

УДК 05.13.05, 01.05.02

Комп'ютерне моделювання випромінювання вільних осциляторів

Є.В. Поклонський, С.О. Тоткал

Поклонський Євген Васильович кандидат фіз.-мат. наук, доцент, кафедра штучного інтелекту та програмного забезпечення, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
e-mail: evpoklonsky@karazin.ua
<https://orcid.org/0000-0001-5682-6694>

Тоткал Станіслав Олексійович студент, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
e-mail: stanislavtotkal@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6112-8604>

У статті розглядається система комп'ютерного моделювання надвипромінювання системи вільних осциляторів, які описуються системою звичайних диференціальних рівнянь комплексних змінних. Система рівнянь розв'язується модифікованим для комплексних змінних методом Рунге-Кутда. Адекватність моделі збільшується при збільшенні кількості осциляторів, що приводить до збільшення кількості диференціальних рівнянь комплексних змінних, лінійного збільшення витрат пам'яті та кубічного збільшення витрат часу. Розроблена програма дозволила на порядки збільшити кількість осциляторів порівняно з попередніми моделюваннями. Розпаралелювання та векторизація обчислень дозволили одержати при цьому прийнятні параметри витрат часу. Модель описує в одновимірному наближенні генерацію електромагнітного поля осциляторами, які знаходяться у відкритому резонаторі. У цьому випадку можливий розвиток так званої дисипативної нестійкості – дисипативного режиму генерації. Передбачається, що осцилятори при цьому між собою не взаємодіють, і на їх поведінку впливає тільки резонаторне поле. Якщо ж резонаторне поле відсутнє або невелике, можливий режим надвипромінювання, коли істотно випромінювання кожного осцилятора і поле в системі є сумою всіх власних полів осциляторів. У дисипативному режимі генерації нестійкості систему осциляторів синхронізує індуковане резонаторне поле. Синхронізація осциляторів у режимі надвипромінювання зобов'язана своїм існуванням інтегральному полю всієї системи осциляторів. В системі комп'ютерного моделювання передбачено завдання початкових умов задачі, параметрів системи рівнянь, часовий інтервал, крок за часом і т.д. Реалізована візуалізація одержаного розв'язку системи рівнянь.

Ключові слова: система комп'ютерного моделювання, система диференціальних рівнянь, метод Рунге-Кудта, паралельні обчислення, векторизація.

Компьютерное моделирование излучения свободных осцилляторов

Е.В. Поклонский, С.А. Тоткал

Поклонский Евгений Васильевич кандидат физ.-мат. наук, доцент, кафедра искусственного интеллекта и программного обеспечения, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы 4, Харьков, 61022, Украина
Тоткал Станислав Алексеевич студент, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы 4, Харьков, 61022, Украина

В статье рассматривается система компьютерного моделирования сверхизлучения системы свободных осцилляторов, описываемых системой обычных дифференциальных уравнений комплексных переменных. Система уравнений решается модифицированным для комплексных переменных методом Рунге-Кудта. Адекватность модели увеличивается при увеличении количества осцилляторов, что приводит к увеличению количества дифференциальных уравнений комплексных переменных, линейного увеличения расхода памяти и кубического увеличения затрат времени. Разработанная программа позволила на порядки увеличить количество осцилляторов по сравнению с предыдущими моделированиями. Распаралелливание и векторизация вычислений позволили получить для этого приемлемые параметры затрат времени. Модель описывает в одномерном приближении генерацию электромагнитного поля осциляторами, находящимися в открытом резонаторе. В этом случае возможно развитие так называемой дисипативной неустойчивости - дисипативного режима генерации. Предполагается, что осцилляторы при этом между собой не взаимодействуют и на их поведение влияет только резонаторное поле. Если резонаторное поле отсутствует или небольшое, возможен режим сверхизлучения, когда существенное излучение каждого осциллятора и поле в системе является суммой всех собственных полей осцилляторов. В дисипативном режиме генерации неустойчивости система осцилляторов синхронизирует индуцированное резонаторное поле. Синхронизация осцилляторов в режиме сверхизлучения обязана своим существованием интегральному полю всей системы осцилляторов. В системе компьютерного моделирования предусмотрены задачи начальных условий задачи, параметров системы уравнений, временной интервал, шаг за временем и т.д. Реализована визуализация полученного решения системы уравнений.

Ключевые слова: система компьютерного моделирования, система дифференциальных уравнений, метод Рунге-Кутты, параллельные вычисления, векторизация.

Computer modeling of radiation of free oscillators

E. Poklonskiy, S. Totkal

Poklonskiy Eugen Associate Professor, PhD of Physical and Mathematical Sciences, The Department of Artificial Intelligence and Software, V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine
Totkal Stanislav student, V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

The article discusses a system of computer simulation of superradiance of a system of free oscillators described by a system of ordinary differential equations of complex variables. The system of equations is solved by the Runge-Kudt method modified for complex variables. The model's adequacy increases with an increase in the number of oscillators, which leads to an increase in the number of differential equations of complex variables, a linear increase in memory consumption and a cubic increase in time consumption. The developed program made it possible to increase the number of oscillators by orders of magnitude in comparison with previous simulations. Parallelization and vectorization of computations made it possible to obtain acceptable time parameters for this. The model describes in a one-dimensional approximation the generation of an electromagnetic field by oscillators located in an open resonator. In this case, the development of the so-called dissipative instability, the dissipative generation regime, is possible. It is assumed that the oscillators do not interact with each other and only the resonator field affects their behavior. If the resonator field is absent or small, the superradiance regime is possible, when the essential radiation of each oscillator and the field in the system is the sum of all the eigenfields of the oscillators. In the dissipative regime of instability generation, the system of oscillators synchronizes the induced resonator field. Synchronization of oscillators in the superradiance mode owes its existence to the integral field of the entire system of oscillators. The computer modeling system provides for the tasks of the initial conditions of the problem, the parameters of the system of equations, the time interval, step by time, etc. Visualization of the obtained solution of the system of equations has been implemented.

