

УДК 001.891.572+004.942

Аналіз «великих даних» і математичне моделювання епідемії covid-19 в країнах Європи

Д.А. Кулик, Є.П. Куркчі, Н.М. Кізілова

**Кулик
Дар'я Андріївна**

студентка, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: kulykdar@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-4929-1745>

**Куркчі
Єлизавета Павлівна**

студентка, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: kurkchi1998@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0003-3738-0978>

**Кізілова
Наталія Миколаївна**

д.ф.-м.н., професор; професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: n.kizilova@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-9981-7616>

Досліджуються закономірності динаміки пандемії covid-19 в Україні та інших країнах Європи з використанням методів аналізу «великих даних» у вигляді часових рядів та супутньої інформації з відкритих онлайн джерел. Статистичний аналіз згладжених кривих нових випадків захворювання $I(t)$, померлих $D(t)$, одужалих $R(t)$ та інших часових рядів виявляє різні типи динаміки: хвильову (i), квазіхвильову зі зсувом за часом (ii), східчасту (iii), з аномально високими або низькими амплітудами локальних коливань. За допомогою метода найближчого сусіда побудовані відповідні дерева подібності, в які країни з різними типами динаміки (i,ii,iii) входять у групах. На основі популярної математичної моделі SIRS досліджена стійкість нульової та ненульової стаціонарних точок. Отримані розв'язки лінеаризованої системи та досліджений вплив параметрів моделі на власні значення матриці системи. Показана наявність різних типів динаміки: з трьома негативними дійсними (а), одним позитивним дійсним (б), одним дійсним і парю комплексно спряжених (в) власних значень. Побудовані фазові портрети і показаний зв'язок типів часових рядів (i,ii,iii) і розв'язків (а,б,в) системи рівнянь моделі SIRS. Отримані результати дозволяють на основі аналізу часових рядів на даний момент оцінити динамічну поведінку системи, її стійкість або нестійкість з можливістю появи хаотичної динаміки.

Ключові слова: математична епідеміологія, covid-19, аналіз «великих даних», фазовий портрет, стійкість.

Analysis of "big data" and mathematical modeling of the covid-19 epidemic in Europe

Kulyk Daria

student
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

Kurkchi Yelizavieta

student
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

Kizilova Nataliya

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Professor of the Department of Applied Mathematics
V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

The regularities of the dynamics of the covid-19 pandemic in Ukraine and other European countries are studied by using the methods of analyzing "big data" in the form of time series and related information from open online sources. Statistical analysis of smoothed curves of new cases $I(t)$, dead $D(t)$, recovered $R(t)$ and other time series has shown different types of dynamics: wave (i), quasi-wave with time shift (ii), stepwise (iii), with abnormally high or low amplitudes of local oscillations. The appropriate similarity trees have been constructed by using the nearest neighbor method. It is shown that the countries with different types of dynamics (i, ii, iii) are located in separate branches of the trees. The stability of zero and nonzero stationary points have been investigated on the basis of the popular mathematical model SIRS. The solutions of the linearized system have been obtained and the influence of the model parameters on the eigenvalues of the system matrix has been investigated. The presence of different types of dynamics is shown: with three negative real (a), one positive real (b), one real and a pair of complex

conjugate(c) eigenvalues. The phase portraits have been constructed and the connection of the types of time series (i, ii, iii) and solutions (a, b, c) of the SIRS equations is shown. The obtained results allow us to estimate the dynamic behavior of the system, its stability or instability with the possibility of chaotic dynamics on the basis of the analysis of time series on any current day.

Keywords: *mathematical epidemiology, covid-19, Big Data analysis, harmonic analysis, phase portrait, stability.*

Анализ «больших данных» и математическое моделирование эпидемии covid-19 в странах Европы

Кулик Дарья Андреевна	<i>студентка, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 6, Харків-22, Украина, 61022</i>
Куркчи Елизавета Павловна	<i>студентка, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 6, Харків-22, Украина, 61022</i>
Кизилова Наталья Николаевна	<i>д.ф.-м.н., профессор; профессор кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 6, Харків-22, Украина, 61022</i>

Исследуются закономерности динамики пандемии covid-19 в Украине и других странах Европы с использованием методов анализа «больших данных» в виде временных рядов и сопутствующей информации из открытых онлайн источников. Статистический анализ сглаженных кривых новых случаев заболевания $I(t)$, умерших $D(t)$, выздоровевших $R(t)$ и других данных выявил разные типы динамики: волновую (i), квазиволновую со смещением по времени (ii), ступенчатую (iii), с аномально высокими или низкими амплитудами локальных колебаний. С помощью метода ближайшего соседа построены соответствующие деревья подобности, в которые страны с разными типами динамики (i,ii,iii) входят отдельными группами. На основе популярной математической модели SIRS исследована устойчивость нулевой и ненулевой стационарных точек. Получены решения линеаризованной системы и исследовано влияние параметров модели на собственные значения матрицы системы. Показано наличие различных типов динамики: с тремя отрицательными действительными (а), одним положительным действительным (б), одним действительным и парой комплексно сопряженных (в) собственных значений. Построены фазовые портреты и показана связь типов временных рядов (i,ii,iii) и решений (а,б,в) системы уравнений модели SIRS. Полученные результаты позволяют на основе анализа временных рядов оценить динамическое поведение системы, ее устойчивость или неустойчивость с возможностью появления хаотической динамики.

