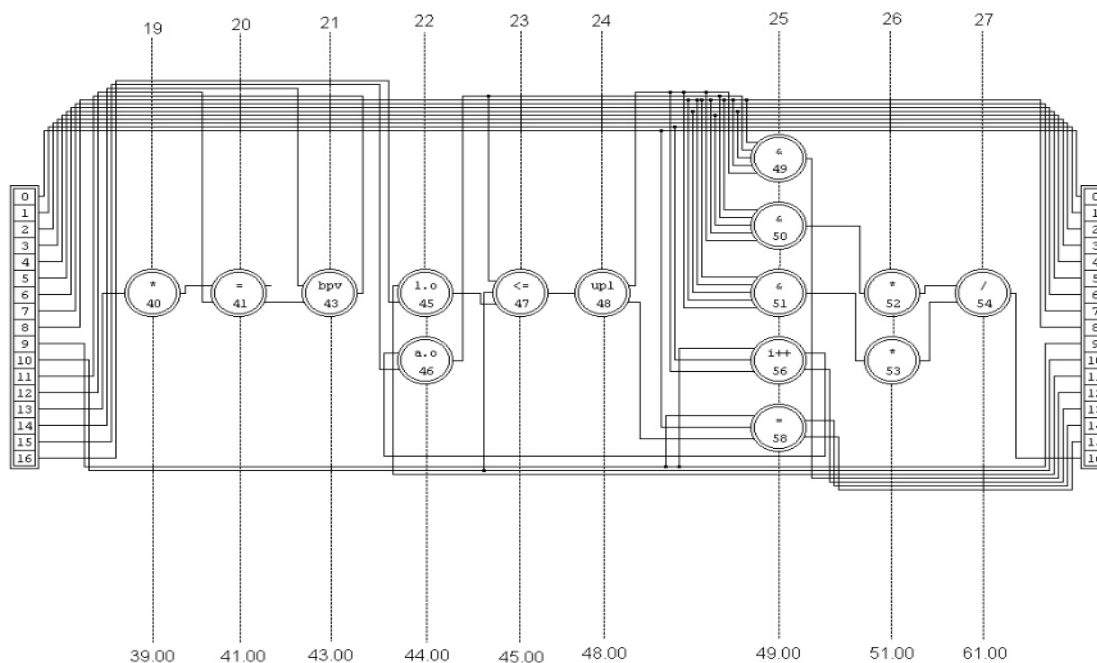


Рис. 3. Паралельна часопараметризована модель розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса (продовження 2).

Для скорочення обсягу матеріалу далі показані завершальні частини синтезованої паралельної часової моделі.

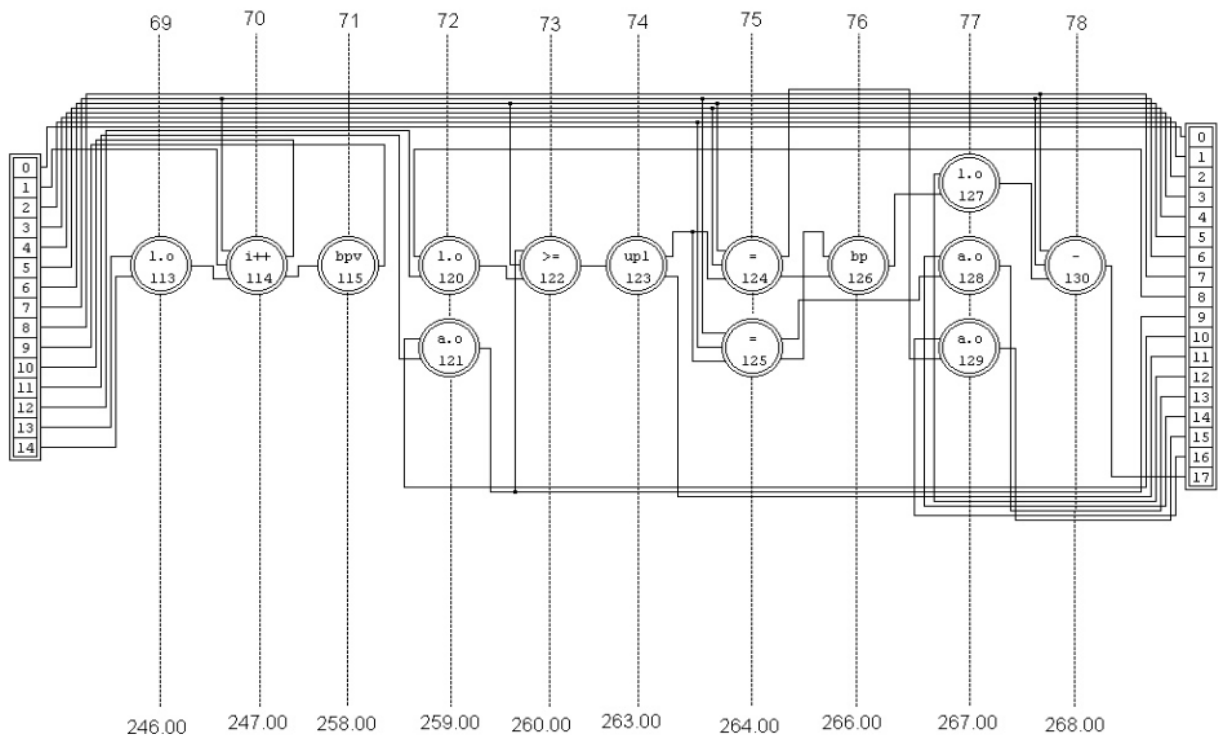


Рис. 3. Паралельна часопараметризована модель розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса (продовження 8).

