

УДК 539.3

Дослідження гідропружних коливань елементів конструкцій з використанням методів скінчених та граничних елементів

І.О. Верушкін, Є.С. Кононенко

**Верушкін Іван
Олексійович**

*аспірант
Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАНУ, вул.
Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна
e-mail: ivanveruskin86@gmail.com;
<http://orcid.org/0000-0002-3837-5567>*

**Кононенко Єгор
Сергійович**

*аспірант
Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАНУ, вул.
Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна
e-mail: yehorkononenko@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6221-3608>*

Для дослідження частот та форм коливань елементів конструкцій, які функціонують при взаємодії з рідиною, запропоновано підхід, заснований на сумісному використанні методів скінчених та граничних елементів. Для опису руху як конструктивного елемента, так і рідини використовуються основні співвідношення механіки суцільного середовища. При дослідженні елементів конструкцій прийняті лінійні співвідношення між напруженнями та деформаціями, тобто розглядаються пружні елементи. Для опису руху рідини застосовані співвідношення між компонентами тензорів напружень та швидкостей деформацій. Вважається, що рідина є ідеальною та нестисливою. Отримано рівняння Лапласа відносно тиску рідини на змочені поверхні елементів конструкцій та сформульовані відповідні граничні умови при однобічному та двобічному контакті елемента конструкції з рідиною. Побудовані інтегральні рівняння для визначення тиску. У випадку двобічного контакту елемента конструкції з рідиною отримано гіперсингулярне інтегральне рівняння. Якщо контакт з рідиною є однобічним, то побудовані сингулярні інтегральні рівняння, що мають логарифмічні особливості та особливості типу Коші. За наявності аксіальної симетрії конструкції отримані інтегральні рівняння зводяться до одновимірних. Розглянуто круглу пружну пластинку за різні умови закріплення. Побудовані форми вільних коливань цього конструктивного елемента, які слугують базисними функціями при вивченні коливань пластинки з урахуванням приєднаних мас рідини. При цьому використовувався метод скінчених елементів. Для знаходження тиску рідини на пластинку побудовано одновимірне гіперсингулярне інтегральне рівняння. Отримані частоти та форми коливань пластинки з урахуванням приєднаних мас рідини. Проведено дослідження точності та вірогідності запропонованого методу.

Ключові слова: методи скінчених та граничних елементів, ідеальна нестислива рідина, гідропружні коливання, гіперсингулярне інтегральне рівняння.

Simulation of hydroelastic vibrations of structure elements using finite and boundary element methods

I.A. Vierushkin, Y.S. Kononenko

Vierushkin Ivan

*PhD student
A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NASU, Pozharsky,
st. 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine
e-mail: ivanveruskin86@gmail.com;
<http://orcid.org/0000-0002-3837-5567>*

Kononenko Yehor

*PhD student
A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems NASU, Pozharsky,
st. 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine
e-mail: yehorkononenko@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6221-3608>*

The approach for studying the vibration frequencies and modes of structural elements that operate in interaction with a liquid has been proposed. The approach is based on the usage of both the finite and boundary element methods. To describe the motion of both structural elements and the fluid, the basic relations of the continuous medium mechanics have been used. While studying structural elements, the linear relations between stresses and strains have been assumed, i.e. elastic elements have been considered. The relations between the components of stress tensors and strain rates are used to describe fluid motion. The fluid is considered to be ideal and incompressible. The Laplace equations for the fluid pressure on the wetted surfaces of structural elements have been obtained. The corresponding boundary conditions have been formulated for one-sided, as well as, two-sided

contact of a structural element with a liquid. The integral equations for pressure determination have been received. In the case of a two-sided contact of a structural element with a liquid, the hypersingular integral equation has been obtained. If the contact with the liquid is one-sided, then the indicated singular integral equations have logarithmic singularities and Cauchy-type singularities. In the presence of axial symmetry of the structure, these hypersingular integral equations are reduced to one-dimensional ones. A round elastic plate under different fastening conditions has been considered. Modes of free oscillations of this structural element have been received and they serve as basic functions in the study of plate oscillations taking into account the added liquid masses. The finite element method has been used. A one-dimensional hypersingular integral equation is implemented to find the fluid pressure on the plate. The frequencies and oscillation forms of the plate taking into account the added liquid masses have been obtained. Accuracy and reliability of the proposed method have been ascertained.

Key words: *finite and boundary element method, ideal incompressible fluid, hydroelastic vibrations, hypersingular integral equation*

Исследование гидроупругих колебаний элементов конструкций с использованием методов конечных и граничных элементов

И.А. Верушкин, Е.С. Кононенко

**Верушкин Иван
Алексеевич**

аспирант

*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского,
2/10, Харьков, 61046, Украина*

e-mail: ivanveruskin86@gmail.com;

<http://orcid.org/0000-0002-3837-5567>

**Кононенко Егор
Сергеевич**

аспирант

*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского,
2/10, Харьков, 61046, Украина*

e-mail: yehorkononenko@gmail.com;

<http://orcid.org/0000-0001-6221-3608>.

Для исследования частот и форм колебаний элементов конструкций, функционирующих при взаимодействии с жидкостью, предложен подход, основанный на совместном использовании методов конечных и граничных элементов. Для описания движения как конструктивного элемента, так и жидкости используются основные соотношения механики сплошной среды. При исследовании элементов конструкций приняты линейные соотношения между напряжениями и деформациями, то есть рассматриваются упругие элементы. Для описания движения жидкости применены соотношения между компонентами тензоров напряжений и скоростей деформаций. Считается, что жидкость является идеальной и несжимаемой. Получены уравнения Лапласа относительно давления жидкости на смоченные поверхности элементов конструкций, и сформулированы соответствующие граничные условия при одностороннем и двустороннем контакте элемента конструкции с жидкостью. Построены интегральные уравнения для определения давления. В случае двустороннего контакта элемента конструкции с жидкостью получено гиперсингулярное интегральное уравнение. Если контакт с жидкостью является односторонним, то указанные сингулярные интегральные уравнения имеют логарифмические особенности и особенности типа Коши. При наличии аксиальной симметрии конструкции сингулярные интегральные уравнения сводятся к одномерным. Рассмотрена круглая упругая пластинка с различными условиями закрепления. Были построены формы свободных колебаний этого конструктивного элемента, которые служат базисными функциями при изучении колебаний пластинки с учетом присоединенных масс жидкости. При этом использовался метод конечных элементов. Для нахождения давления жидкости на пластинку построено одномерное гиперсингулярное интегральное уравнение. Определены частоты и формы колебаний пластинки с учетом присоединенных масс жидкости. Проведено исследование точности и достоверности предложенного метода.