Ключевые слова: *математическая эпидемиология, covid-19, анализ «больших данных», фазовый портрет, устойчивость.*

1 Вступ

Майже два роки відслідкування динаміки розповсюдження пандемії covid-19 в більш ніж 220 країнах та окремих регіонах (острови, випадки на океанських лайнерах, міста з особливим статусом) дозволяють стверджувати, що наведені на багатьох відкритих онлайн ресурсах [1,2] результати щоденних вимірювань числа захворілих (I , infected), одужалих (R , recovered), померлих (D , dead) та низки інших показників відносяться до «великих даних (BigData), оскільки задовольняють головному критерію VVV (volume, velocity, variety) [3]. Окрім зростання об'єму даних, спостерігається додавання з прискореною швидкістю нових часових рядів, таких як кількість вакцинованих (V , vaccinated), тестованих (T , tested), самоізолюваних (Q , quarantined), госпіталізованих (H , hospitalized), а також коефіцієнту інфікування (R_0 , infection rate, тобто середньої кількості осіб, яку інфікує одна хвора особа), показників розвинення країни і т.д. Такі масиви даних дозволяють виявляти нову важливу інформацію методами обробки «великих даних». Був досліджений можливий вплив соціально-економічних факторів на динаміку пандемії в країні [4], показана наявність подібної динаміки у країн-сусідів [5]. Порівняльний аналіз вимірних кривих показує, що динамічна поведінка розповсюдження covid-19 відрізняється в різних країнах (Рис.1). Для цілей статистичного аналізу криві осереднюють методом віконця, яке прослизає, шириною в 7 діб, що дозволяє згладити випадкові коливання і виявити лінію тренду. Так, в ряді країн спостерігається класична для математичної епідеміології [6] хвильова картина з чіткими максимумами і мінімумами (практично до незначних величин) кривих $I(t)$, $D(t)$ (Рис.1а). Однак найчастіше окремі хвилі «наповзають» одна на одну (Рис.1б) і не завжди зрозуміло, це друга хвиля переходить в третю, або це продовження другої хвилі. У окремих випадках спостерігається незначне зниження значень $I(t)$, $D(t)$, яке швидко переходить до нового максимуму і поступовим зростанням мінімальних значень (Рис.1в).