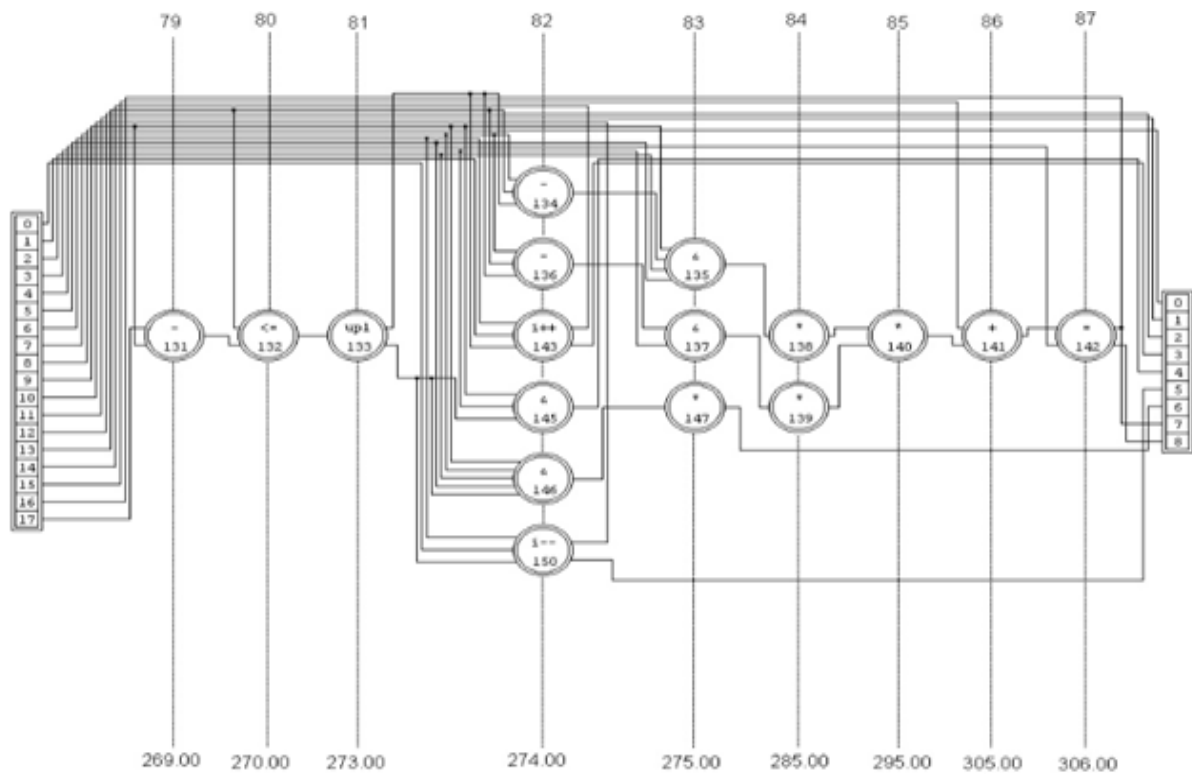


Рис. 3. Паралельна часопараметризована модель розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса (продовження 9).

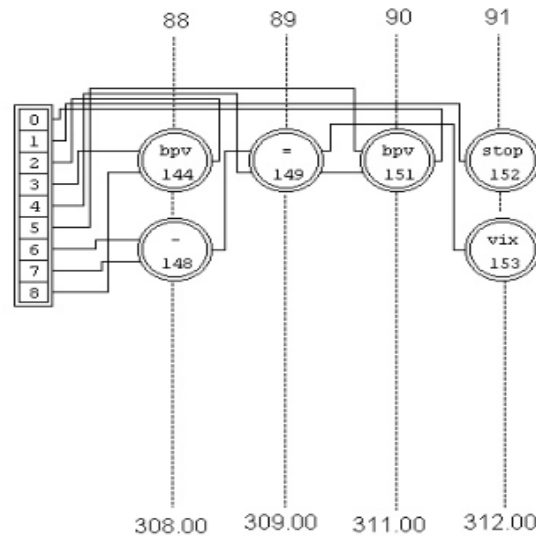


Рис. 3. Паралельна часопараметризована модель розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гауса (закінчення).

Аналіз структур СЧС та паралельної часопараметризованої моделі (рис. 3) показує, що модель має такі значення кількісних параметрів: число операторів – 153, кількість зв'язків операторів – 338, кількість часових ярусів – 91, час  $T$  виконання (у тактах) дорівнює 312.00, кількість обмінів повідомленнями (send-receive) між процесорами дорівнює 120.

### 5. Розробка часової паралельної моделі алгоритму Гауса на основі Методу структур СЧС та Формальних Поліномів

В основу фрагментації завдань із застосуванням формальних поліномів покладено виконання таких дій (рис. 5).

1. Синтез для задачі стисненого псевдочасового графа/Сі-графа.
  2. Формування для псевдочасового графа/Сі-графа безлічі формальних поліномів  $PL(X) = \{P^s(X)\}$  різних ступенів  $s$ ; тут  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – безліч формальних змінних,  $n$  – кількість вершин у стислому псевдочасовому графі задачі,  $s$  приймає значення  $s = 1, 2, \dots, n-1$ .
  3. Редукція (з метою спрощення) формальних поліномів  $P^s(X)$  різних ступенів  $s$  за рахунок виключення термів, що містять змінні ступенем  $s < 2$ .
  4. Формування з термів редукованих формальних поліномів, побудованих для кожного  $k$ -го ярусу стисненого псевдочасового графа/Сі-графа, множин "покриттів" вершин  $k$ -го ярусу (що містять всі вершини ярусу),  $k = 1, 2, \dots, sl$ ;  $sl$  – кількість псевдочасових ярусів у стиснутому псевдочасовому графі задачі.
  5. Оцінка складності кожного «покриття» вершин  $k$ -го псевдочасового ярусу та вибір варіанта покриття із мінімальною складністю.
  6. «Розширення» сформованих для попередніх псевдочасових ярусів (з номерами  $1, 2, \dots, k-1$ ) фрагментів шляхом включення до їх складу термів покриття, що має мінімальну складність.
- Різні етапи моделі фрагментації (рис. 5) виконують такі дії [6].

**Етап 1** (п. 2 рис. 4). Змістом етапу є побудова Сі-графа Сі-програми задачі. Побудова Сі-графа може виконуватися або вручну (за завданням розрахункових співвідношень), або автоматичному режимі за допомогою програми «Синтезатор графів Сі-програм» [4].

Отримана графічна специфікація задає кількість операторів  $P_j \subset P$  у задачі, склад типів операторів та сполучено – зовнішні зв'язки за даними та з управління між операторами  $P_j$  задачі.

**Етап 2** (п. 3 рис. 4). Змістом етапу є перетворення Сі-графа задачі в стислий псевдочасовий граф, що виконується в припущенні однакового (рівного умовній одиниці) часу  $t_j^0$  виконання операцій/функцій  $P_j \subset P$  різних типів. Тим самим досягається розподіл Сі-графа на псевдочасові «шари»  $SL(k)$  вершин,  $k = 1, 2, \dots, sl$ .



Рис.4. Модель фрагментації задач із застосуванням структур СЧС та формальних поліномів.