Ключевые слова: *методы конечных и граничных элементов идеальная несжимаемая жидкость, гидроупругие колебания, гиперсингулярное интегральное уравнение*

1 Вступ

Значна кількість сучасного енергетичного, машинобудівного та нафтохімічного обладнання працює в умовах підвищених технологічних навантажень. Елементи конструкцій піддаються дії короточасних силових та температурних впливів, функціонують при взаємодії з оточуючим середовищем. Актуальними питаннями сьогодення залишаються проблеми обчислення міцносних та динамічних характеристик вказаного обладнання з метою уточнення залишкового ресурсу та забезпечення надійності та безпеки конструкцій при експлуатації. Одним з таких питань є визначення частот та форм вільних коливань конструктивних елементів при врахуванні взаємодії з водним або повітряним середовищем [1-2]. Зауважимо, що при врахуванні гідро пружних ефектів відбувається значний вплив на частоти коливань. Тобто, якщо ці явища не враховувати, то важко відстроюватись від небажаних резонансних частот [3]. Елементи конструкцій, що функціонують за наявності рідкого середовища, є або повністю зануреними в рідину, або мають

контактуючі з рідиною поверхні. Таким чином, є два класи проблем гідро пружної взаємодії. До першого відносяться проблеми вивчення динамічної поведінки конструкцій при однобічному контакті з рідиною або газом. До таких конструкцій відносяться кришки гідротурбін [2], посудини високого тиску [1], баки ракет-носіїв [4-5], резервуари для збереження рідини [6]. Такі елементи конструкцій, як лопаті зворотно - лопатевих та радіально - вісьових гідротурбін [7], лопаті повітряних установок [8], крила літаків [9] та ін. Зауважимо, що з математичної точки зору, опис однобічного та двобічного контакту з рідиною потребує різних рівнянь, але математичні моделі мають й багато спільних рис. Задачі стосовно двобічного контакту пружної тонкої пластинки або оболонки з рідиною зазвичай розв'язують за використанням методів теорії потенціалу та гіперсингулярних інтегральних рівнянь [10-11]. Для числового розв'язання задач гідропружної взаємодії зазвичай використовують потужні методи скінченних та граничних елементів [12-13].

В даному дослідженні розроблено підхід, заснований на сумісному використанні методів скінченних (МСЕ) та граничних елементів (МГЕ). При цьому, МСЕ використовується для опису поведінки пружного деформованого тіла, а МГЕ для визначення характеристик рідкого середовища.

2 Основні співвідношення та формулювання задач

Для опису руху як пружної конструкції, так і рідини використовуються основні співвідношення механіки суцільного середовища. Нехай є пружне тіло, що займає область Ω з границею Γ . Припустимо, що на тіло діють задані об'ємні та поверхневі сили. Крім того, частина поверхні тіла Γ_l контактує з рідиною, рис.1.

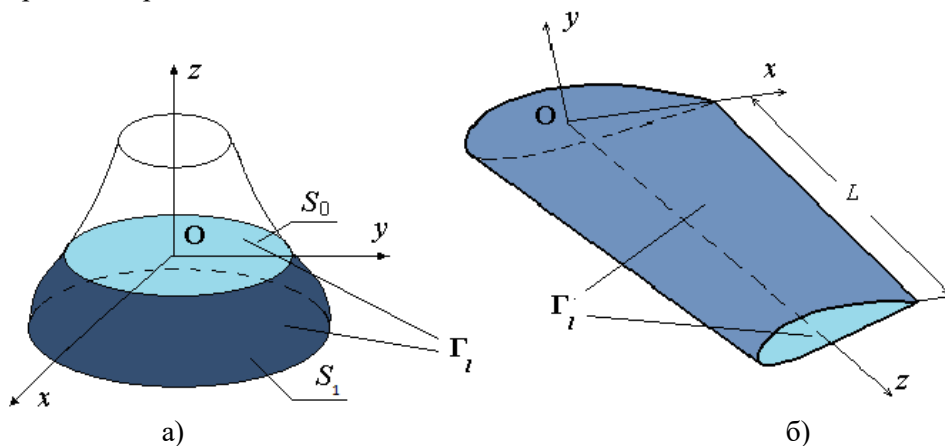


Рисунок 2.1 Схеми конструкцій, що взаємодіють з рідиною: а)- однобічний контакт, б)- двобічний контакт

Всі моделі суцільного середовища [14] передбачають визначення полів напружень σ_{ij} , деформацій ε_{ij} , переміщень u_i , а також температури T , тиску p та густини ρ в залежності від часу. Для знаходження цих полів застосовують такі основні співвідношення [14]:

рівняння руху в напруженнях

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

співвідношення Коші для малих деформацій

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2.2)$$

а також умови сумісності деформацій, граничні та початкові умови й рівняння стану, що пов'язують тиск, густину та температуру середовища.

Рівнянь (2.1)-(2.2) недостатньо для однозначного визначення σ_{ij} , ε_{ij} , u_j ($i, j = 1, 2, 3$). Тому задають додаткові співвідношення між напруженнями та деформаціями, або між напруженнями та швидкостями деформацій. Якщо вивчається пружне тіло, то компоненти тензорів напружень є лінійними функціями від компонентів деформацій. Зв'язок між деформаціями та напруженнями описується законом Гука у формі

$$\sigma_{ij}^e = \delta_{ij} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}^e + \mu \left(\frac{\partial u_j^e}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i^e}{\partial x_j} \right) \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

де $\mu = E[2(1+\nu)]^{-1}$ – модуль зсуву, $\lambda = E\nu[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}$ – коефіцієнт Ламе, E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона, відповідно.

Вважаємо, що на частині межі Γ_1 задані переміщення тіла, а на частині Γ_2 – зусилля; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Зусилля виражаються за формулою

$$\mathbf{p}^e(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}^n(\partial_x, \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t) = 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial \mathbf{n}} + \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u}^e + \mu (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}^e). \quad (2.4)$$

Тобто граничні умови мають вигляд

$$\mathbf{u}^e(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_1} = \mathbf{U}(t), \quad \mathbf{p}^e(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_2} = \mathbf{P}(t). \quad (2.5)$$

Задаються також початкові умови, якщо розглядається динамічний стан

$$\mathbf{U}^e(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}^e(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = 0. \quad (2.6)$$

З урахуванням рівності (2.3) рівняння руху (2.1) набувають вигляду

$$\mu \Delta u_j^e + (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta^e}{\partial x_j} + X_j = \rho \frac{\partial^2 u_j^e}{\partial t^2}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.7)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $\vartheta^e = \operatorname{div} \mathbf{u}^e = \frac{\partial u_1^e}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^e}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^e}{\partial x_3}$.