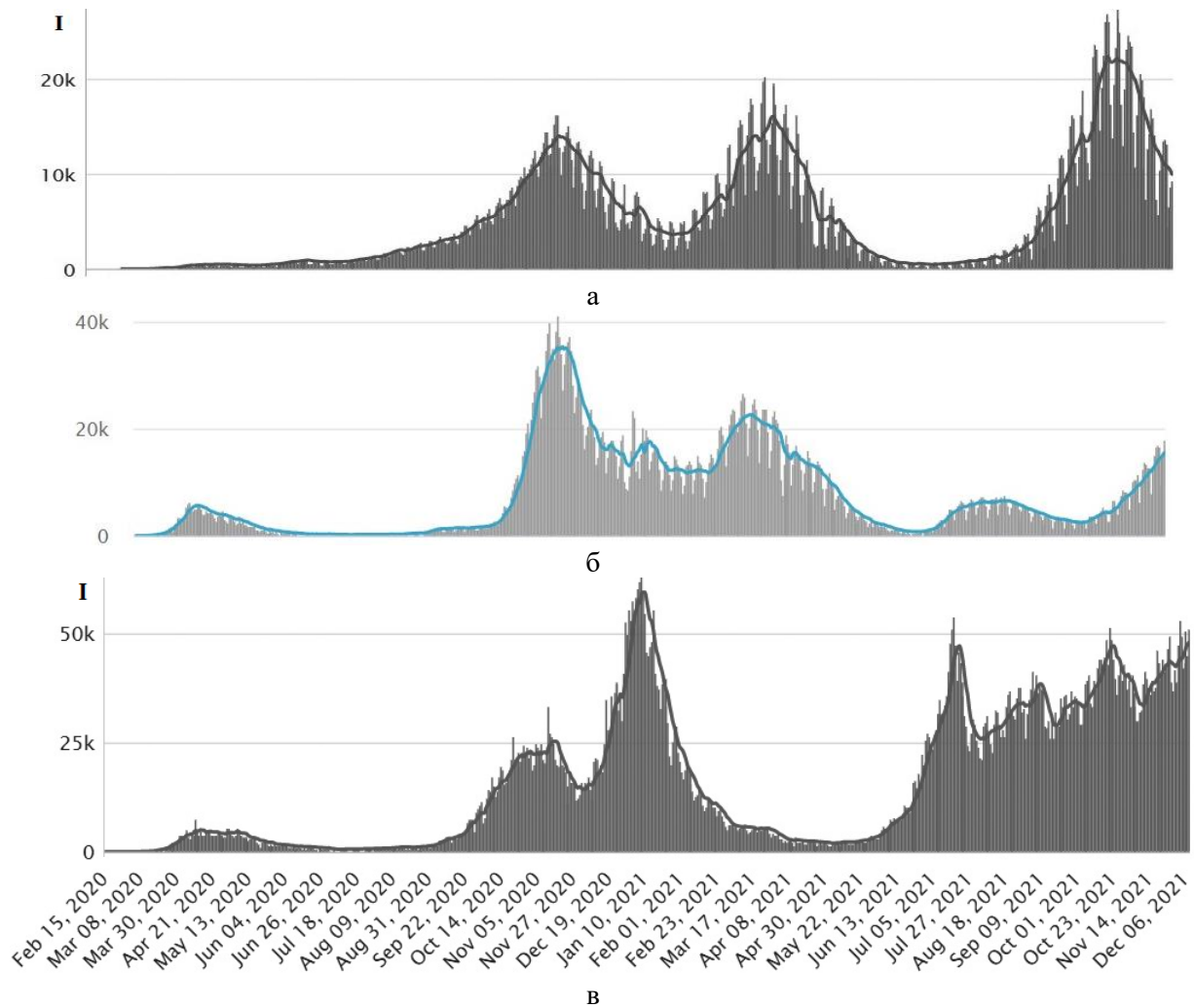


Рис.1 Різні типи динамічної поведінки часових рядів $I(t)$ в Україні (а), Італії (б), Великобританії (в); k позначає 10^3 (кіло-).

Для зрозуміння причин різних типів розповсюдження захворювання потрібний більш детальний аналіз часових рядів методами «великих даних» і вивчення властивостей розв'язків відповідних математичних моделей, що складає ціль даного дослідження.

2 Статистичний аналіз часових рядів

Вихідні дані у вигляді часових рядів $I_j(t)$, $D_j(t)$, $R_j(t)$, та ін., де $j=1,2,\dots,n$ – порядковий номер країни, згладжувалися. Проводилася загальна описова аналітикою В кожному з рядів виділялися лінії тренду і осциляції [5]. Остання компонента досліджувалася за допомогою спектрального аналізу. Оскільки відповідні імовірнісні розподілення не відповідали Гаусовому, замість розрахунків коваріацій і кореляційного аналізу був використаний метод найближчого сусіда. Для кожної з пар кривих $(X_j(t), X_k(t))$, де j і k – номери з початого набору з n країн, $X(t)$ – часові ряди одного типу (захворілі, померлі, і т.д.) обчислювалася відстань $D(X_j, X_k)$ між ними у декартовій метриці

$$D(X_j, Y_k) = \left(N^{-1} \sum_{m=1}^N (X_j(t_m) - Y_k(t_m))^2 \right)^{1/2}, \quad (1)$$

де N – число днів спостережень або довжина часових рядів.

Пара країн з мінімальною серед усіх облічених відстанню замінювалася на новий часовий ряд $\{X_{jk}(t_m)\}_{m=1}^N = \{X_j(t_m) - X_k(t_m)\}_{m=1}^N$, після чого процедура обчислень відстаней для всіх пар зі списку $n-1$ країн повторювалась. Після кожної ітерації кількість країн зменшувалася на одну. По закінченню ітерацій за (1) генерувалося дерево найближчих сусідів, яке відповідало найбільш

подібним кривим динаміки епідемії в країнах. На Рис.2 наведений результат розрахунків для часових рядів $I_j(t)$ країн Європи. Таким чином, на відміну від візуальної оцінки подібності динаміки у вигляді кількості і структури окремих хвиль (Рис.1а-в), використаний метод дозволяє кількісно оцінювати ступінь подібності у вигляді дерева відстаней. Окремі агрегати добре відповідають географічним локаціям, наприклад, Великобританія і Ірландія; Іспанія, Португалія і Монако; Польща і Угорщина; Франція і Нідерланди; Швеція; Ліхтенштейн і Швейцарія; Люксембург і Хорватія; Австрія і Італія; Боснія і Болгарія; П. Македонія і Молдова; Румунія; Німеччина і Україна; Росія і Беларусь; Норвегія і Фінляндія; Данія; Греція; Албанія; Словачія; Латвія; Литва; Словенія; Косово; Бельгія; Естонія; Сербія; Чехія; Андора.