**Етап 3** (п. 4,5 рис. 4) забезпечує формування кожного шару  $SL(k)$  псевдочасової моделі задачі ( $k = 1, 2, \dots, sl$ ; де  $sl$  – кількість ярусів псевдочасового графа задачі) набору  $PL(k)$  формальних поліномів. До складу  $PL(k)$  входять поліноми  $P^s(k)$ , що мають значення ступеня  $s = 1, 2, \dots, n_k - 1$

(де  $n_k$  – кількість вершин у  $k$ -му шарі  $SL(k)$ ). У цьому об’єднанні (за  $s$ ) наборів  $P^s(k)$  має містити усі вершини  $k$  – го шару  $SL(k)$ :  $\sum_{s=1}^{n_k} P^s(k) = SL(k)$ .

**Етап 4** (п. 6 рис. 4). До етапу є формування для  $k$ -го ярусу  $SL(k)$  ( $k = 1, 2, \dots, sl$ ) множини  $C(k, r)$  «покриттів» - сукупності підмножин різної потужності операторів  $P_j$  шару  $SL(k)$ , об’єднання яких містить («покриває») усі оператори  $k$ -го ярусу. Це завдання вирішується методом підбору з термів редукованих поліномів  $k$ -го ярусу підмножин термів, об’єднання яких «накриває» всі вершини ярусу, що розглядається. При розв’язанні задачі фрагментації цей етап циклічно виконується для кожного з ярусів псевдочасового графа задачі, кількість повторень циклу визначається числом ярусів  $sl$  у графі задачі.

**Етап 5** (п. 7, 8, 9 рис. 4). Зміст етапу складає вирішення наступних задач:

1. Розрахунок складності вершини (оператора  $P_j$ ) при її включенні в один із формованих фрагментів  $\Phi(s)$ ,  $s = 1, 2, \dots, p$ . (складність вершини  $P_j$  дорівнює нулю, якщо використовує її результат вершина  $P_i$  належить тому ж фрагменту, інакше – кількості зовнішніх – для цієї вершини  $P_j$  – вершин інших фрагментів).

2. Оцінка складності  $Q(k, r)$  кожного  $r$  – го «покриття»  $C(k, r)$  вершин  $k$ -го ярусу  $SL(k)$  ( $k = 1, 2, \dots, sl$ ). «Складність  $Q(k, r)$  покриття  $Q(k, r)$ » поточного фрагмента  $\Phi(p)$  визначається як сумарна кількість «зовнішніх» зв’язків операторів  $P_j$  покриття, що розглядається (які належать поточному фрагменту) з операторами  $P_j$ , включеними раніше до складу інших фрагментів  $\Phi(s)$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , та  $s \leq p$ .

3. Вибір оптимального варіанта покриття  $C(k, r)_{opt}$  вершин  $k$ -го ярусу, що має мінімальну складність  $Q(k, r)_{opt} = \min Q(k, r)$  та включення його операторів до складу поточного фрагмента  $\Phi(p)$ .

4. Корекція складу операторів  $P_j$  формованих фрагментів  $\Phi(s)$ , корекція поточних значень їх складнощів  $Q(s)$ ,  $s = 1 \dots p$ , видача (при завершенні циклу за кількістю  $sl$  ярусів псевдочасового графа/Сі-графа задачі) результатів статичної фрагментації.

Результати виконання етапів 1 і 2 моделі фрагментації задач (рис. 4) – псевдочасовий Сі-граф моделі алгоритму Гауса (рис. 5).

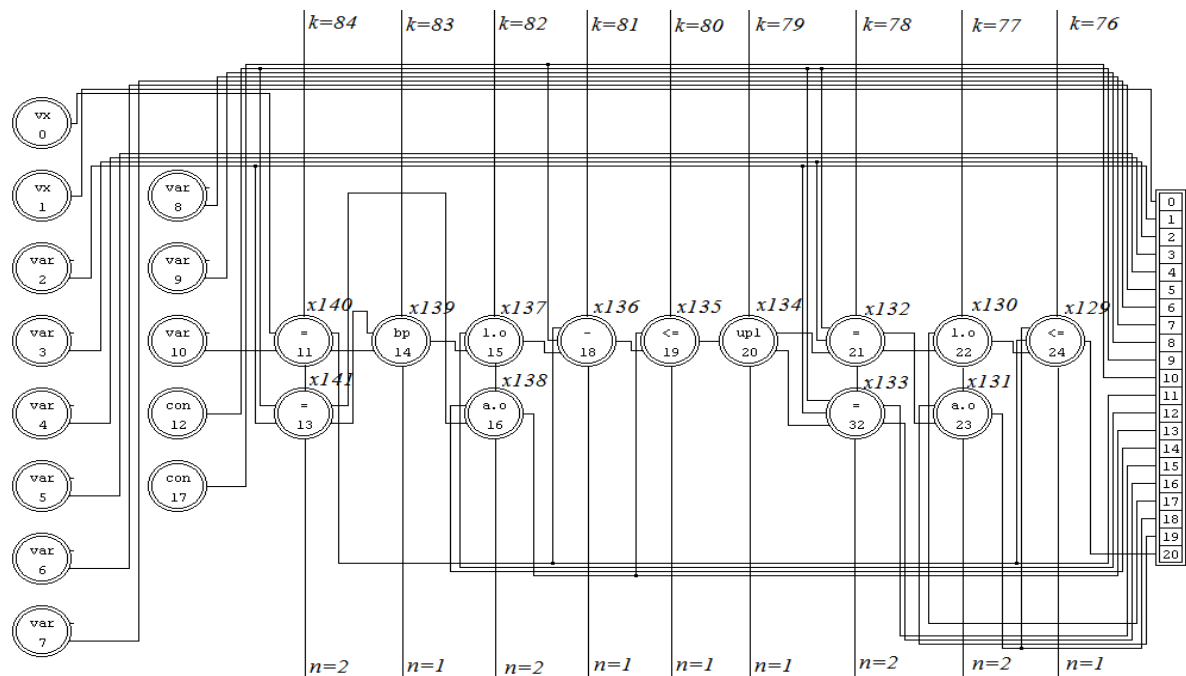


Рис. 5. Сі-граф моделі Сі-програми алгоритму Гауса (початок)

Прийняті на рис. 5 позначення:  $k$  – номер шару Сі-графа,  $n$  – кількість операторів, що належать конкретному шару («потужність» шару),  $x_j$  – ім’я змінної формального полінома, що поставлена у взаємно однозначну відповідність оператору з номером  $j$  Сі-графа .