Keywords: computer modeling system, system of differential equations, Runge-Kudt method, parallel computing, vectorization.

1 Вступ

Інтерес до динаміки дисипативних нестійкостей, тобто процесів генерації або посилення коливань в умовах значного поглинання (або виведення за рахунок випромінювання з активної зони) їхньої енергії був зумовлений практичною необхідністю. В електроніці на особливість цих процесів було звернено увагу на роботах [1-3].

У таких відкритих системах при ослабленні відбивання хвиль від меж системи можуть реалізуватися дисипативні режими генерації та режими надвипромінювання [4-8] фізичні механізми яких обговорювалися в роботах [9,10].

Відомо, що за рахунок відбивання формується резонаторне або хвилеводне поле, інтенсивність якого досить велика у разі малих втрат енергії. Це призводить до взаємодії осциляторів безпосередньо з цим полем. При цьому вплив осциляторів один на одного можна знехтувати. Тобто поле резонатора або хвилеводу змушує частину осциляторів випромінювати та поглинати кванти синхронно з ним, забезпечуючи значну когерентність.

Особливість режиму надвипромінювання в тому, що в системі осциляторів може не бути резонаторне або хвилеводне поле. Як правило, режими надвипромінювання реалізуються у відкритих системах зі слабким відбиванням (або його відсутністю) коливань, що збуджуються від торців системи (резонатора або хвилеводу). Тоді основним фізичним явищем стає безпосередня взаємодія осциляторів.

Моделювання особливостей дисипативних нестійкостей систем збуджених класичних осциляторів та умови реалізації режимів надвипромінювання розглянуто в роботі [11].

При моделюванні систем збуджених класичних осциляторів критично важлива кількість осциляторів. На відміну від роботи [11], в даній роботі розглядається моделювання з на порядок більшою кількістю осциляторів. Також врахована можлива рухливість осциляторів, та її вплив на процес.

2 Система рівнянь, що описує рух та випромінювання класичних осциляторів

Випромінювання та рух системи класичних осциляторів в безрозмірному вигляді в одновимірному наближенні описується системою $3n$ (n – кількість осциляторів) звичайних диференціальних рівнянь першого порядку (1-3). Осцилятори розташовані і повільно рухаються

вздовж осі Z, їх коливання відбуваються вздовж осі X, електричне поле направлене по осі X і біжить вздовж осі Z.

$$\frac{dA_j}{d\tau} = \frac{i\alpha}{2} \cdot |A_j|^2 A_j - \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N A_s \cdot e^{i2\pi|Z_j - Z_s|} = \frac{i\alpha}{2} \cdot |A_j|^2 A_j - \frac{1}{2} E(Z_j, \tau) - E_0 e^{i2\pi Z}, \quad (1)$$

$$\frac{dV_j}{d\tau} = - \left(\frac{m}{m_1} \right) \cdot \frac{4\alpha}{3} \cdot \operatorname{Re} \left(A_j^* \cdot \frac{1}{N} \sum_s A_s \cdot e^{i2\pi|Z_j - Z_s|} \cdot \operatorname{sign}(Z_j - Z_s) \right) \quad (2)$$

$$\frac{dZ_j}{d\tau} = \frac{1}{2\pi} V_j \quad (3)$$

Тут E_0 – амплітуда зовнішнього поля, $E(Z, \tau) = \frac{2}{N} \sum_{s=1}^N A_s \cdot e^{i2\pi|Z - Z_s|}$ – комплексна амплітуда

поля осциляторів, Z_j , V_j , A_j – координати, швидкості та комплексні амплітуди коливань осциляторів, параметр α – визначає залежність релятивістської маси зарядженої частинки (електрона) від швидкості, параметр $m/m_1 = \beta$ – відношення маси зарядженої частинки до маси молекули. Координати, швидкості та комплексні амплітуди коливань осциляторів повільно міняються (порівняно з частотою коливань осциляторів).

3 Опис алгоритмів

Для вирішення системи рівнянь та перерахунку амплітуд, швидкостей та координат осциляторів використовується метод Рунге-Кутти четвертого порядку. Використання п'ятого та більших порядків призводить до дозволяє побачити різницю в результатах та покращення точності, але вони є незначними, в той самий час як використання цих методів для моделювання призводить до додаткового споживання оперативної пам'яті, суттєвого збільшення кількості обчислень та, відповідно, часу виконання програми.

Виконання 1000 кроків по часу для 1000 осциляторів за допомогою методу четвертого порядку займає 93.57812 секунд, п'ятого - 140.9375 секунд.