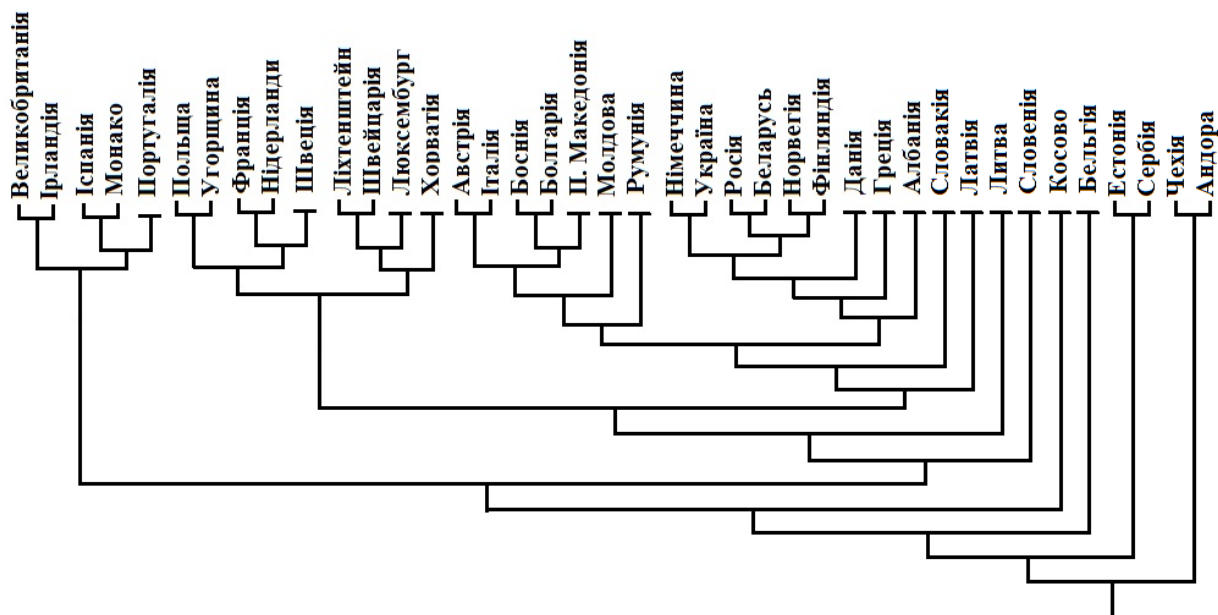


Рис.2. Дерева відстаней для кривих $I(t)$ країн Європи.

3 Математичне моделювання динаміки епідемії

Математична епідеміологія сходиться до класичних праць кінця XIX – початку XX ст. [4-6], які використовували модель Лотка-Вольтерра вигляду «хижак-жертва», де в якості двох останніх розглядалися віруси (або бактерії) і популяція (або тварин). Була сформульована гіпотеза, що епідемія спадає, коли значно зменшується кількість сприйнятливих до інфекції індивідів (вмирають або одужують), тобто закінчується «паливо» для «вогню» епідемії [5]. В яких випадках спостерігається хвиля захворювання з чіткими швидким, а потім повільним підйомом, максимумом, швидким, а потім повільним спадом до мінімуму (Рис.1а).

Динаміка вірусних епідемії відрізняється коротким часом імунітету, можливістю повторних заражень, високим рівнем мутацій вірусу, що у всій сукупності спостерігається для випадку covid-19 [7]. Для урахування цих особливостей вірусів SARS і ряду інших були розроблені моделі SIRS (три звичайні диференціальні рівняння, ЗДР), SEIRS (чотири ЗДР) та ще більш детальні (5-8 ЗДР) математичні моделі. В даній роботі використана стандартна модель SIRS, яка дозволяє візуалізацію динамічних кривих в координатах (S,I,R) на 3D графіках. Відповідно до цієї моделі, потенційно сприйнятливі (S, susceptible) до інфекції індивіди після зустрічі і спілкування з інфікованими (I) особами можуть перейти до групи захворілих, після чого перейти або до групи D, або до групи R. У зв'язку з особливостями SARS-CoV епідемії, деяка частина індивідів з групи R (з недостатньо високим імунітетом) знов переходить до групи S. Відповідна система ЗДР має вигляд [4-7]:

$$\frac{dS}{dt} = \zeta - \mu S - \alpha SI + \delta R, \quad \frac{dI}{dt} = \alpha SI - (\beta + \gamma) I, \quad \frac{dR}{dt} = \beta I - \delta R, \quad (2)$$

де ζ і μ - природні коефіцієнти народжуваності та смертності, α - імовірність захворювання при контактах з інфікованими, γ - коефіцієнт смертності від covid, β - коефіцієнт одужання, δ - імовірність повторного інфікування covid.