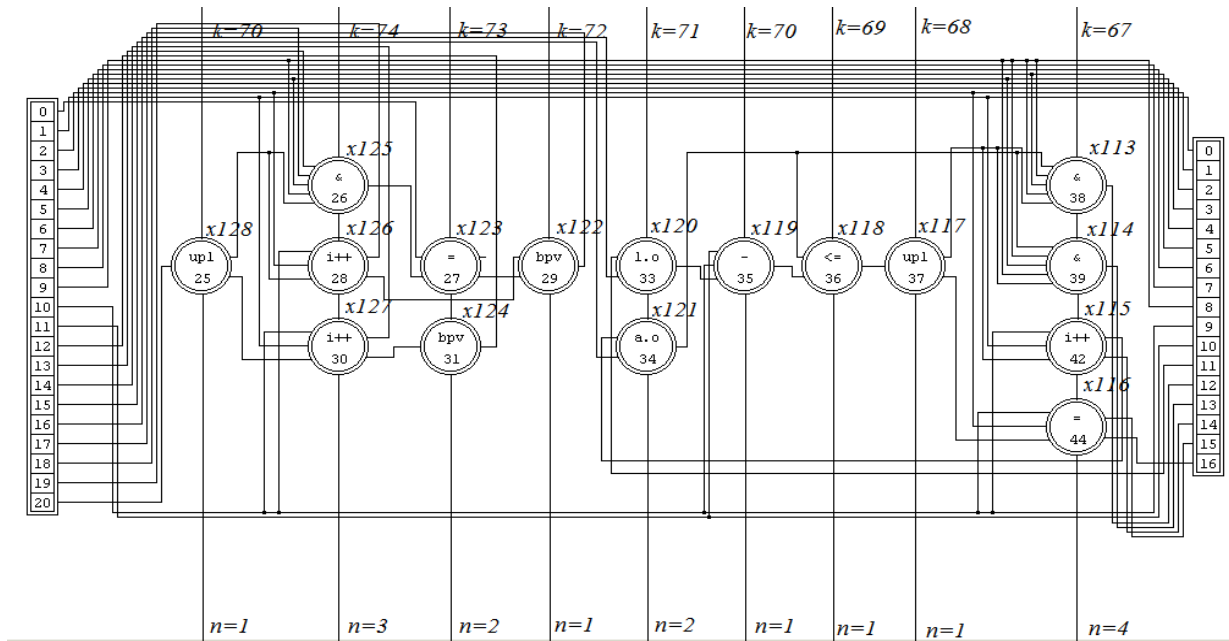


Рис. 5. Сі-граф моделі Сі-програми алгоритму Гауса (продовження 1)

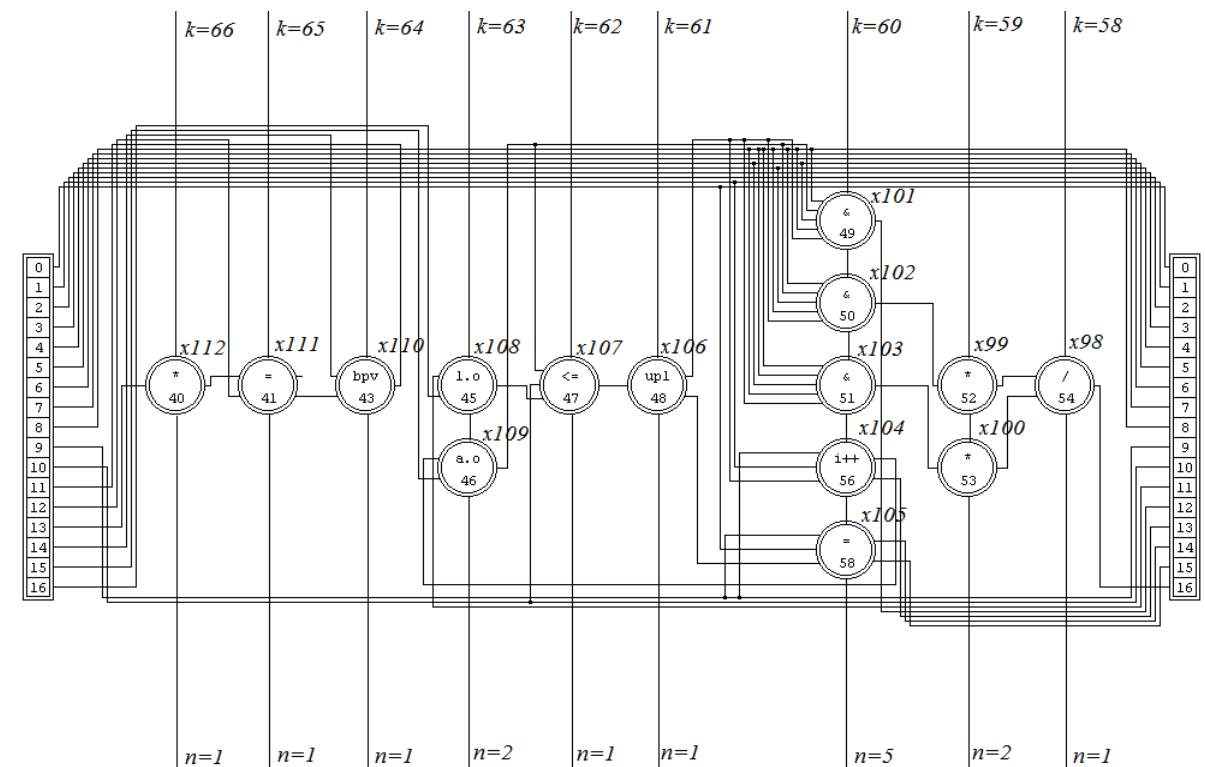


Рис. 5. Сі-граф моделі Сі-програми алгоритму Гауса (продовження 2)