Для розв'язання рівнянь руху (2.7) застосовуємо метод зважених нев'язок, невідомі подаємо у вигляді рядів за базисом з фінітних функцій $\{\psi_n\}_{n=1}^{N_1}$; як пробні використовуємо функції з цього ж базису. Після інтегрування отриманого співвідношення по об'єму та зведення частки об'ємних інтегралів до поверхневих отримуємо скінченно-елементне формулювання зазначеної задачі у вигляді

$$[\mathbf{M}_s] \ddot{\mathbf{u}}^e + [\mathbf{K}_s] \mathbf{u}^e = \{\mathbf{f}_s\} + \{\mathbf{f}_{pr}\} \quad (2.8)$$

де $[\mathbf{M}_s], [\mathbf{K}_s]$ – матриці мас та жорсткості, відповідно, $\{\mathbf{f}_s\}$ – вектор заданих зусиль, що діють на пружне тіло, $\{\mathbf{f}_{pr}\}$ – вектор зусиль, що характеризують тиск рідини на змочені поверхні пружного тіла, який буде визначено далі.

Для визначення означеного вектору $\{\mathbf{f}_{pr}\}$ перейдемо до формулювання початково-крайової задачі з механіки рідини. Для опису рідини використовуємо співвідношення (2.1)-(2.2). Також задається зв'язок між напруженнями та швидкостями деформацій. Зробимо такі припущення відносно рідкого середовища. Вважаємо, що рідина є стисливою та нев'язкою, а її рух безвихровий. Припускаємо, що збурення тиску рідини внаслідок руху пружного тіла є малими, тобто розв'язуємо зв'язану задачу в лінійному формулюванні. Використовуємо загальні закони механіки рідини, а саме: закон збереження маси (рівняння нерозривності)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{V}_f) + Q, \quad (2.9)$$

де \mathbf{V}_f – вектор швидкості, ρ – густина рідини, Q – джерела, t – час.

Далі використовуємо рівняння руху (2.1) у напруженнях (наслідок закону збереження імпульсу) з врахуванням об'ємних сил \mathbf{b}

$$\rho \frac{d\mathbf{V}_f}{dt} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_f).$$

Для визначення компонент тензору напружень приймаємо гіпотезу

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -p\mathbf{I} + \mathbf{T}; \quad \mathbf{T} = 2\mu \left(\dot{\mathbf{S}} - \frac{1}{3}(\operatorname{div} \mathbf{V}_f) \right), \quad (2.10)$$

де $\dot{\mathbf{S}}$ – девіатор швидкостей деформації.

З використанням рівняння стану з (2.9) та (2.10) маємо наближені рівності

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_f = -\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q}{\rho_0}, \quad \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{4\mu}{3\rho_0} \left(-\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{Q}{\rho_0} \right). \quad (2.11)$$

Надалі вважаємо, що рідина нестислива та нев'язка, а джерела відсутні. Тоді маємо $Q = 0$, $\mu = 0$, $\rho_0 = \text{const}$, $c \rightarrow \infty$. При цьому (2.11) набувають вигляду

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_f = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{V}_f}{\partial t} = -\nabla p \quad (2.12)$$

Обчислив дивергенцію від другого співвідношення в (2.12), отримуємо, що тиск p є гармонічною функцією, тобто задовольняє рівнянню Лапласа, а саме

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (2.13)$$

Саме тиск, або його перепад входить в праву частину рівнянь (2.8).

Припустимо, що має місце таке розкладення для невідомих переміщень

$$\mathbf{u}^e(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) \mathbf{u}_k(x, y, z), \quad (2.14)$$

де $c_k(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу;

$\mathbf{u}_k(x, y, z)$ – відомі базисні функції.

Функції часу $c_k(t)$ зазвичай розглядають як узагальнені координати. З огляду на (2.14), рівнянням (2.8) надаємо таку форму

$$\sum_{k=1}^N \{ \ddot{c}_k(t) [\mathbf{M} \mathbf{u}_k] + c_k(t) [\mathbf{K} \mathbf{u}_k] \} = \{ \mathbf{f}_s \} + \{ \mathbf{f}_{pr} \}. \quad (2.15)$$

Надалі використовуємо метод зважених нев'язок [13], що в даному випадку еквівалентно виконанню скалярного добутку рівнянь (2.15) послідовно на функції $\mathbf{u}_l(x, y, z)$. Отримуємо

$$[\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{c}} + [\mathbf{K}] \mathbf{c} = \{ \tilde{\mathbf{f}}_s \} + \{ \tilde{\mathbf{f}}_{pr} \},$$

де $[\mathbf{M}] = \{ \mathbf{M} \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l \}$, $[\mathbf{K}] = \{ \mathbf{K} \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l \}$.

Якщо $\{ \tilde{\mathbf{f}}_s \} = \{ \tilde{\mathbf{f}}_{pr} \} = 0$, то маємо задачу на визначення частот та форм вільних коливань елемента конструкції без врахування приєднаних мас рідини, при лише $\{ \tilde{\mathbf{f}}_s \} = 0$ приходимо до задачі на визначення частот та форм вільних коливань елемента конструкції з врахуванням приєднаних мас рідини.

3 Визначення тиску на контактуючі з рідиною поверхні елемента конструкції

3.1. Двобічний контакт елемента конструкції з рідиною

Треба знайти праву частину в співвідношенні

$$[\tilde{\mathbf{M}}] \ddot{\mathbf{c}} + [\tilde{\mathbf{K}}] \mathbf{c} = \{ \tilde{\mathbf{f}} \}. \quad (3.1)$$

Якщо вивчається двобічний контакт елемента конструкції з рідиною, то на змочених поверхнях розглядається перепад тиску. Як було зазначено вище, тиск задовольняє рівнянню Лапласа (2.13). Для однозначного розв'язку цього рівняння треба сформулювати граничні умови. Вважаємо, що елемент конструкції досить тонкий, тому згідно з [15], вважаємо, що граничні умови можна задавати та серединній поверхні елемента, що розглядається. Сформулюємо граничну умову непротікання, яка для нев'язкої рідини полягає у рівності нормальних складових швидкостей рідини та конструктивного елемента, тобто

$$(\dot{\mathbf{u}}^e, \mathbf{n}) = (\mathbf{V}_f, \mathbf{n}).$$

З другого з рівнянь (2.12) здобудемо

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = -\rho_l (\dot{\mathbf{u}}^e, \mathbf{n}) = -\rho_l \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) (\mathbf{u}_k, \mathbf{n}). \quad (3.2)$$

Нормальна похідна від тиску має бути неперервною, але ж на поверхні елементу тиск має перепад, при чому функція, що описує тиск, є гармонічною.

Крім того, вказана гармонічна функція має задовольняти умові Зоммерфельда на нескінченності, а саме

$$\nabla p|_{\infty} = 0.$$

Як відомо, такі властивості має потенціал подвійного шару [16]

$$p(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} dS, \quad \mathbf{P} \in S, \quad (3.3)$$

де S - область, зайнята елементом конструкції;

\mathbf{n} – одинична нормаль до поверхні S ;

\mathbf{P} і \mathbf{P}_0 - точки тривимірного простору з координатами (x, y, z) та (x_0, y_0, z_0) , відповідно;

$|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ - декартова відстань між \mathbf{P} і \mathbf{P}_0 ;

$\Gamma(\mathbf{P})$ - густина потенціалу задана на поверхні S .