Сума рівнянь (2) відповідає динаміці популяції в цілому ($P=S+I+R$)

$$\frac{dP}{dt} = \zeta - \mu S - \gamma I, \quad (3)$$

де P – чисельність населення (країни, області, і т.д.), яка визначається тільки народжуваністю населення (ζ), його смертністю від звичайних факторів (μ) та від covid (γ). Таким чином, модель (3) відповідає лінійному зростанню популяції ($dP/dt = \zeta = \text{const}$) за рахунок народження і міграції, на відміну від експоненціальної моделі Мальтуса ($dP/dt = \zeta P$).

З правої частини (3) видно, що система знаходиться у стаціонарному стані ($dP/dt=0$) якщо $I_0 = I^*$, $I^* = (\zeta - \mu S_0) / \gamma$. Якщо $I_0 > I^*$, починається значне зменшення чисельності населення від пандемії.

Система (2) має дві стаціонарні точки:

1) нульова $S_0 = \zeta / \mu$, $I_0 = 0$, $R_0 = 0$, яка відповідає відсутності епідемії;

2) ненульова з постійними значеннями $S_0 = \frac{(\beta + \gamma)}{\alpha}$, $I_0 = \frac{(\zeta - \mu)(\beta + \gamma)}{\alpha \gamma}$, $R_0 = \frac{\beta(\zeta - \mu)(\beta + \gamma)}{\alpha \delta \gamma}$

.Дослідимо умови стійкості системи (2) навколо стаціонарних точок. Для цього розглянемо розв'язок (2) у вигляді

$$S(t) = S_0 + S^* e^{\lambda t}, \quad I(t) = I_0 + I^* e^{\lambda t}, \quad R(t) = R_0 + R^* e^{\lambda t}, \quad (4)$$

де λ - власні значення матриці системи (2), $\{S^*, I^*, R^*\}$ - амплітуди. Якщо $\text{Re}(\lambda) < 0$, розв'язок (2) є асимптотично стійким. Підстановка (4) в (2) з урахуванням (3) дає систему рівнянь для визначення амплітуд $\{S^*, I^*, R^*\}$ у вигляді

$$M \begin{pmatrix} S^* \\ I^* \\ R^* \end{pmatrix} = 0, \quad M = \begin{pmatrix} \lambda - (\zeta - \mu) + \alpha I_0 & \alpha S_0 & -\delta \\ -\alpha I_0 & \lambda - \alpha S_0 + (\beta + \gamma) & 0 \\ 0 & -\beta & \lambda + \delta \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Умова $\det(M) = 0$ існування нетривіального розв'язку (5) дає кубічне рівняння для λ визначення власних значень системи (2)

$$\lambda^3 + \Phi \lambda^2 + \Theta \lambda + \Omega = 0, \quad (6)$$

де $\Phi = \delta + p + q$, $\Theta = \delta(p + q) + R$, $\Omega = \delta(pq + \alpha^2 S_0 I_0)$, $p = \beta + \gamma - \alpha S_0$, $q = \alpha I_0 - \zeta + \mu$.

Коефіцієнти (6) є дійсні числа, а тому розв'язки алгебраїчного рівняння можуть давати або набір з трьох дійсних чисел, або одне дійсне і пару комплексно спряжених величин, відповідно до значень параметрів моделі (2). Якщо $\Theta = \Phi^2 / 3$, $\Omega = \Phi^3 / 27$, система (5) має один трьохкратний дійсний корінь. Якщо $729\Theta^3 - 708.75\Theta^2\Phi^2 + 234\Theta\Phi^4 - 26\Phi^6 + 27\Phi^3\Omega - 121.5\Phi\Theta\Omega + 182.25\Omega^2 = 0$, система (5) має один однократний і один двократний дійсні корні. Таким чином, в залежності від параметрів, динамічна поведінка системи буде суттєво відрізнятися.

При цьому значення ζ і μ можуть бути взяті зі статистичних даних народжуваності і смертності у даній країні, а значення $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ залежать від різних соціально-економічних факторів, які специфічні для даної країни, і повинні бути визначені шляхом порівняння розв'язку задачі (2) і даних вимірювань, наприклад, за допомогою методу найменших квадратів. Ці значення обчислювалися з використанням даних різних країн [5-10]. Було показано, що параметри моделі, які були обчислені з використанням експериментальних даних різної довжини N , дають трохи різні значення для тієї ж самої країни. Таким чином, параметри $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ є не константами, але функціями часу, оскільки вони відповідають поступовим змінам рівню імунітету, прийнятих засобів обмеження (від масок і соціальної дистанції до локдауну і закритих границь), динаміки вакцинації, наявності нових ліків і т.д.