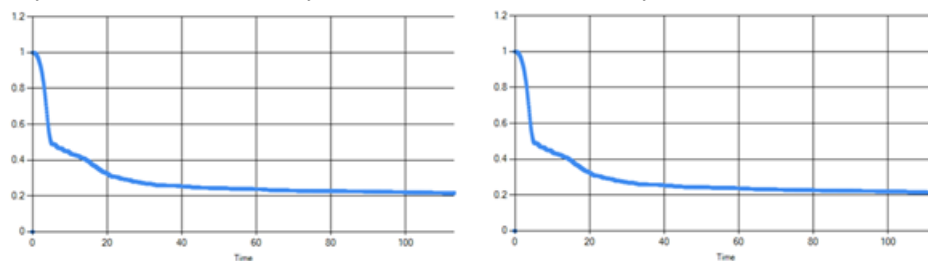


Рис.1 Середній квадрат модулів амплітуд 1000 осциляторів, зліва метод четвертого порядку, справа п'ятого

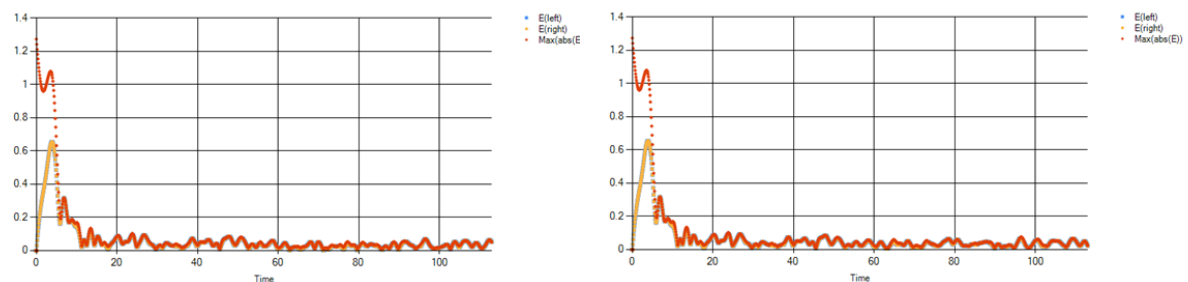


Рис.2 Значення полів для 1000 осциляторів, зліва метод четвертого порядку, справа п'ятого

Значення амплітуд, швидкостей та координат співпадають приблизно до п'ятого знака. Враховуючи збільшення часу виконання, вирішено зупинитися на четвертому порядку. Різниця стає суттєвою на кроках, які значно перевищують необхідний час моделювання.

Крім цього, необхідно підібрати оптимальний крок по часу з точки зору балансу кількості обчислень та точності. Було проведено декілька експериментів з різними кроками по часу та порівнювались отримані результати. Необхідний кінцевий час знаходиться в межах часу $\tau = 30$ або $\tau = 40$.

Проведені експерименти з кроками 1.0, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01 та порівняні середні значення модулів амплітуд у другому ступені, значенні амплітуд на кінцевих кроках. Кінцеві амплітуди для кроків в 1.0 та 0.5 відрізняються від кроків в 0.1, 0.05, 0.01 на соті долі, в той самий час як різниця амплітуд в 0.1 та амплітуд в 0.05, 0.01 відрізняються приблизно на $2, 3 \cdot 10^{-4}$.

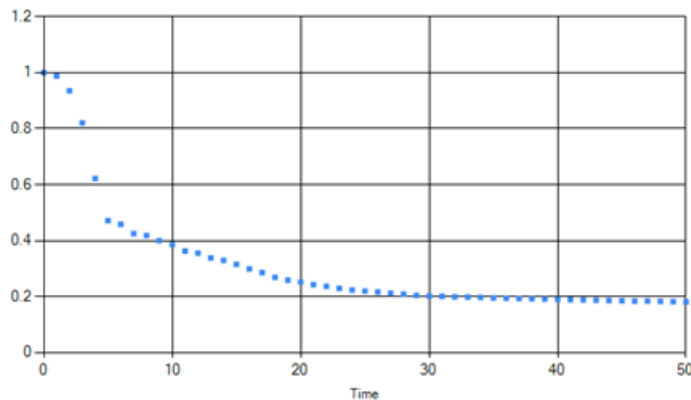


Рис.3 Середні квадрати модулів амплітуд з кроком 1.0

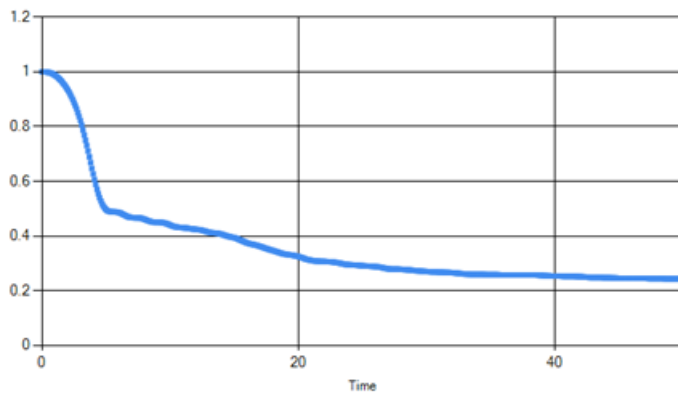


Рис.4 Середні квадрати модулів амплітуд з кроком 0.1

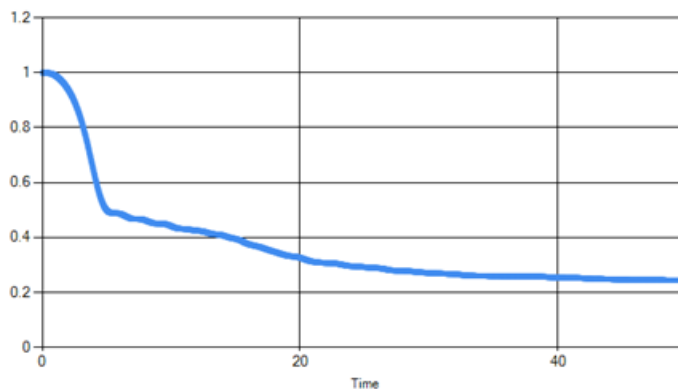


Рис.5 Середні квадрати модулів амплітуд з кроком 0.001.