Функція, що визначена формулою (3.3), задовольняє рівнянню Лапласа (2.13), має неперервну нормальну похідну, а при перетині поверхні S вздовж нормалі має скінченний розрив, а саме [16]

$$p^+(\mathbf{P}_0) - p^-(\mathbf{P}_0) = \Gamma(\mathbf{P}_0), \quad \mathbf{P}_0 \in S.$$

Тому використовуємо подання (3.2) для визначення тиску. Зауважимо, що для визначення перепаду тиску треба знайти невідому густину $\Gamma(\mathbf{P})$ на поверхні пластини. Треба задовольнити граничну умову (3.2). Це призводить до інтегрального рівняння у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} = -\rho_l(\mathbf{u}^e, \mathbf{n}), \quad \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 \in S. \quad (3.4)$$

З рівняння (3.4) бачимо, що функція $\Gamma(\mathbf{P})$ може бути подана у вигляді такого ряду

$$\Gamma(\mathbf{P}) = \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) \Gamma_k(\mathbf{P}), \quad (3.5)$$

де функції $\Gamma_k(\mathbf{P})$ задовольняють таким гіперсингулярним рівнянням

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} \frac{1}{4\pi} \iint_S \Gamma_k(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} = -\rho_l(\mathbf{u}_k, \mathbf{n}), \quad \mathbf{P}, \mathbf{P}_0 \in S$$

Якщо ввести позначення для оператора, що дає розв'язки означених гіперсингулярних рівнянь у вигляді

$$\Gamma_k(\mathbf{P}) = -\rho_l \mathbf{H}_k(\mathbf{u}_k),$$

то отримаємо вираз для матриці приєднаних мас для рівняння (3.1)

$$\{\tilde{\mathbf{f}}_{pr}\} = -\rho_l [\mathbf{H}] \{\ddot{\mathbf{c}}\}, \quad [\mathbf{H}] = \{\mathbf{H}\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l\}. \quad (3.6)$$

Таким чином, отримані рівняння для визначення частот та форм вільних коливань елементу конструкції при двобічному контакті з рідиною – диференціальні рівняння (3.1), в яких $\{\tilde{\mathbf{f}}_{pr}\}$ обчислюється за формулою (3.6).

Зауважимо, що для обчислення тиску рідини використовується пряме формулювання методу граничних елементів.

3.2. Однобічний контакт елементу конструкції з рідиною

Якщо розглядається однобічний контакт елементу конструкції з рідиною, то в рівнянні (3.1) при обчисленні $\{\tilde{\mathbf{f}}_{pr}\}$ треба використовувати саме тиск p . Ця функція задовольняє рівнянню (2.13), для якого треба сформулювати граничні умови. Відзначимо, що в цьому випадку поверхня розрахункової області складається з двох поверхонь: змоченої поверхні σ та вільної поверхні S_0 . На змоченій поверхні ставимо умову непротікання, а саме

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\sigma} = -\rho_l (\ddot{\mathbf{u}}^e, \mathbf{n}) = -\rho_l \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) (\mathbf{u}_k, \mathbf{n}). \quad (3.7)$$

Спочатку розглянемо задачу, де не враховується сила тяжіння, тобто на вільній поверхні не відбувається хвиле утворення. Тоді динамічна гранична мова, що полягає в рівності тиску рідини на вільній поверхні, приймає вигляд:

$$p|_{S_0} = 0. \quad (3.8)$$

Таким чином, маємо мішану крайову задачу (2.13), (3.7), (3.8) для рівняння Лапласа. Тоді найбільш прийнятним є використання методу граничних елементів у прямому формулюванні [13] х використанням другої тотожності Гріна

$$2\pi p(\mathbf{P}_0) = \iint_S \frac{\partial p(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} dS - \iint_S p(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} dS, \quad S = \sigma \cup S_0. \quad (3.9)$$

Функція $p(\mathbf{P}_0)$, описана рівнянням (3.9). Застосуємо до рівняння (3.9) граничні умови (3.7) та (3.8). Приходимо до такої системи сингулярних інтегральних рівнянь:

$$2\pi p(\mathbf{P}_0) + \iint_{\sigma} p(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} d\sigma - \iint_{S_0} q(\mathbf{P}) \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} dS_0 = \rho_l \iint_{\sigma} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t)(\mathbf{u}_k, \mathbf{n}) d\sigma, \quad \mathbf{P}_0 \in \sigma, \quad (3.10)$$

$$\iint_{\sigma} p(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} d\sigma - \iint_{S_0} q(\mathbf{P}) \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} dS_0 = \rho_l \iint_{\sigma} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t)(\mathbf{u}_k, \mathbf{n}) d\sigma, \quad \mathbf{P}_0 \in S_0.$$

З лінійності інтегральних операторів, що фігурують в рівняннях (3.10), отримуємо

$$p(\mathbf{P}) = \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) p_k(\mathbf{P}), \quad q(\mathbf{P}) = \sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) q_k(\mathbf{P}). \quad (3.11)$$

Введемо інтегральні оператори

$$\mathbf{A}(\sigma_1, \sigma_2) f(\mathbf{P}) = \iint_{\sigma_1} \frac{f(\mathbf{P})}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} d\sigma_1, \quad \mathbf{P}_0 \in \sigma_2, \quad \mathbf{B}(\sigma_1, \sigma_2) f(\mathbf{P}) = \iint_{\sigma_1} f(\mathbf{P}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|} d\sigma_1, \quad \mathbf{P}_0 \in \sigma_2. \quad (3.12)$$

Тоді з рівнянь (3.10) з використанням (3.11) будемо мати

$$2\pi \mathbf{I} p_k(\mathbf{P}_0) + \mathbf{B}(\sigma, \sigma) p_k(\mathbf{P}) - \mathbf{A}(S_0, \sigma) q_k(\mathbf{P}) = \rho_l \mathbf{A}(\sigma, \sigma)(\mathbf{u}_k, \mathbf{n}), \quad (3.13)$$

$$\mathbf{B}(\sigma, S_0) p_k(\mathbf{P}) - \mathbf{A}(S_0, S_0) q_k(\mathbf{P}) = \rho_l \mathbf{A}(\sigma, S_0)(\mathbf{u}_k, \mathbf{n}).$$