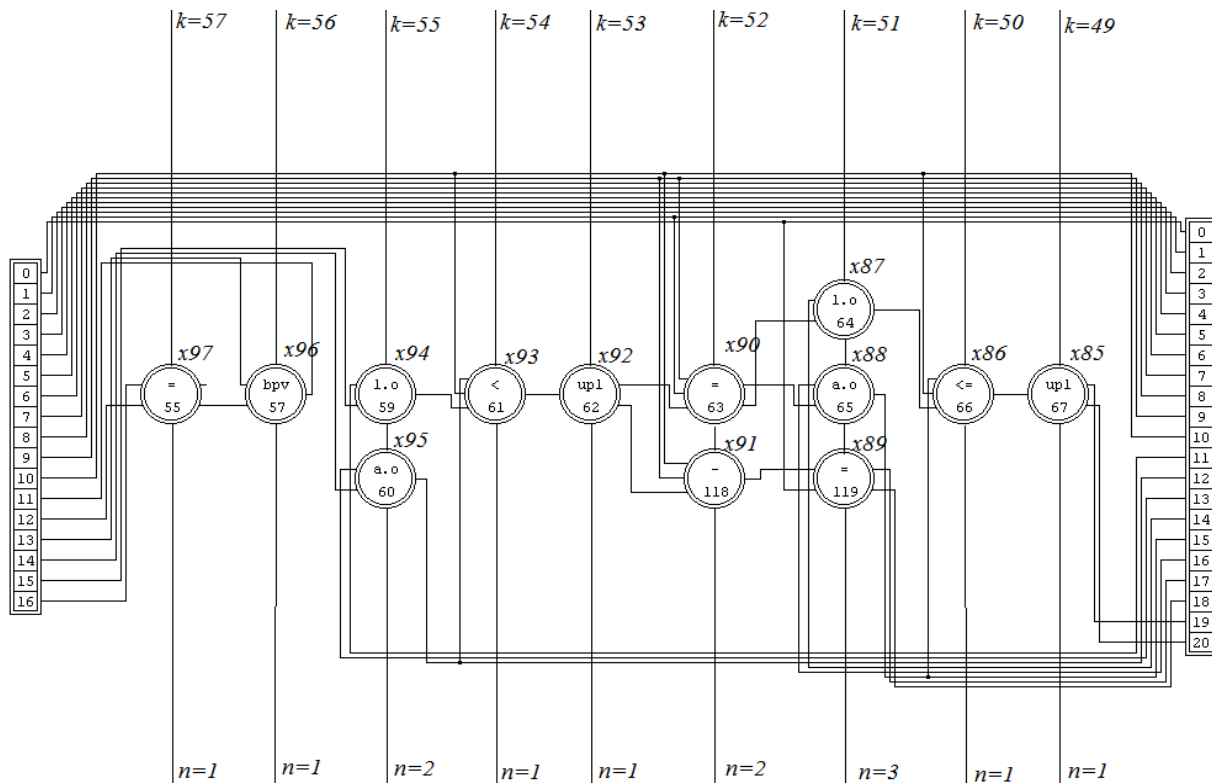


Рис. 5. Si-граф моделі Si-програми алгоритму Гауса (продовження 3)

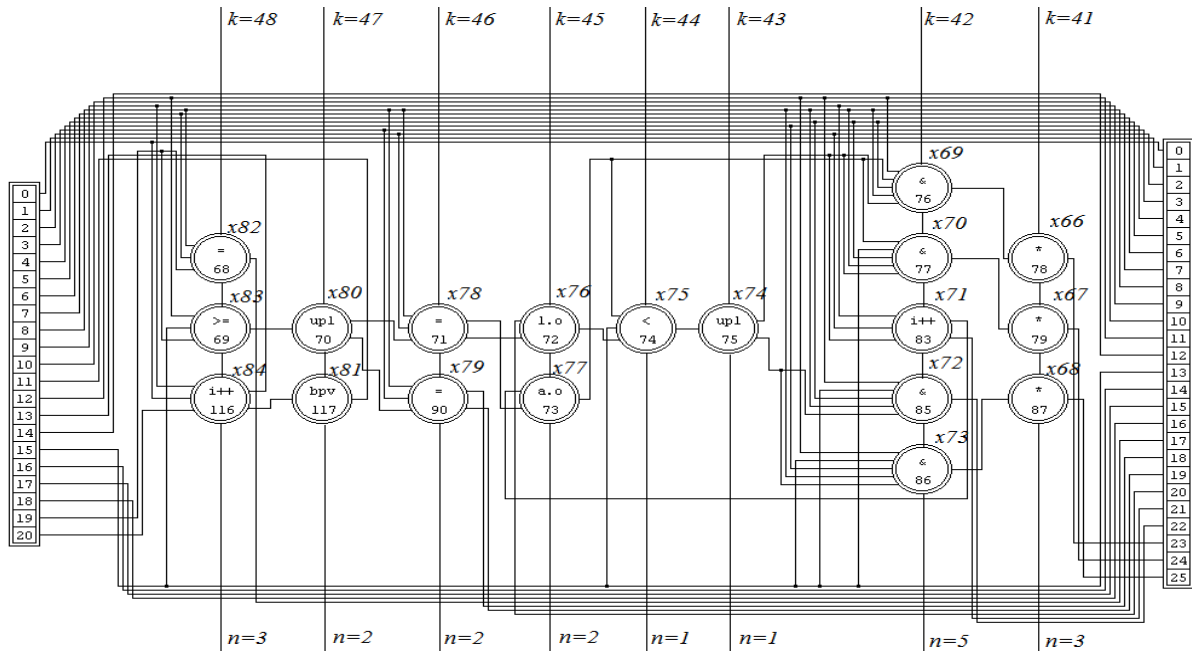


Рис. 5. Si-граф моделі Si-програми алгоритму Гауса (продовження 4)