Як видно на рисунках 3, 4, 5, результати моделювання з кроком 1.0 суттєво відрізняються від результатів з кроком 0.1, 0.01, які є досить подібними. Крок 0.1 є найбільшим з можливих кроків по часу, що не призводить до суттєвого спотворення результатів.

Якщо поглянемо на рівняння 1 та 2, то побачимо, що розрахування похідних амплітуд, швидкостей та координат за один крок по часу для усіх осциляторів, через наявність сум являє собою подвійний цикл, що дає складність N^2 . Для Рунге-Кутта 4-го порядку це перетворюється у $4N^2$ операцій. Задля пришвидшення виконання програми вирішено застосувати методи паралельних обчислень. Для виконання програми використовуються декілька процесорів, кожен

з яких отримує при розрахуванні похідної копії масивів амплітуд, швидкостей та координат, після чого вираховує похідну для своєї частини осциляторів.

4 Опис системи комп'ютерного моделювання

Моделювання руху осциляторів виконується на мові Fortran2008, компілятор – ifort, середовище розробки – Visual Studio 2019. Мова Fortran обрана через швидкість рохрахунків. У якості альтернативи розглядався с++, проте він не має, на відміну від Fortran, вбудованих комплексних чисел та операцій з ними.

Для пришвидження використані паралельні обчислення за допомогою бібліотеки MPI[12, 13], це дозволяє використовувати процесорну багатозадачність та суттєво скоротити час виконання програми, що дозволяє використовувати значно більшу кількість осциляторів під час моделювання. Враховуючи складність $4*N^2$, застосування чотирьох процесорів дозволяє досягти складності $4*(N/4)*N$, тобто скоротити час виконання у приблизно, якщо вирахувати час, що відводиться на обміни даними, чотири рази.

Для обробки результатів, візуалізації процесів та побудови графіків використана мова C#, середовище розробки – Visual Studio 2019, framework .net. Вибір обумовлений швидкістю розробки та зручністю і простотою налаштування.

Параметри експериментів записуються у файли, що вказуються при початку виконання програми. Одним із параметрів є частота «знімків» - кількість кроків через які зберігаються масиви амплітуд, швидкостей та координат. Крім цього, в якості параметрів є кроки по часу, кількість кроків по часу, константи амплітуди зовнішнього поля, залежності релятивістської маси електрона від швидкості, відношення маси зарядженої частинки до маси молекули. Кожен крок у окремий файл зберігаються такі показники як середній квадрат модуля амплітуди осцилятора, значення полів у лівій точці, правій та максимальній модуль полів на осі координат.

Саме ці файли обробляє програма відповідальна за відображення результатів.

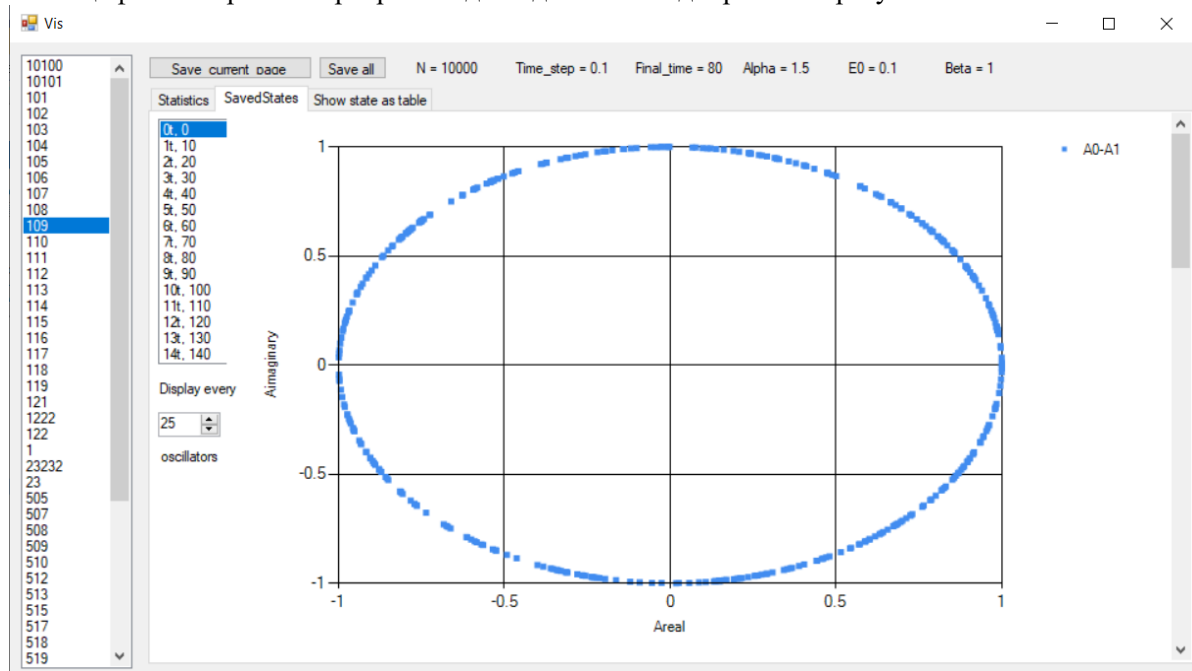


Рис.6 Інтерфейс програми обробки результатів

Планується об'єднання програми моделювання та програми перегляду результатів.