Припустимо, що на поверхнях σ, S_0 розташовано M_1, M_2 граничних елементів, відповідно. Введемо такі матриці та вектори

$$\{\mathbf{q}\}_{i=1}^{M_2} = \{q_k(\mathbf{P}_i)\}, \quad \{\mathbf{p}\}_{i=1}^{M_1} = \{p_k(\mathbf{P}_i)\}, \quad \{\mathbf{u}\}_{i=1}^{M_1} = \{\mathbf{u}_k(\mathbf{P}_i), \mathbf{n}\}, \quad \{\mathbf{A}_{21}\}_{i=1, j=1}^{M_2, M_2} = \mathbf{A}(S_0, \sigma),$$

$$\{\mathbf{A}_{11}\}_{i=1, j=1}^{M_1, M_1} = \mathbf{A}(\sigma, \sigma), \quad \{\mathbf{A}_{22}\}_{i=1, j=1}^{M_2, M_2} = \mathbf{A}(S_0, S_0), \quad \{\mathbf{B}_{11}\}_{i=1, j=1}^{M_1, M_1} = \mathbf{B}(\sigma, \sigma), \quad \{\mathbf{B}_{12}\}_{i=1, j=1}^{M_1, M_2} = \mathbf{B}(\sigma, S_0).$$

Отримаємо дискретну форму співвідношень (3.13)

$$(2\pi \{\mathbf{I}\} + \{\mathbf{B}_{11}\}) \{\mathbf{p}\} - \{\mathbf{A}_{21}\} \{\mathbf{q}\} = \rho_l \{\mathbf{A}_{11}\} \{\mathbf{u}\}, \quad (3.14)$$

$$\{\mathbf{B}_{12}\} \{\mathbf{p}\} - \{\mathbf{A}_{22}\} \{\mathbf{q}\} = \rho_l \{\mathbf{A}_{12}\} \{\mathbf{u}\} \quad (3.15)$$

Зі співвідношення (3.15) здобудемо

$$\{\mathbf{q}\} = \rho_l \{\mathbf{A}_{22}\}^{-1} \{\mathbf{A}_{12}\} \{\mathbf{u}\} - \{\mathbf{A}_{22}\}^{-1} \{\mathbf{B}_{12}\} \{\mathbf{p}\}$$

і підставимо отриману рівність в співвідношення (3.14). Знайдемо

$$\left[(2\pi \{\mathbf{I}\} + \{\mathbf{B}_{11}\}) + \{\mathbf{A}_{21}\} \{\mathbf{A}_{22}\}^{-1} \{\mathbf{B}_{12}\} \right] \{\mathbf{p}\} = \rho_l \left(\{\mathbf{A}_{11}\} + \{\mathbf{A}_{21}\} \{\mathbf{A}_{22}\}^{-1} \{\mathbf{A}_{12}\} \right) \{\mathbf{u}\}.$$

Введемо позначення

$$\{\mathbf{G}\} = \left[(2\pi \{\mathbf{I}\} + \{\mathbf{B}_{11}\}) + \{\mathbf{A}_{21}\} \{\mathbf{A}_{22}\}^{-1} \{\mathbf{B}_{12}\} \right]^{-1} \left(\{\mathbf{A}_{11}\} + \{\mathbf{A}_{21}\} \{\mathbf{A}_{22}\}^{-1} \{\mathbf{A}_{12}\} \right) \quad (3.16)$$

та отримаємо

$$\{\mathbf{p}\} = \rho_l \{\mathbf{G}\}\{\mathbf{u}\}.$$

З використанням першої за рівностей в (3.11) знаходимо вираз для тиску рідини на змочені поверхні елементу конструкції

$$\{\tilde{\mathbf{f}}_{pr}\} = -\rho_l [\mathbf{H}]\{\ddot{\mathbf{c}}\}, \quad [\mathbf{H}] = \{\mathbf{G}\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l\},$$

де матриця \mathbf{G} визначається формулою (3.16).

4 Побудова базисних функцій – форм коливань круглої пластинки без врахування приєднаних мас рідини

Як приклад числової реалізації запропонованого підходу розглянемо задачу визначення частот та форм круглої пластинки, зануреної в рідину.

Розглянуто кругову пружну пластинку радіуса R . Нехай $w(x, y, t)$ - прогин пластини, ρ_p - густина матеріалу пластини, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - циліндрична жорсткість. Розглянуті вільні коливання круглої пластинки в двох випадках граничних умов, а саме: жорсткого закріплення та шарнірного обпирання.

Умови жорсткого закріплення мають вигляд [17]

$$w|_{\rho=R} = 0, \quad \left. \frac{dw}{dr} \right|_{\rho=R} = 0. \quad (4.1)$$

Умови шарнірного обпирання є такими:

$$w|_{\rho=R} = 0, \quad M|_{\rho=R} = 0, \quad (4.2)$$

де M – момент згину [17].

Розглянуто кругову пластинку за такими параметрами: модуль пружності $E = 2.06 \cdot 10^8$ кПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, густина матеріалу $\rho = 7850$ кг/м³, товщина пластинки $h = 0.01$ м, радіус пластинки $R = 1.0$ м. Пластинка розглядалась за різні умови закріплення (4.1) та (4.2).

Частоти та форми коливань пластинки визначені за допомогою методу скінченних елементів.

Використовувались скінченні елементи Shell181, використовувався програмний комплекс ANSYS. Обиралась різна кількість скінченних елементів. На рис. 4.1 зображено скінченно-елементну сітку.

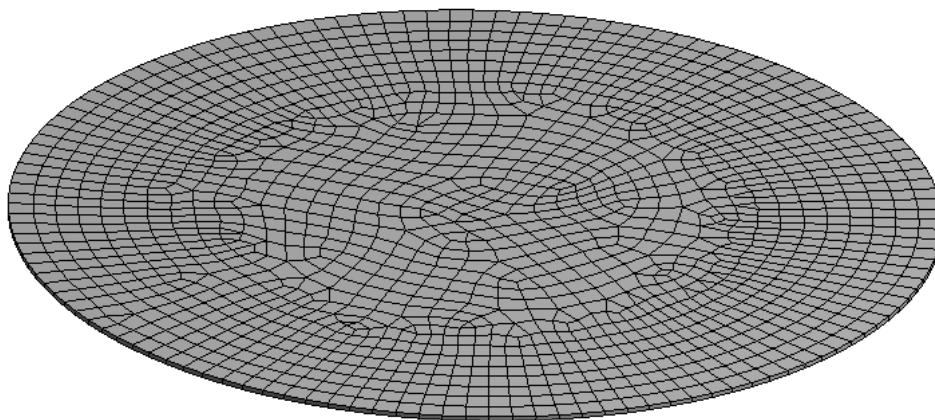


Рисунок 4.1. Скінченно-елементна сітка

В таблиці 4.1 наведені дані щодо впливу кількості елементів та їх розмірів на точність результатів обчислення частот шарнірно-обпертої пластинки.