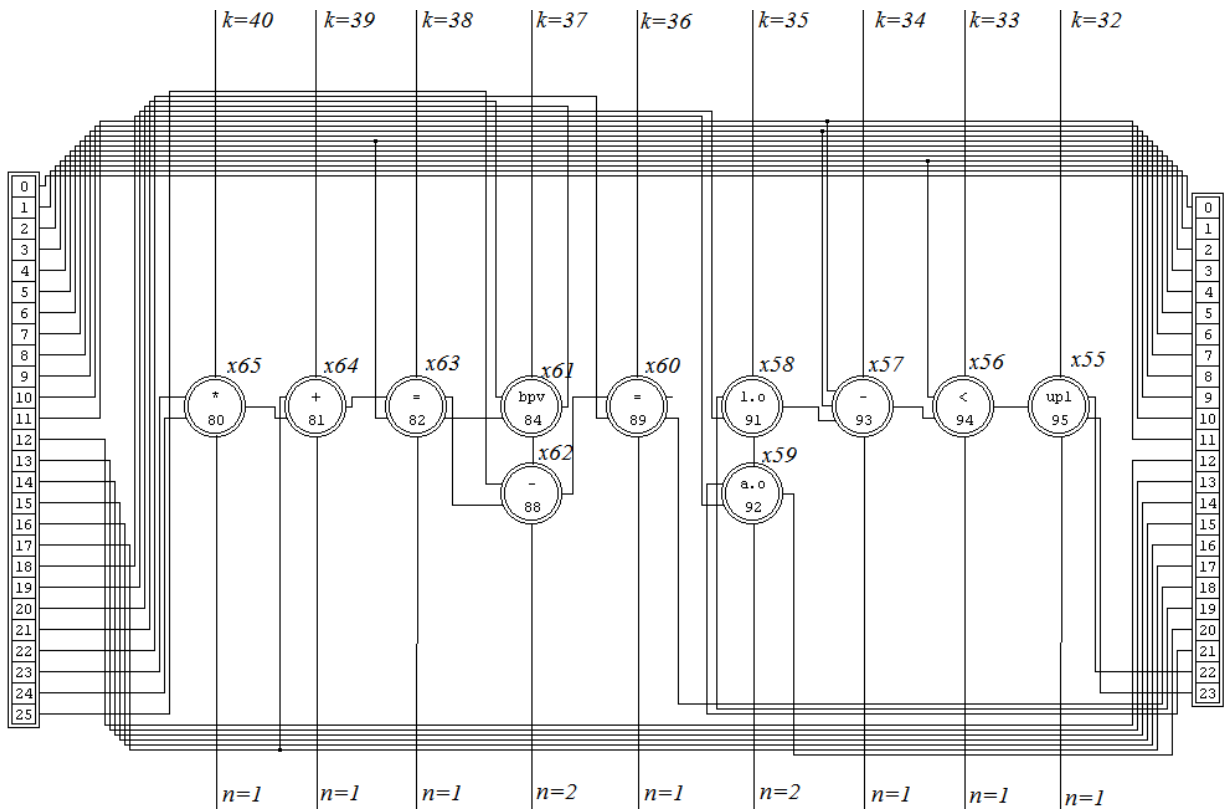


Рис. 5. Сі-граф моделі Сі-програми алгоритму Гауса (продовження 5)

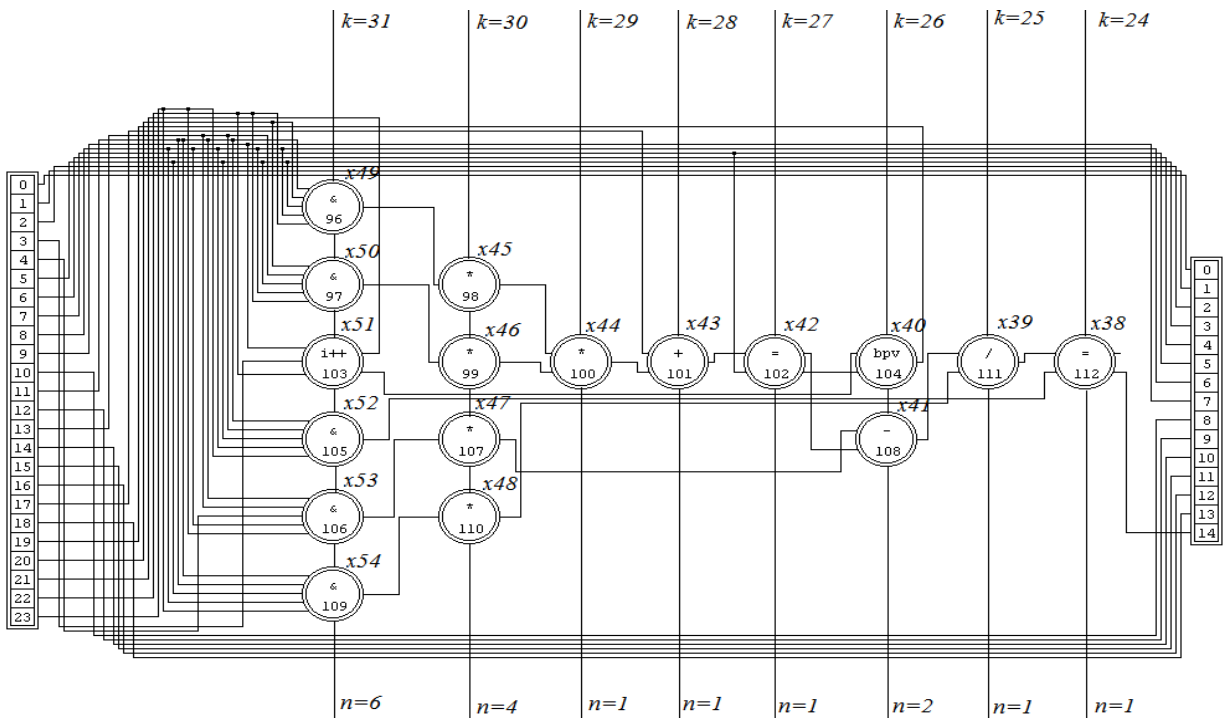


Рис. 5. Сі-граф моделі Сі-програми алгоритму Гауса (продовження 6)