4 Чисельні розрахунки і обговорення результатів

Для чисельних розрахунків розв'язків і фазових портретів системи (2) використовувалися початкові значення параметрів, які були обчислені як осереднені в даній країні за всіма хвилями епідемії, які попередньо були отримані в цій країні різними авторами і опубліковані протягом 2020-2021 рр. [4-10]: $\alpha_0 = 1.44 \cdot 10^{-7}$, $\beta_0 = 0.27$, $\gamma_0 = 0.06$, $\delta_0 = 0.5$. В цілях моделювання аномально низької або високої захворюваності, смертності та одужування ці значення в 10 разів зменшували і підвищували відповідно. Розрахунки проводилися для трьох хвиль пандемії в Україні, Норвегії,

Франції і Іспанії, значення $\{\zeta, \mu\}$ для яких в 20219 р. були $\{0.0105, 0.0144\}$ (Україна), $\{0.0122, 0.0081\}$ (Норвегія), $\{0.0123, 0.0093\}$ (Франція), $\{0.0094, 0.0091\}$ (Іспанія).

Результати розрахунків коренів рівняння (8) методом дотичних з точністю 10^{-4} показали, що λ_1 залежить тільки від δ і для $\delta = 0.1\delta_0, \delta_0, 10\delta_0$ у всіх країн складає $\lambda_1 = -0.05, -0.5, -5$ відповідно. Два останніх корні для Норвегії, Франції і Іспанії (група I) є комплексно спряженими числами вигляду $-a \pm ib$, а для України (група II) – дійсні корні, які мають різні знаки. Відповідно до загальної теорії систем ЗДР першого порядку ці дві групи країн будуть відрізнятися динамічною поведінкою, причому для України система може бути нестійкою поблизу стаціонарних точок ($\lambda_3 > 0$). Для групи II в площинах $R=\text{const}$ буде спостерігатися фазовий портрет «вузол», а в площинах $S=\text{const}$ і $I=\text{const}$ – «седло», тоді як для групи I в площинах $R=\text{const}$ буде спостерігатися фазовий портрет «фокус», а $S=\text{const}$ і $I=\text{const}$ – «вузол».

Відповідні розв'язки вигляду (4) для країн груп I і II є, відповідно

$$\{S, I, R\}(t) = \{S_0, I_0, R_0\} \left(C_1 \exp(\lambda_1 t) + e^{-at} (C_2 \cos(bt) + C_3 \sin(bt)) \right), \quad (7)$$

$$\{S, I, R\}(t) = \{S_0, I_0, R_0\} (C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) + C_3 \exp(\lambda_3 t)), \quad (8)$$

де $a = -\text{Re}(\lambda_2)$, $b = \text{Im}(\lambda_2)$.

Величина $\omega = 2\pi/b$ відповідає періоду коливань змінних системи (2). За результатами розрахунків значень $\lambda_{2,3}$ для країн групи I були отримані наступні періоди коливань: Франція: $T = 3.5; 34; 85$ діб; Іспанія: $T = 10.5; 32; 102$ діб; Норвегія: $T = 5; 31; 90$ діб. На Рис.3 наведені приклади фазових портретів лінеаризованої системи ЗДР (2) в безрозмірних координатах $(S^\circ, I^\circ, R^\circ)$, які відповідають величинам S, I, R , розділеним на максимальні значення (кількість населення у країні). Ці фазові портрети відповідають перетинам тривимірної системи траєкторій площиною $R=0.1$, тобто в координатній площині (S°, I°) .