Табл.4.1. Частоти коливань пластинки в залежності від кількості елементів, Гц

Розмір, мм	110	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
Частота\Кількість	352	371	458	584	804	1021	1520	2374	4163	9285	3590 2
1	25.40	25.41	25.36	25.32	25.278	25.27	25.2 4	25.2 3	25.2 1	25.20	25.20
2	53.51 6	53.470	53.24 1	53.043	52.880	52.80	52.6 8	52.5 9	52.5 2	52.46	52.44
3	53.61 4	53.574	53.27 7	53.092	52.902	52.81	52.6 9	52.5 9	52.5 2	52.46	52.44
4	88.62 0	88.589	87.93 2	87.438	87.006	86.83	86.5 8	86.3 4	86.1 9	86.06	86.00
5	88.84	88.790	88.19	87.639	87.127	86.96	86.6 3	86.3 9	86.2 1	86.08	86.00
6	102.6	102.22	101.3	100.61 0	99.868	99.44	99.0	98.6 8	98.3 8	98.19	98.07
Похибка макс, %		0.382	0.868	0.726	0.743	0.430	0.42 3	0.34 6	0.29 9	0.198	0.122

Аналогічні результати отримані й при аналізі пластинки за умови жорсткого обпирання В таблиці 4.2 наведені частоти коливань круглих пластин.

Табл.4.2. Частоти коливань круглих пластин за різні умови закріплення, Гц

номер частоти t	жорстке закріплення		шарнірне обпирання	
	аналітичний розв'язок	числовий розв'язок	аналітичний розв'язок	числовий розв'язок
1	25.2047	25.20	100.8186992	100.74
2,3	52.4540	52.44	209.8161805	209.52
4,5	86.0492	86.00	344.1970592	343.37
6	98.1241	98.07	392.4964410	391.67

Розрахунки довели, що результати, отримані запропонованим методом, гарно корелюють з аналітичним розв'язком [17].

На рис. 4.2 показані перші форми коливань жорстко-закріпленої пластинки

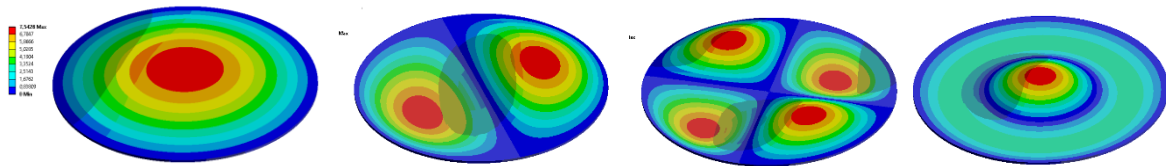


Рис. 4.2 Форми коливань круглої пластинки

Зробимо таке зауваження. Форми коливань круглої пластинки можуть бути зображені у вигляді

$$u_{nm}(\rho, \theta) = w_{nm}(\rho) \cos n\theta,$$

де n – кількість вузлових діаметрів, m – номер форми коливань, що відповідає n -тій гармоніці.

5 Числове розв'язання гіперсингулярного рівняння

Для знаходження матриці приєднаних мас проведено числове розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння (3.4). Це рівняння було зведено до одновимірного гіперсингулярного рівняння у вигляді

$$\frac{1}{\pi} \int_0^R \Gamma_{nm}(\rho) \frac{\rho E_n(k) d\rho}{(\rho + \rho_0)(\rho - \rho_0)^2} = -w_{nm}(\rho_0), \quad (5.1)$$

де $E_n(k) = (-1)^n (1 - 4n^2) \int_0^{\pi/2} \cos 2n\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi$, $k'^2 = 1 - k^2$ - узагальнений еліптичний інтеграл другого роду [18];

$w_m(\rho)$ - форми вільних коливань, отримані вище.

Числові розв'язки рівняння (5.1) із заданими правими частинами отримані за допомогою методу, розробленого в [19,20].

На рис. 5.1 зображені функції $w_m(\rho)$ та відповідні їм $\Gamma_m(\rho)$, $m = 0,1,2$, що є розв'язками гіперсингулярних інтегральних рівнянь (5.1).

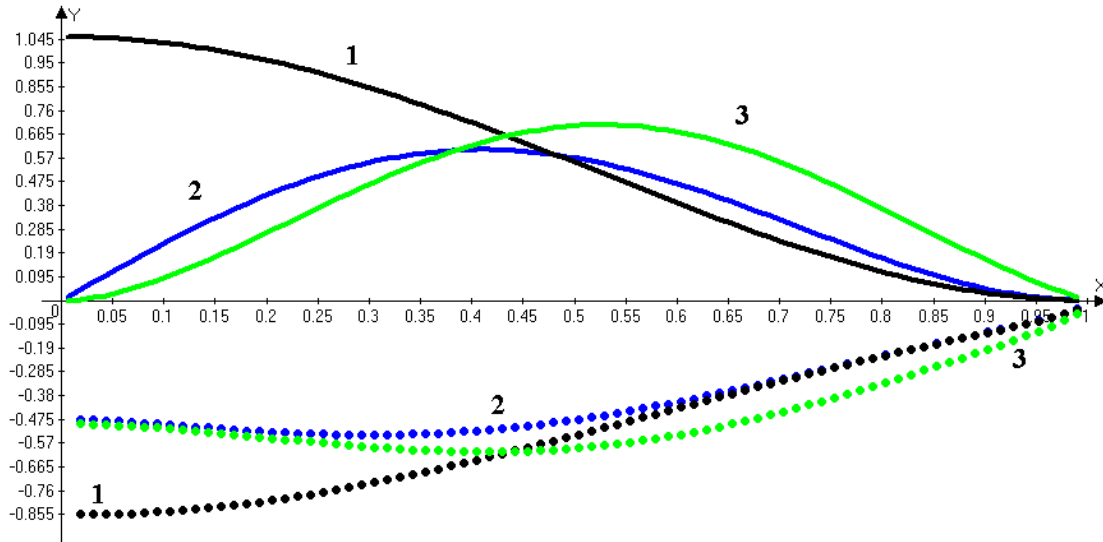


Рис. 5.1 Форми коливань та розв'язки гіперсингулярних рівнянь

Тут цифри 1-3 відповідають значенням $m = 0,1,2$, штрихові лінії зображають праві частини $w_m(\rho)$, а пунктирні відповідають функціям $\Gamma_m(\rho)$, $m = 0,1,2$. Бачимо, що згідно з властивостями гіперсингулярного оператора, функції $\Gamma_m(\rho)$ відновлюють характер функцій $w_m(\rho)$.

Після отримання розв'язків гіперсингулярних рівнянь переходимо до побудови матриці приєднаних мас.