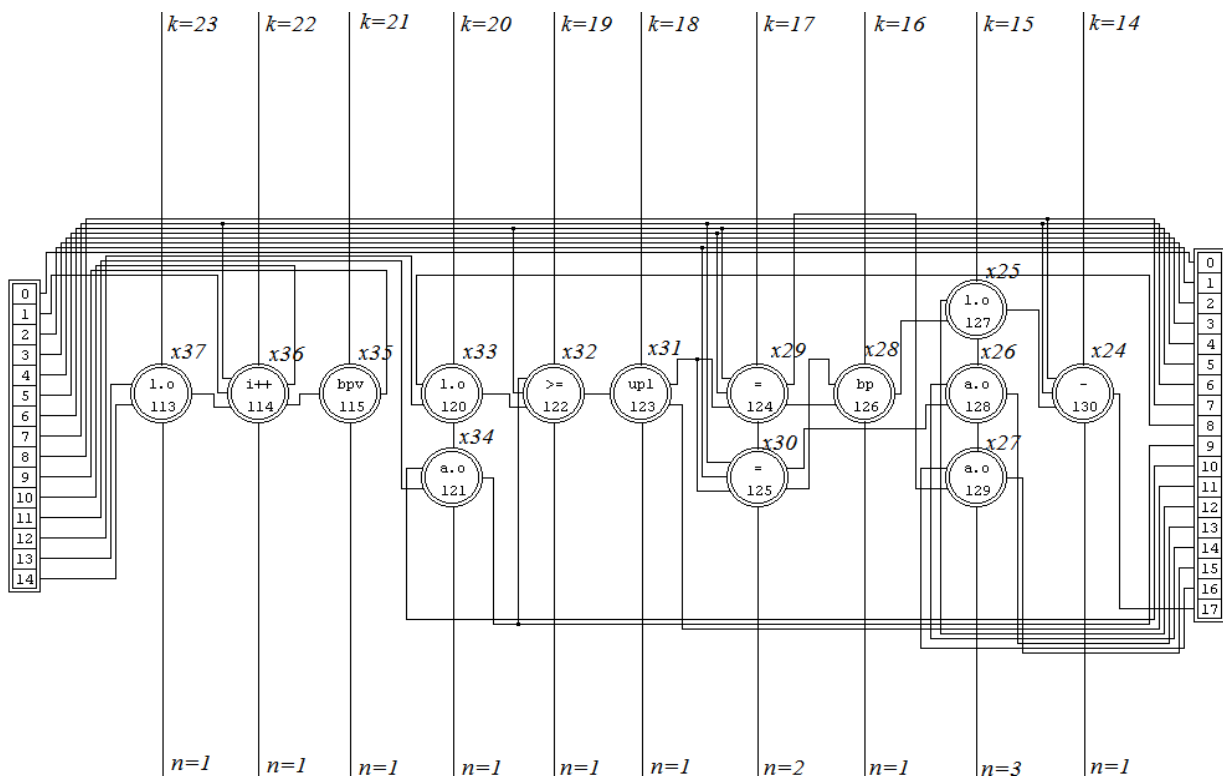


Рис. 5. Сі-граф моделі Сі-програми алгоритму Гауса (продовження 7)

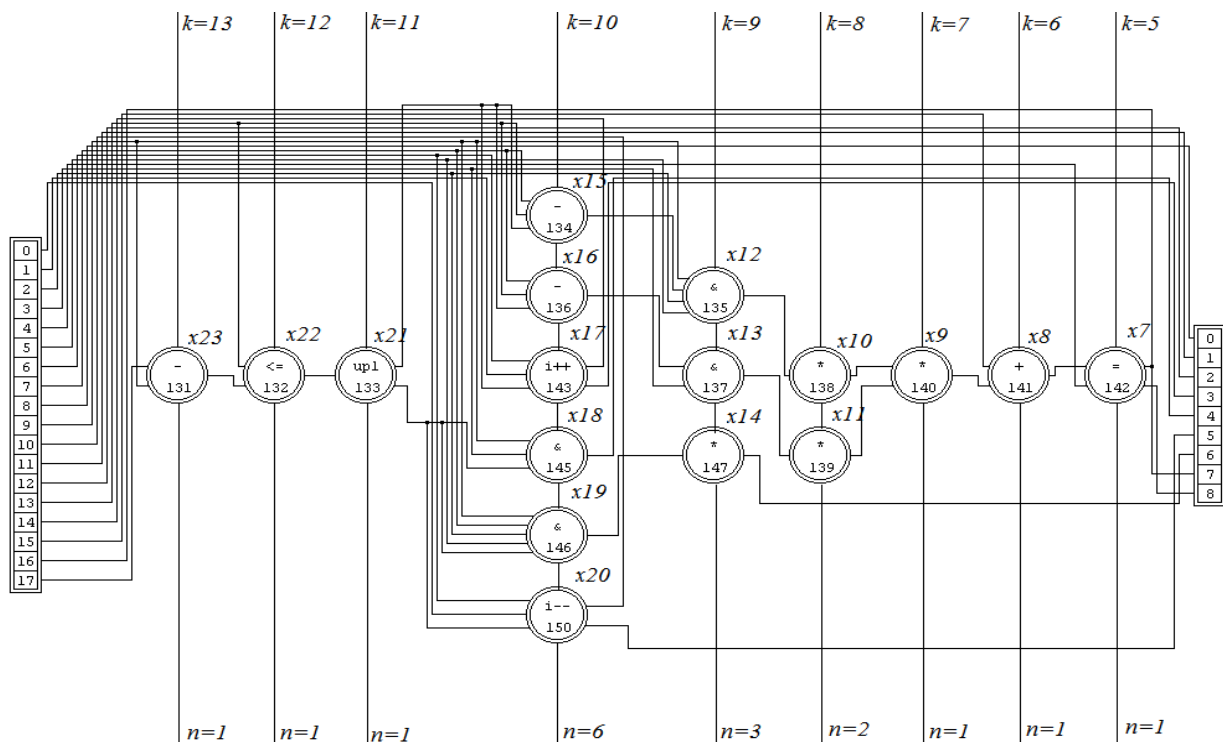


Рис. 5. Сі-граф моделі Сі-програми алгоритму Гауса (продовження 8)

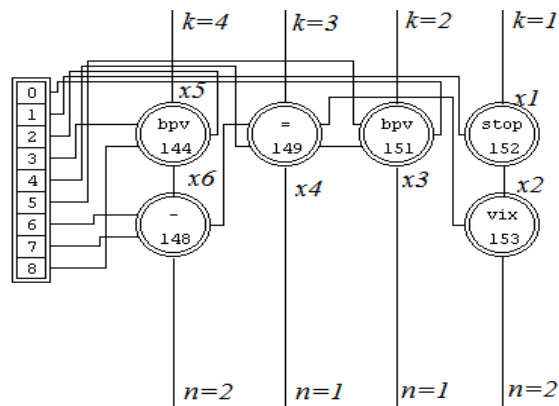


Рис. 5. Сі-граф моделі Сі-програми алгоритму Гауса (закінчення)

Отримані під час використання «Методу структур СЧС і Формальних Поліномів» результати мають такі значення кількісних параметрів: число операторів – 153, кількість зв’язків операторів – 338, число часових ярусів – 91, час Т виконання (у тактах) псевдочасового Сі-графа моделі дорівнює 91.00, кількість обмінів даними між процесорами дорівнює 90 та, отже, зменшення кількості обмінів повідомленнями становить 25% (рис.6).