5 Результати обчислень

Отримана програмна система застосована для моделювання осциляторів з різними параметрами. Важливо зазначити, що початкові амплітуди розраховуються за допомогою генератору випадкових чисел. Так як використовується генератор з однаковим сідом, то і всі початкові амплітуди у різних обчисленнях є рівними. Було взято 20 тис. осциляторів з кроком 0.1, з часом τ від 0 до 30 або 40. Зокрема, чотири обчислення, де параметр α приймає значення 0.0, 0.5, 1.0, 1.5.

α	Середній квадрат модуля амплітуди	Поведінка значень полів у лівому краї, правому, максимальне за модулем
0.0	Залишається на рівні 1.0, з падінням приблизно на 0.02	Дуже низькі значення полів, приблизно на рівні меншому ніж 0.005
0.5	До $\tau = 20$ залишається на рівні 1.0, після падає до 0.8 на $\tau=40$	Пік усіх трьох значень у районі $\tau = 25$, після повільне затухання
1.0	До $\tau = 14$ на рівні 1.0, після стрімке падіння, приблизно на $\tau = 28$ зупиняється на рівні 0.8 з незначними змінами подалі	Пік у районі $\tau = 16$, $\tau = 18$ після стрімке затухання
1.5	До $\tau = 10$ 1.0, після поступове зменшення до 0.84	Пік в районі $\tau = 12$, $\tau = 14$, після стрімке затухання

Табл.1 Результати чотирьох обчислень з однаковими параметрами та початковими станами, але різними α .

При $\alpha = 0.0$ швидкості не змінюються, відповідно не змінюються координати, так як початкові швидкості є нульовими.

Також інтерес представляє вплив зовнішнього поля на поведінку системи.

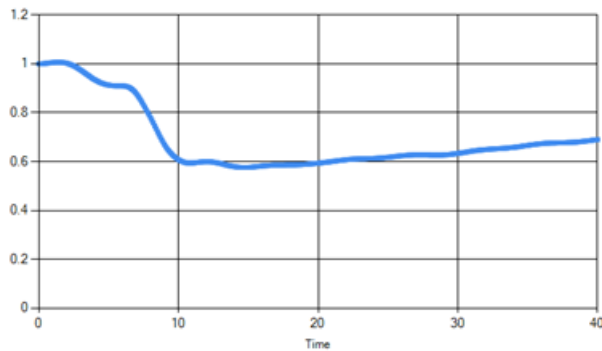


Рис.7 Середні квадрати модулів амплітуд осциляторів з амплітудою зовнішнього поля $E_0 = 0.1$

Як ми бачимо, через якийсь час амплітуди починають поступово збільшуватися. Збільшення відбувається і у випадку, коли швидкості та координати є сталими і середній квадрат модуля амплітуд сягає значення 1.2.

Зменшення відношення маси зарядженої частинки до маси молекули призводить до зменшення амплітуд. Порівняємо результати, отримані при різних параметрах відношення маси зарядженої частинки до маси молекули.

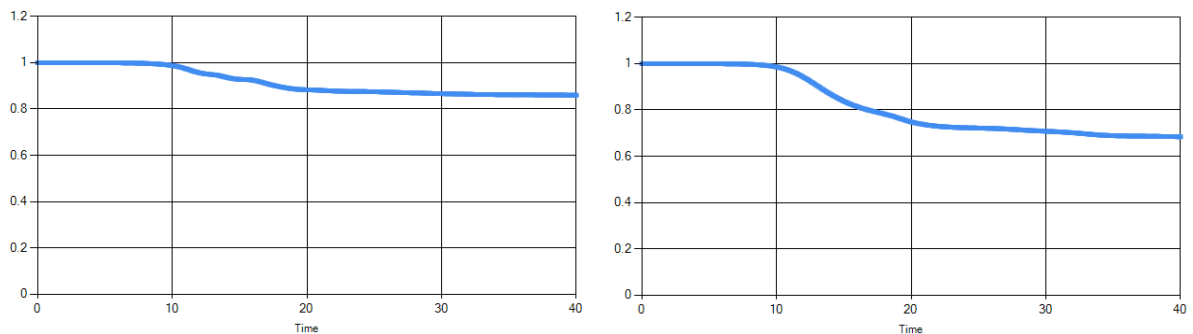


Рис.8 Середні амплітуди при $\alpha = 1.5$, зліва $\beta = 1.0$, справа $\beta = 0.1$

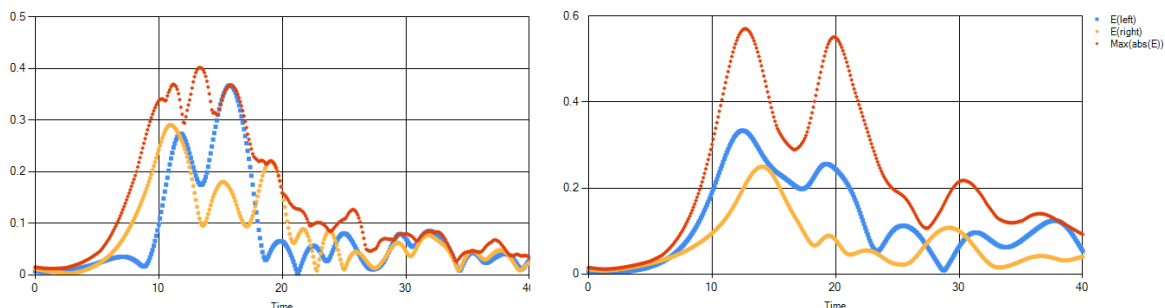


Рис.9 Значення полів при $\alpha = 1.5$, зліва $\beta = 1.0$, справа $\beta = 0.1$