6 Вільні коливання круглої пластинки з урахуванням приєднаних мас рідини

Оскільки попередній аналіз виявив, що найнижчі частоти відповідають формам коливань $w_{01}, w_{02}, w_{11}, w_{21}$ «сухої» пластинки, то форми коливань пластинки з урахуванням приєднаних мас рідини зобразимо у вигляді [18,21]

$$w(\rho, \theta, t) = c_1(t)w_{01}(\rho) + c_2(t)w_{11}(\rho)\cos\theta + c_3(t)w_{11}(\rho)\sin\theta + c_4(t)w_{21}(\rho)\cos 2\theta + c_5(t)w_{21}(\rho)\sin 2\theta.$$

Згідно з властивостями оператора (5.1), [15] та формулою (3.5) маємо аналогічне зображення для густини потенціалу подвійного шару

$$\Gamma(\rho, \theta, t) = \ddot{c}_1(t)\Gamma_{01}(\rho) + \ddot{c}_2(t)\Gamma_{11}(\rho)\cos\theta + \ddot{c}_3(t)\Gamma_{11}(\rho)\sin\theta + \ddot{c}_4(t)\Gamma_{21}(\rho)\cos 2\theta + \ddot{c}_5(t)\Gamma_{21}(\rho)\sin 2\theta.$$

З отриманих зображень для форм коливань круглої пластинки та відповідних густин бачимо, що внаслідок ортогональності будемо мати лише діагональні ненульові значення матриці приєднаних мас. А саме, після розв'язку гіперсингулярного рівняння (5.1), для побудови матриці приєднаних мас круглої пластинки в рідині необхідно обчислити лише значення скалярних добутоків $a_{01} = (w_{01}, \Gamma_{01})$, $a_{11} = 0.5(w_{11}, \Gamma_{11})$, $a_{21} = 0.5(w_{21}, \Gamma_{21})$.

Зауважимо, що як і у випадку «сухої» пластинки, при врахуванні приєднаних мас рідини наявні кратні частоти, що відповідають формам $w_{11}(\rho)\cos\theta$, $w_{11}(\rho)\sin\theta$ та $w_{21}(\rho)\cos 2\theta$, $w_{21}(\rho)\sin 2\theta$.

В результаті обчислень знайдено $a_{01} = 0.09492724$, $a_{11} = 0.03145319$, $a_{21} = 0.04968878$.

В таблиці 6.1 подані значення частот для вказаних форм коливань для «сухої» пластинки Ω_{i1} та пластинки, зануреної в рідину ω_{i1} , за умови жорсткого закріплення.

Таблиця 6.1 Частоти коливань круглої пластинки, Гц

i	0	1	2
Ω_{i1}	25.20	52.44	86.00
ω_{i1}	7.241	12.69	16.80

Зазначимо, що форми коливань пластики, що занурена в рідину, практично збігаються з формами вільних коливань «сухої» пластинки. Врахування наявності рідкого середовища приводить до суттєвого зменшення частот вільних коливань.

7 Висновки

Побудовано метод розв'язання задачі визначення частот і форм коливань елементів конструкцій при однобічному та двобічному контакті з рідиною. З використанням методів зважених нев'язок та заданих форм задачі, що розглядаються, зведено до систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. При вивченні вільних коливань враховується відповідна залежність невідомих коефіцієнтів від часу, і задачі зводяться до проблем власних значень. Використано поєднання методів скінченних та граничних елементів. Методи скінченних елементів використовуються при пошуку частот і форм вільних коливань елементів конструкцій, що не взаємодіють з рідиною. Це дає змогу використання спеціальних програмних комплексів, що дозволяє дослідити елементи конструкцій складної просторової форми. Для визначення тиску рідини використовуються методи теорії потенціалу, що має суттєві переваги у порівнянні з іншими методами, оскільки вимірність задачі зменшується на одиницю. Проведено тестування алгоритму та методів на прикладі круглої пластинки, зануреної в рідину, що довело вірогідність та ефективність запропонованого підходу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Еселева Е.В. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью / Е.В. Еселева, В.И. Гнитко, Е.А. Стрельникова // *Пробл. машиностроения*. – 2006. Т. 9. – №1, – С.105 - 118. <http://journals.uran.ua/jme/issue/archive>
2. Medvedovskaya T. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers / Т. Medvedovskaya, Е. Strelnikova, К. Medvedyeva // *Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART)*. – 2015. – Vol. 1, No 1. – P. 45 - 50. – DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961 <https://www.researchgate.net/publication/282868308>
3. Шелудько Г.А., Шупіков О.М., Сметанкіна Н.В., Угрімов С.В. Прикладний адаптивний пошук.- Харків: Око, 2001.-191 с. http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis
4. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L., Strelnikova, E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, 17(1), pp.75-87, 2016 <https://www.researchgate.net/publication/301655238>
5. Degtyarev, K., Glushich, P., Gnitko, V., Strelnikova, E. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells. // *International Journal of Modern Physics and Applications*. Vol. 1, No. 4, pp. 159-168, 2015. DOI: 10.13140/RG.2.1.1857.5209 <https://www.researchgate.net/publication/280728146>
6. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles J. *Modern Technology & Engineering* Vol.3, No.1, 2018, pp.15-52 <http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf>
7. Ганчин Е.В., Ржевская И.Е., Стрельникова Е.А. Исследование динамических характеристик лопастей рабочих колес поворотных гидротурбин при взаимодействии с жидкостью. *Вісник Харківського національного університету*, 2009. – № 847. – С. 79-86. <http://mia.univer.kharkov.ua/11/30078.pdf>
8. Дегтярев К.Г., Стрельникова Е. А., Шелудько Г. А. Компьютерное моделирование лопастей ветроустановок с оптимальными параметрами / *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*, No 19, 2012, С.81-86 <http://mia.univer.kharkov.ua/19/30251.pdf>
9. Ишмуратов Ф.З. Применение полиномиального метода Рунге для расчета характеристик динамической аэроупругости с учетом гироскопических сил / Ишмуратов Ф.З., Кузнецов А.Г., Мосунов В.А. // *Ученые записки ЦАГИ*, 2017. Т.48. – №6, – С. 64-74. http://www.tsagi.ru/institute/publications/memoirs/archive_annotations/.
10. Стрельникова Е. А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в двумерных краевых задачах для уравнения Лапласа и уравнений Ламе // *Доп. НАН України*. 2001. – №3. – С. 27-31 <https://www.dopovidi-nanu.org.ua/uk/archive>

11. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков: Изд. Харьк. национального ун-та им. В.Н. Каразина, 2000. – 92 с.
<http://ekhnuir.univer.kharkov.ua/handle/123456789/247>
12. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов – М.: Мир, 1979. – 392 С.
<https://studizba.com/files/show/djvu/1936-1-segerlind-1--primeneniye-metoda.html>
13. Brebbia, C.A, Telles, J.C.F & Wrobel, L.C., Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.
<https://studizba.com/files/show/djvu/1932-1-brebbiya-k-telles-zh-vroubel-1--metody.html>
14. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 1 М.: Наука, 1970., 492 с.
<http://lib.brsu.by/sites/default/files/books>
15. Кантор Б.Я. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды / Б.Я. Кантор, Е.А. Стрельникова. – Харьков: Новое слово, 2005. – 252 с.
<http://mia.univer.kharkov.ua/11/30090.pdf>
16. Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. –М.: Гостехтеориздат, 1953. – 416 с.
http://publ.lib.ru/ARCHIVES/G/GYUNTER_Nikolay_Maksimovich/Gyunter_N.M.html#0003
17. M. K. Kwak. Axisymmetric vibration of circular plates in contact with fluid. Journal of Sound and Vibration (1991) 146(3), 381-389.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0022460X9190696H>
18. Karaiev A., Strelnikova E. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, pp. e201800339. DOI: 10.1002/zamm.201800339
URL <https://scholar.google.com/citations?user=5d87MvoAAAAJ&hl=de>
19. Karaiev A. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics / A. Karaiev, E. Strelnikova //International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. 2020– Vol. 11, № 1, – 2050003 . DOI: 10.1142/S1793962320500038. URL: <https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S1793962320500038>
20. V. Gnitko, K. Degtyariov, A. Karaiev, and E. Strelnikova, “Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity“ WIT Transactions on Engineering Sciences, Vol. 122, WIT Press, pp.13-25, 2019. DOI: 10.2495/BE410021
<https://www.witpress.com/elibrary/wit-transactions-on-engineering-sciences/122/37070>
21. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. and Degtyarev K. Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2020, Vol. 111, p. 78-87. Available from: doi: 10.1016/jenganabound.2019.10.008
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0955799719306149>

REFERENCES

1. Eseleva E.V., Gnitko V.I., Strelnikova E.A. Natural vibrations of pressure vessels when interacting with liquid. *Problems of Mechanical Engineering*, vol. 9, no 1, pp.105 – 118, 2006.
<http://journals.uran.ua/jme/issue/archive> [in Russian]
2. Medvedovskaya T. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers / T. Medvedovskaya, E. Strelnikova, K. Medvedyeva // *Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART)*. – 2015. – Vol. 1, No 1. – P. 45 - 50. – DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961
<https://www.researchgate.net/publication/282868308>
3. Sheludko GA, Shupikov OM, Smetankina NV, Ugrimov SV Applied adaptive search.- Kharkiv: Eye
http://irbis-nbu.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbu/cgiirbis
4. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L., Strelnikova, E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, 17(1), pp.75-87, 2016 <https://www.researchgate.net/publication/301655238>
5. Degtyarev, K., Glushich, P., Gnitko, V., Strelnikova, E. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells. // *International Journal of Modern Physics and Applications*. Vol. 1, No. 4, pp. 159-168, 2015. DOI: 10.13140/RG.2.1.1857.5209
<https://www.researchgate.net/publication/280728146>

6. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles J. Modern Technology & Engineering Vol.3, No.1, 2018, pp.15-52
<http://jomardpublishing.com/UploadFiles/Files/journals/JTME/V3No1/StrelnikovaE.pdf>
7. Ganchin E.V., Rzhetskaya I.E., Strelnikova E.A. Investigation of the dynamic characteristics of impeller blades of Kaplan hydraulic turbines when interacting with a liquid. *Bulletin of Kharkiv National University*, no. 847, pp.79-86, 2009. URL:
<http://mia.univer.kharkov.ua/11/30078.pdf> [in Russian]
8. Degtyarev K. Strelnikova E. Sheludko G. Computer modeling of wind turbine blades with optimal parameters. *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series: Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems*, no. 19, pp.81 – 86, 2012. URL:
<http://mia.univer.kharkov.ua/19/30251.pdf> [in Russian]
9. Ishmuratov F.Z., Kuznetsov A.G., Mosunov V.A. Application of the Ritz polynomial method for calculating the characteristics of dynamic aeroelasticity taking into account gyroscopic forces. *Uchenye zapiski CAGI*, vol. 48, no. 6, pp.64 – 74, 2017. URL:
http://www.tsagi.ru/institute/publications/memoirs/archive_annotations/ [in Russian]
10. Strelnikova E.A., Hypersingular integral equations in two-dimensional boundary value problems for the Laplace equation and the Lamé equations, *Dopovidi NAN Ukraini*. no. 3, pp.27-31, 2001.
<https://www.dopovidi-nanu.org.ua/uk/archive>
11. Gandel Yu.V. Introduction to methods for calculating singular and hypersingular integrals. - Kharkov: *Ed. Kharkiv national university*, 92 p., 2010. URL:
<http://ekhnuir.univer.kharkov.ua/handle/123456789/247>
12. Segerlind L. Applied finite element method - M .: Mir- 392 p., 1979. URL:
<https://studizba.com/files/show/djvu/1936-1-segerlind-l--primenenie-metoda.html> [in Russian]
13. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F & Wrobel, L.C., Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.
<https://studizba.com/files/show/djvu/1932-1-brebbiya-k-telles-zh-vroubel-l--metody.html>
14. Sedov L.I. Mechanics of a continuous medium. Volume 1 M .: Nauka, 1970., 492 p.
<http://lib.brsu.by/sites/default/files/books>
15. Kantor B.Ya. Strelnikova E.A. Hypersingular integral equations in problems of continuum mechanics. *Kharkov: Novoe Slovo*, 252 p., 2005. URL: <https://www.twirpx.com/file/1394980/>
16. Gunther N.M. Potential theory and its application to the main problems of mathematical physics. – M .: Gostekhteorizdat, 1953. - 416 p. URL:
http://publ.lib.ru/ARCHIVES/G/GYUNTER_Nikolay_Maksimovich/_Gyunter_N.M..html#0003
17. M. K. Kwak. Axisymmetric vibration of circular plates in contact with fluid. *Journal of Sound and Vibration* (1991) 146(3), 381-389.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0022460X9190696H>
18. Karaiev A., Strelnikova E. Axisymmetric polyharmonic spline approximation in the dual reciprocity method ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, pp. e201800339. DOI: 10.1002/zamm.201800339
URL <https://scholar.google.com/citations?user=5d87MvoAAAAJ&hl=de>
19. Karaiev A. Singular integrals in axisymmetric problems of elastostatics / A. Karaiev, E. Strelnikova //International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing. – 2020– Vol. 11, № 1, – 2050003 . DOI: 10.1142/S1793962320500038. URL:
<https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S1793962320500038>
20. V. Gnitko, K. Degtyariov, A. Karaiev, and E. Strelnikova, “Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity“ WIT Transactions on Engineering Sciences, Vol. 122, WIT Press, pp.13-25, 2019. DOI: 10.2495/BE410021
<https://www.witpress.com/elibrary/wit-transactions-on-engineering-sciences/122/37070>
21. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. and Degtyarev K. Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2020, Vol. 111, p. 78-87. Available from: doi: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0955799719306149>