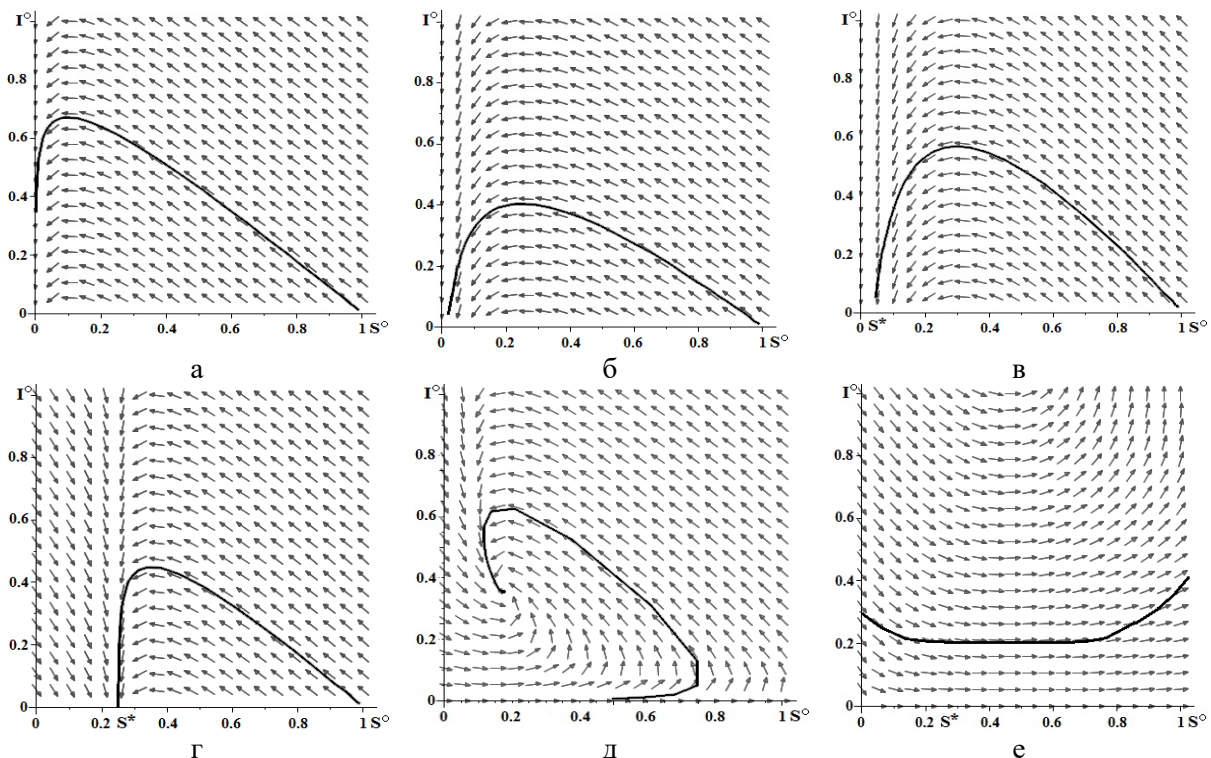


Рис.3. Типові фазові портрети в безрозмірних координатах (S°, I°) для випадків $\gamma = 0.1$, $\delta = 0$, $\beta/\alpha = 0.1$ (а), $\beta/\alpha = 0.25$ (б), $\beta/\alpha = 0.1$, $\delta = 0.1$ (в), $\delta = 0.3$ (г), $\beta/\alpha = 0.25$, $\delta = 0.2$ (д), $\gamma = 0.3$, $\delta = 0.5$ (е).

У випадку стійкого імунітету ($\delta = 0$) популяція досить швидко перехворіє і повертається до стійкого стану з відсутністю хворих. Максимальні значення числа захворілих вздовж траєкторії залежать від співвідношення $\beta/\alpha = 0.1$ між швидкостями одужання і захворювання (Рис.3а,б). При слабкому імунітеті певна частина одужалих повертається в групу S і, таким чином, критичне

значення S^* чисельності групи S зростає (Рис.3 в,г). Перехідний режим від стійкої динаміки ($\text{Re}(\lambda) < 0$) до нестійкої (один корінь (6) з $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$, $\text{Re}(\lambda_3) > 0$) наведений на Рис.3д, а нестійкий випадок – на Рис.3е.

На Рис.4а-е наведені розв'язки (2) у вигляді кривих $S(t), I(t), R(t)$, які відповідають наборам параметрів моделі з Рис.3а-е і початковим даним $S^\circ(0) = 1, I^\circ(0) = 0, R^\circ(0) = 0$. Таким чином, при наявності стійкості стаціонарної точки моделі (2) спостерігається поступове зростання числа захворілих і одужалих. Динаміка кривих $R(t)$ у всіх випадках відповідає логістичній залежності (S -подібна крива), тоді як криві $I(t)$ мають чітко означені зростання до максимуму і зменшення до мінімуму поблизу значення $I = 0$, що відповідає експериментальним кривим, які наведені на Рис.1а. Нестійкість стаціонарній точці рівнянь (2) у випадку даних моделі для України може бути пов'язана з виключною для країн Європи негативною динамікою популяції (народжуваність ζ менше за смертність μ на 1 млн. населення).

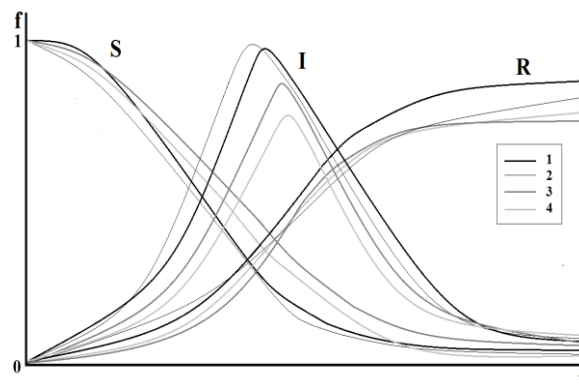


Рис.4. Криві $S(t), I(t), R(t)$ для параметрів моделі (2), які відповідають фазовим портретам з Рис.3а-г.