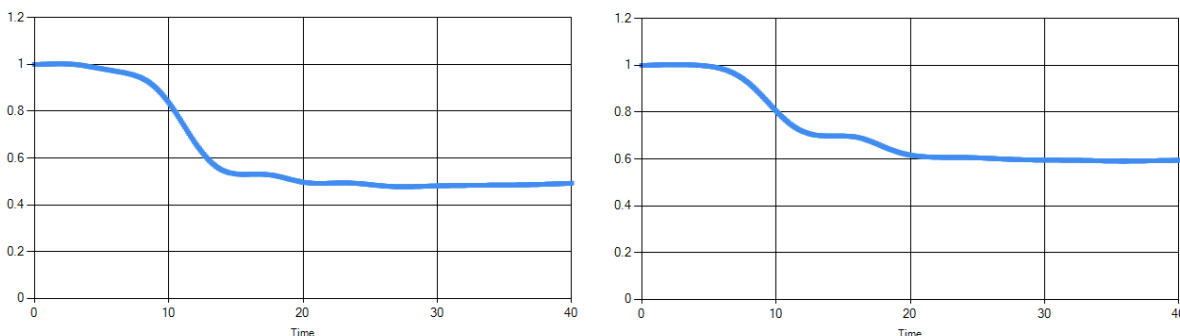


Рис.10 Середні амплітуди при $\alpha = 1.0$, $E_0 = 0.05$, зліва $\beta = 1.0$, справа $\beta = 0.001$

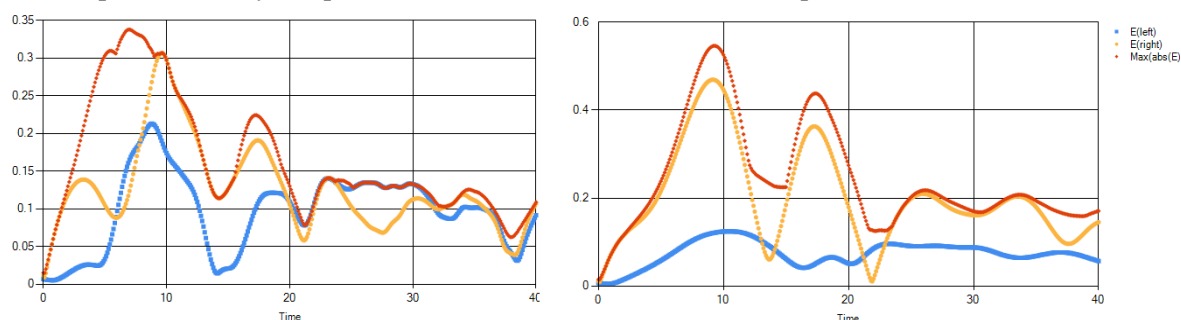


Рис.11 Значення полів при $\alpha = 1.0$, $E_0 = 0.05$, зліва $\beta = 1.0$, справа $\beta = 0.001$

Також є інтерес поглянути на положення осциляторів у певних станах, зокрема у моменти, коли досягається пік значення полів.

Розглянемо амплітуди та відношення швидкостей до координат у деяких станах при $\alpha = 1.5$, відсутності зовнішнього поля та $\beta = 0.1$.

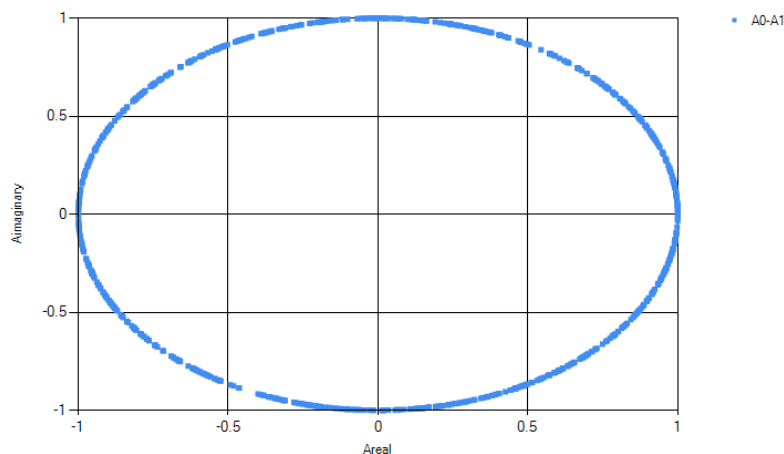


Рис.12 Амплітуди на початковому стані, ось x – реальна частина амплітуди, ось y – комплексна

Швидкості на початковому стані нульові, осцилятори рівномірно розподілені на осі координат.