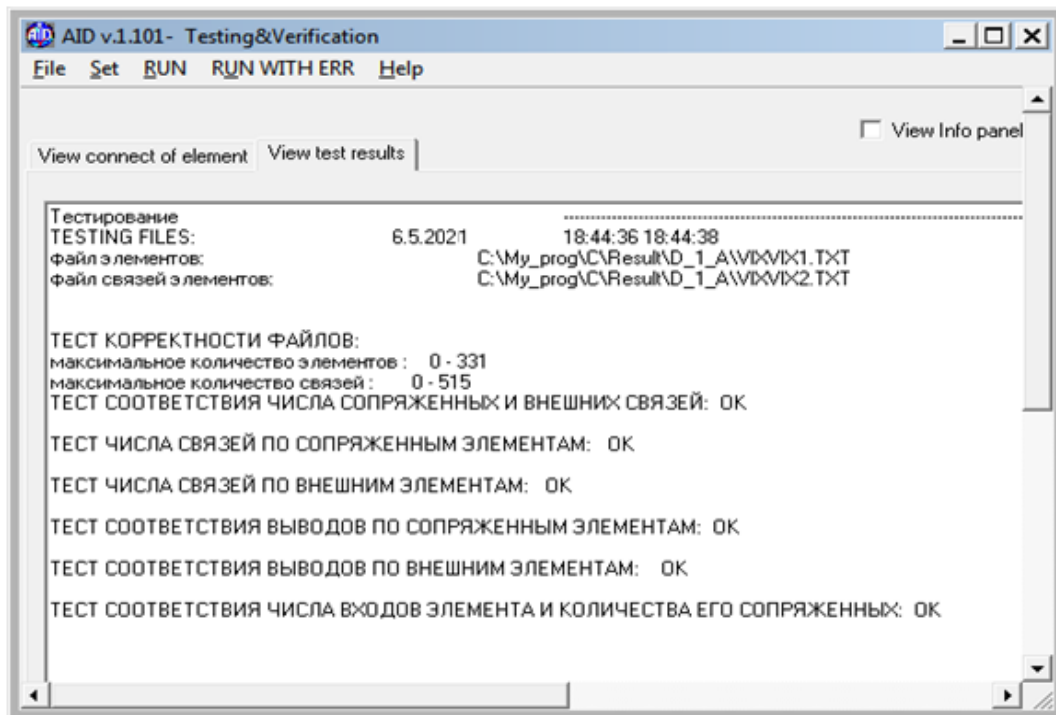


Рис. 6. Результати верифікації складу операторів та його зв’язків у Сі-програмі алгоритму Гауса.

## 6. Висновки.

Можливість практичної реалізації в кластерних системах паралельних часопараметризованих моделей вимагає введення до складу моделей операторів обміну повідомленнями (send-receive). Розроблено програму, що забезпечує автоматичне «розширення» структур СЧС вихідних часових моделей шляхом включення до їх складу операторів (send-receive) та замикання їх зв’язків з операторами вихідних моделей та синтез структур СЧС кластерної моделі. Розроблена програма розширює можливості створення систем автоматичного синтезу паралельних часопараметризованих програм для кластерних систем.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Гергель, В.П., Стронгин, Р.Г. Основы параллельных вычислений для многопроцессорных вычислительных систем. Учебное пособие. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2003. 184 с. <http://window.edu.ru/catalog/pdf2txt/069/24069/6579>
2. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 608 с. <https://www.twirpx.com/file/159421/>
3. Немнюгин С. Модели и средства программирования для многопроцессорных систем. СПб. : С. Петербургский ГУ, 2010. - 100 с. <https://www.twirpx.com/file/456084/>
4. Хьюз К., Хьюз Т. Параллельное и распределенное программирование на C++.: Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. 672с. <https://unotices.com/books-u/148623/4>
5. Толстолужская Е. Г. Синтез времяпараметризованных моделей управления параллельными вычислительными процессами циклических задач / Е. Г. Толстолужская, Ю. А. Артюх // Радиоэлектронні і комп'ютерні системи. 2012. № 6. С. 64–69. [http://nbuv.gov.ua/UJRN/recs\\_2012\\_6\\_14](http://nbuv.gov.ua/UJRN/recs_2012_6_14).
6. Синтез и анализ параллельных процессов в адаптивных времяпараметризованных вычислительных системах : монография / Г. А. Поляков, С. И. Шматков, Е. Г. Толстолужская, Д. А. Толстолужский. Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2012. 672 с. <http://mlge.cordon.in.ua/knyga/sintez-i-analiz-parallelnyh-processov-v-adaptivnyh-vremyaparametrizovannyh-vychislitelnyh>
7. Толстолужская Е. Г., Паршенцев Б. В. Исследование возможности параллельной обработки больших объемов данных на основе "Cloud computing". Наука і техніка Повітряних Сил Збройних Сил України. 2015. № 2(19). С. 118–121. <http://www.hups.mil.gov.ua/periodic-app/article/806>

## REFERENCES

1. V. P. Gergel , R. G. Strongin. Fundamentals of parallel computing for multiprocessor computing systems. Tutorial. Nizhny Novgorod: Publishing House of the UNN named after. N. I. Lobachevsky, 2003. 184 p. [in Russian] <http://window.edu.ru/catalog/pdf2txt/069/24069/6579>
2. V. V. Voevodin, Vl. B. Voevodin/ Parallel computing. St. Petersburg: BHV-Peterburg, 2002. 608p. [in Russian] <https://www.twirpx.com/file/159421/>
3. S. Nemnyugin. Models and programming tools for multiprocessor systems. SPb. :C. Petersburg State University, 2010. - 100 p. . [in Russian] <https://www.twirpx.com/file/456084/>
4. K. Hughes, T. Hughes Parallel and distributed programming in C++.: Per. from English. M.: Williams Publishing House, 2004. 672p. [in Russian] <https://unotices.com/books-u/148623/4>
4. E. G. Tolstoluzhskaya. Synthesis of time-parameterized control models for parallel computing processes of cyclic problems / E. G. Tolstoluzhskaya, Yu. A. Artyukh // Radio electronic and computer systems. 2012. No. 6. P. 64–69. [in Russian] [http://nbuv.gov.ua/UJRN/recs\\_2012\\_6\\_14](http://nbuv.gov.ua/UJRN/recs_2012_6_14)
5. Synthesis and analysis of parallel processes in adaptive time-parameterized computing systems: monograph / G. A. Polyakov, S. I. Shmatkov, E. G. Tolstoluzhskaya, D. A. Tolstoluzhsky. Kh. : V. N. Karazin KhNU, 2012. 672p. [in Russian] <http://mlge.cordon.in.ua/knyga/sintez-i-analiz-parallelnyh-processov-v-adaptivnyh-vremyaparametrizovannyh-vychislitelnyh>
6. E. G. Tolstoluzhskaya, B. V. Parshentsev. Investigation of the possibility of parallel processing of large amounts of data based on "Cloud computing". Science and technology of the Defense Forces of the Defense Forces of Ukraine. 2015. No. 2(19). P. 118–121 [in Russian] <http://www.hups.mil.gov.ua/periodic-app/article/806>