5 Висновки

Статистичний аналіз даних з відкритих джерел методами BigData виявив різні типи «хвиль» пандемії covid-19 в різних країнах, а саме: хвильова динаміка з чітким підвищенням числа захворілих і померлих від майже нуля до нуля (Рис.1а); хвильове збільшення і/або зменшення I і D (Рис.1б); східчає збільшення числа захворілих без значного зменшення, що вказує на неконтрольоване розвинення пандемії (Рис.1в). Модель SIRS дозволяє описати всі наявні типи динамічної поведінки з використанням мінімально можливої системи рівнянь. В рамках якісної теорії ЗДР виявлені різні типи фазових портретів моделі SIRS, а саме стійкий фокус і сідло. Математичне моделювання на основі моделі SIRS дозволяє проводити прогнозування з імітацією сприятливого/несприятливого розвинення епідемії в країні з урахуванням відповідно помірних/підвищених коефіцієнтів захворюваності, одужання і рівня надбаного імунітету. Для більш детальних рекомендацій потрібні порівняльні дослідження як з використанням статистичних даних інших країн Європи і світу, так і більш складних математичних моделей.

ЛІТЕРАТУРА

1. Worldometer. COVID Live Update [Електронний ресурс] <https://www.worldometers.info/coronavirus/>
2. Coronavirus Pandemic. Statistics and Research [Електронний ресурс] <https://ourworldindata.org/coronavirus>
3. Кізілова Н.М. Методи аналізу «великих даних». Методичні рекомендації з курсу «Прикладні задачі аналізу великих даних» для студентів спеціальності «Прикладна математика». Харків: ХНУ ім. В.Н. Каразіна. 2021. – 96 с.
4. Захарова А.А., Кізілова Н.М. Дослідження кореляцій динаміки захворювання на COVID-19 з деякими соціально-економічними факторами. *Вісник Харківського національного університету серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2020. Вип. 47. С.49-56. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2020-48-04>

5. Волошина К.І., Кізілова Н.М., Кіпоренко П.В. Дослідження динаміки чотирьох хвиль covid-19 в країнах Європи. *Вісник Харківського національного університету серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2021. Вип. 51. С. 6-11.
6. Костецька В.В., Кізілова Н.М. Математичне моделювання динаміки пандемії COVID-19. *Вісник Харківського національного університету серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2020. Вип. 48. С.65-71. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2020-48-06>
7. Computational Modeling and Data Analysis in COVID-19 Research. Ed. by Ch.R.Panigrahi, B. Pati, M. Rath, R. Buyya. CRC Press. 2021.
8. Aldila D., Khoshnaw S.H.A., Safitri E., et al. A mathematical study on the spread of COVID-19 considering social distancing and rapid assessment: The case of Jakarta, Indonesia. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. Vol. 139, 110042. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110042>
9. Sun J. Forecasting COVID-19 pandemic in Alberta, Canada using modified ARIMA model. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2021. Vol. 22, 100029. <https://doi.org/10.1016/j.cmpbup.2021.100029>
10. James N., Menzies M. Trends in COVID-19 prevalence and mortality: A year in review. *Physica D*. 2021. Vol. 425, 132968. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.132968>

REFERENCES

1. Worldometer. COVID Live Update [Електронний ресурс] <https://www.worldometers.info/coronavirus/>
2. Coronavirus Pandemic. Statistics and Research [Електронний ресурс] <https://ourworldindata.org/coronavirus>
3. N. Kizilova, Methods of "big data" analysis. Methodical recommendations on the course "Applied problems of big data analysis" for students of the specialty "Applied Mathematics". V.N. Karazin Kharkov National University, 2021, 96 p. (in Ukrainian)
4. A. Zakharova, N. Kizilova, "Study on correlations of disease dynamics on COVID-19 with some socio-economic factors", *Bulletin of Kharkiv National University, series "Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems"*, 2020, Vol. 47, P.49-56. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2020-48-04>
5. K. Voloshyna, N. Kizilova, P. Kiporenko, "Investigation of the dynamics of four waves covid-19 in European countries", *Bulletin of Kharkiv National University, series "Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems"*, 2021, Vol. 51, P. 6-11.
6. V. Kostetzka, N. Kizilova, "Mathematical modeling of the dynamics of the COVID-19 pandemic", *Bulletin of Kharkiv National University, series "Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems"*, 2020, Vol. 48, P.65-71. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2020-48-06>
7. *Computational Modeling and Data Analysis in COVID-19 Research*. Ed. by Ch.R.Panigrahi, B. Pati, M. Rath, R. Buyya. CRC Press. 2021.
8. D. Aldila, S.H.A. Khoshnaw, E. Safitri, et al. "A mathematical study on the spread of COVID-19 considering social distancing and rapid assessment: The case of Jakarta, Indonesia", *Chaos, Solitons and Fractals*. 2020. Vol. 139, 110042. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110042>
9. J. Sun, "Forecasting COVID-19 pandemic in Alberta, Canada using modified ARIMA model", *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2021. Vol. 22, 100029. <https://doi.org/10.1016/j.cmpbup.2021.100029>
10. N. James, M. Menzies, "Trends in COVID-19 prevalence and mortality: A year in review", *Physica D*. 2021. Vol. 425, 132968. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.132968>