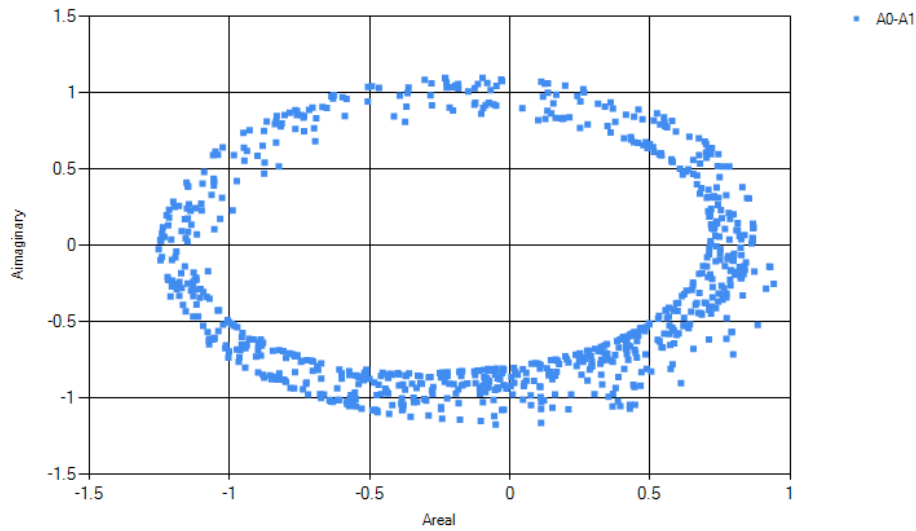


Рис.13 Амплітуди на кроці 100, час $\tau = 10$

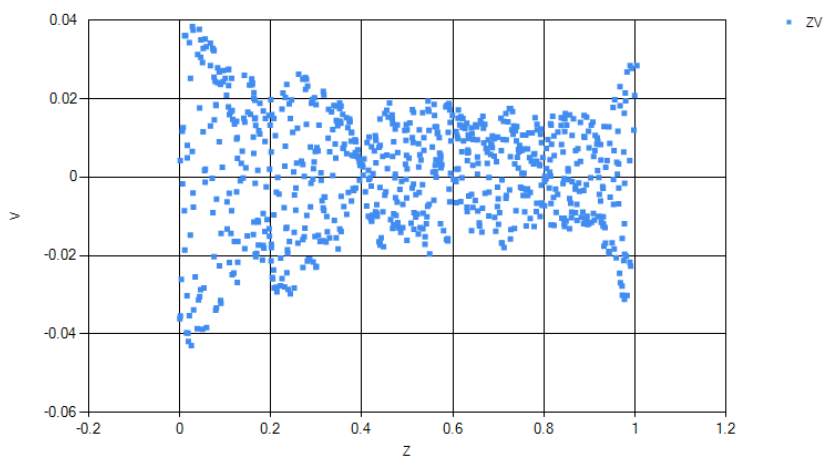


Рис.14 Відношення швидкостей до координат на кроці 100, час $\tau = 10$

Осцилятори поступово починають відхилятися від початкових положень та кола, яке вони формували в самому початку.

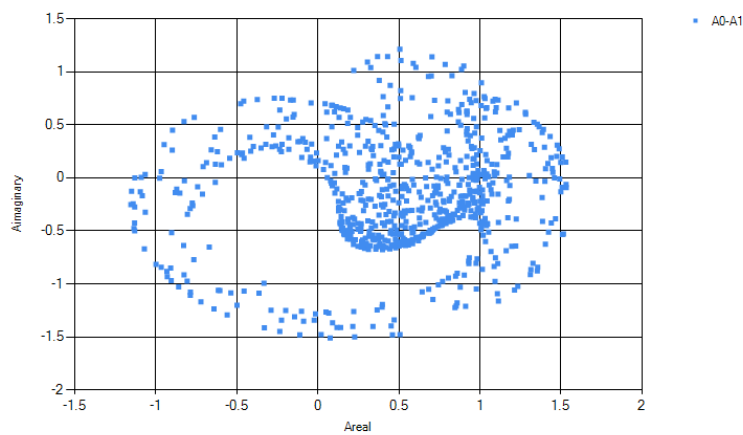


Рис.15 Амплітуди на кроці 130, час $\tau = 13$

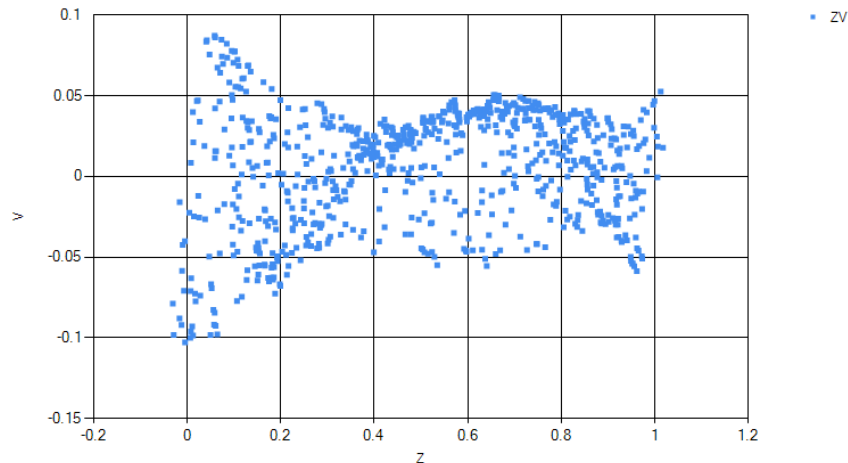


Рис.16 Відношення швидкостей до координат на кроці 130, час $\tau = 13$

Така зміна амплітуд стається приблизно у момент найвищих значень полів(рис.9).

6 Висновки

Розроблено програму на мові Fortran для моделювання описаних процесів, задля пришвидшення зроблено модифікацію програми з використанням методів паралельного обчислення, проведено її тестування.

Зроблено порівняння методів Рунге-Кутти четвертого та п'ятого порядків для вирішення задачі моделювання, з огляду на обрані критерії обраний четвертий порядок. Зроблено порівняння результатів, що отримуються при різних кроках методу Рунге-Кутти, обраний крок 0.1, що є найбільш можливим кроком при якому не відбувається спотворення точності.

Отримані результати моделювання для 20 тис. осциляторів при різних параметрах системи та їх комбінацій.

Створено інструмент для подальшого моделювання, розроблено програму для відображення результатів. На основі результатів планується створення програми для моделювання випромінювання та інтеграція усіх трьох програм у одному програмному комплексі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Briggs R.J. Electron-stream interaction with plasmas. Cambridge MIT Press. – 1964.
2. Кадомцев Б.Б., Михайловский А.Б., Тимофеев А.В. Волны отрицательной энергии в диспергирующих средах. ЖЭТФ. т.47. В.6. с.2266-2268. 1964.
3. Абрамович В.У., Шевченко В. И. К нелинейной теории диссипативной неустойчивости релятивистского пучка в плазме. ЖЭТФ. т.62. в.4. 1972. с. 1386-1391.
4. Сверхизлучение электронов в магнитном поле и нерелятивистский гиротрон / А. Г. Загородний, П. И. Фомин, А. П. Фомина // Доп. НАН України. 2004, № 4, – с. 75– 80.
5. Меньшиков Л. И. Сверхизлучение и связанные явления // УФН, 1999, т. 169, № 2, – с. 113 – 154.
6. Габитов И. П., Захаров В. Е., Михайлов А. В. Нелинейная теория суперфлюоресценции // ЖЭТФ, 1984, т. 86, – с. 1204–1216.
7. Андреев А. В., Емельянов В. И., Ильинский Ю. А. Коллективное спонтанное излучение (Излучение Дике) // УФН, 1980, том. 131, в. 4, – с. 655–694.
8. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский Вл. В. Волны поляризации и сверхизлучение в активных средах / УФН, 1989, т. 159, №2, – с. 193–260.
9. Dicke R. H. Coherence in Spontaneous Radiation Processes // Physical Review. 1954. Vol. 93. № 1. – P. 99–110.
10. Андронов А. А. К вопросу о затухании и нарастании плазменных волн // Изв. ВУЗов Радиофизика. 1961, т.4, №5, – с. 861– 866.
11. Kuklin, V.M., Poklonskiy, E.V. Dissipative instabilities and superradiation regimes (Classic models) // Problems of Atomic Science and Technology, 2021, 134(4), стр. 138–143

12. Open MPI Documentation URL: <https://www.open-mpi.org/doc/> (Last accessed: 09.11.2021)
13. MPI Documents URL: <https://www.mpi-forum.org/docs/> (Last accessed: 09.11.2021)

REFERENCES

1. Briggs R.J. Electron-stream interaction with plasmas. Cambridge MIT Press. – 1964.
2. Kadomtsev B.B, Mikhailovsky A.B, Timofeev A.V. Waves of negative energy in dispersive media. JETP. v.47. i.6. p.2266-2268. 1964. (in Russian).
3. Abramovich V.U, Shevchenko V.I The nonlinear theory of a dissipative instability of a relativistic beam in a plasma. JETP. v.62. i.4. 1972. p. 1386-1391. (in Russian).
4. Superradiance of electrons in a magnetic field and a nonrelativistic gyrotron / A.G Zagorodniy, P.I Fomin, A.P Fomina // Dop. NAS of Ukraine 2004, № 4, – с. 75– 80. (in Russian).
5. Menshikov L. I. Superradiance and related phenomena // Physics-Uspekhi, 1999, v. 169, № 2, – p. 113 – 154. (in Russian).
6. Gabitov I. P., Zakharov V. E., Mikhailov A. V. Nonlinear theory of superfluorescence // JETP, 1984, v. 86, – p. 1204–1216. (in Russian).
7. Andreev A. V., Emelyanov V. I., Ilinskiy Y. A. Collective spontaneous emission (Dicke radiation)// Physics-Uspekhi, 1980, v. 131, i. 4, – p. 655–694. (in Russian).
8. Zheleznyakov V.V, Kocharovsky V.V, Kocharovsky V.I. B. Polarization waves and superradiance in active media / Physics-Uspekhi, 1989, v. 159, №2, – p. 193–260. (in Russian).
9. Dicke R. H. Coherence in Spontaneous Radiation Processes // Physical Review. 1954. Vol. 93. № 1. – P. 99–110.
10. A.A. Andronov. On the issue of attenuation and growth of plasma waves // Izv. Universities. Radio-physics. 1961, v. 4, № 5, p. 861-866 (in Russian).
11. Kuklin, V.M., Poklonskiy, E.V. Dissipative instabilities and superradiation regimes (Classic models) // Problems of Atomic Science and Technology, 2021, 134(4), стр. 138–143
12. Open MPI Documentation URL: <https://www.open-mpi.org/doc/> (Last accessed: 09.11.2021)
13. MPI Documents URL: <https://www.mpi-forum.org/docs/> (Last accessed: 09.11.2021)