

УДК 532.5

Моделювання ламінарних течій нанорідин між двома коаксіальними циліндрами в мікрорідинних пристроях

Є.П. Куркчі, Н.М. Кізілова

Куркчі**Слизавета Павлівна**

студентка, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: kurkchi1998@gmail.com
<https://orcid.org/XXXXXXXXXXXXXX>

Кізілова**Наталія Миколаївна**

д.ф.-м.н., професор; професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, пл. Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: n.kizilova@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-9981-7616>

Роглядається ламінарна течія трьох незмішуваних нанорідин між двома співвісними циліндрами за рахунок постійного перепаду тиску на кінцях каналу. Пристінні шари можуть бути утворені за рахунок відштовхування наночастинок від шорсткостей стінок до ядра течії. Прийняті граничні умови прослизання другого порядку для швидкостей на стінках, а також умови безперервності швидкості і тангенціальних напружень на границях розділу між шарами. Отриманий аналітичний розв'язок системи для тиску і швидкостей руху рідин. Обчислені вирази для об'ємної витрати і напружень на стінках. Показано, що при деяких наборах параметрів моделі можна за рахунок тангенціального переносу імпульсу отримати значне підвищення витрати і зменшення в'язкої дисипації. Це дозволить підвищити ефективність різних мікрорідинних систем. Отримане також уточнення робочої формули для капілярного віскозиметра на випадок вимірювання в'язкості нанорідин. Виписаний аналітичний розв'язок може бути використаний для валідації чисельного коду для більш складних течій (перехідних, турбулентних) в схожій геометрії.

Ключові слова: нанорідини, мікрорідинні пристрої, ламінарна течія, дифузне розсіювання, гідравлічний опір.

Modeling of laminar flows of nanofluids between two coaxial cylinders in microfluidic devices

Kurkchi Yelizavieta*student*

V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

Kizilova Nataliya

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Professor of the Department of Applied Mathematics

V.N. Karazin Kharkov National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine

The laminar flow of three immiscible nanofluids between two coaxial cylinders due to a constant pressure drop at the inlet and outlet of the channel is considered. Experimental studies of the flows of different nanofluids through the tubes and channels of microfluidic devices have shown that the measured relationships between the pressure drop and volumetric flow do not correspond to the calculations of the corresponding Poiseuille flows in the same geometry due to tangential momentum transfer during diffuse scattering of nanoparticles on the wall roughness. When the characteristic roughness scale has the same order as the particle size, the scattering becomes significant in both dilute gases and suspensions of nanoparticles. Accordingly, the solution of the problem was obtained with the second order velocity slip boundary conditions at the rough walls. The presence of wall layers with a constant thickness and different viscosities is associated with the repulsion of the nanoparticles from the walls into the core of the flow. At the interfaces between the layers, the continuity conditions for velocities and tangential stresses were accepted. An analytical solution of the system for pressure and velocities of the fluids is obtained. Expressions for volumetric flow and wall stresses are calculated. It is shown that for some sets of model parameters it is possible to obtain a significant increase in the flow rate and decrease in viscous dissipation due to tangential momentum transfer at the walls. The effect could increase the efficiency of various microfluidic systems. The formula for the capillary viscometer in the case of measuring the viscosity of nanofluids was also obtained. The derived analytical solution can be used for validation of numerical codes for more complex flows (transient, turbulent) in similar geometries.

Keywords: nanofluids, microfluidic devices, laminar flow, diffuse scattering, hydraulic resistance.

Моделирование ламинарных течений наножидкостей между двумя коаксиальными цилиндрами в микрожидкостных устройствах

Куркчи

Елизавета Петровна

Кизилова

Наталья Николаевна

студентка,

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 6, Харків-22, Україна, 61022

д.ф.-м.н., профессор; профессор кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, пл. Свободы, 6, Харків-22, Україна, 61022

Рассматривается ламинарное течение трех несмешиваемых наножидкостей между двумя соосными цилиндрами за счет постоянного перепада давления на концах канала. Пристенные слои могут быть образованы за счет отталкивания наночастиц от шероховатостей стенок к ядру течения. Приняты граничные условия проскальзывания второго порядка для скоростей на стенках, а также условия непрерывности скоростей и тангенциальных напряжений на границах раздела между слоями. Получено аналитическое решение для давления и скоростей движения жидкостей, а также формулы для объемного расхода и напряжений на стенках. Показано, что при некоторых наборах параметров модели можно за счет тангенциального переноса импульса получить значительное повышение расхода и уменьшения в'язком диссипации. Это позволит повысить эффективность различных микрожидкостных систем. Получено также уточнение рабочей формулы для капиллярного вискозиметра на случай измерения вязкости наножидкостей. Выписанное аналитическое решение может быть использовано для валидации численного кода для более сложных течений (переходных, турбулентных) в сходных геометриях.

Ключевые слова: *наножидкости, микрожидкостные устройства, ламинарное течение, диффузное рассеяние, гидравлическое сопротивление.*

1 Вступ

В останні роки активно досліджуються тверді та рідкі наноматеріали, які складаються з частинок з розмірами ~5-500 нм і мають унікальні фізико-хімічні властивості в порівнянні зі звичайними матеріалами. Це висока міцність, теплопровідність, електропровідність, оптичні та ін. властивості, які досягаються за рахунок дуже високого співвідношення між поверхнею і об'ємом, що приводить до значної хімічної, фізичної, біологічної активності поверхонь наночастинок, нановолокон та інших наноконпонент [1,2]. Нанорідини - це суспензії твердих наночастинок (нанокристалів, наносфер, нанотрубок, фулеренів, та ін) в рідині (воді, маслі і т.д.). За рахунок наявності наночастинок нанорідини також мають унікальні властивості. Такі рідини широко використовуються в системах охолодження мікродвигунів, нагріву малих об'ємів речовини, розділення сумішей і т.д. При течіях таких рідин на твердих поверхнях має місце дифузне розсіювання частинок (прослизання) з утворенням пристінного шару з більш низькою концентрацією наночастинок як технічних (Рис.1а), так і біологічних (Рис.1б) суспензій. Розсіювання і відсутність прилипання пов'язано з тим, що розмір шорсткості твердої поверхні порівняний з розміром наночастинок (Рис.2а). Експериментально було показано, що в нанорідинних пристроях об'ємна витрата і температура не відповідають теоретичним значенням, розрахованим за формулою Пуазейля для класичних в'язких рідин з використанням закону Фур'є для теплопровідності [3-6].

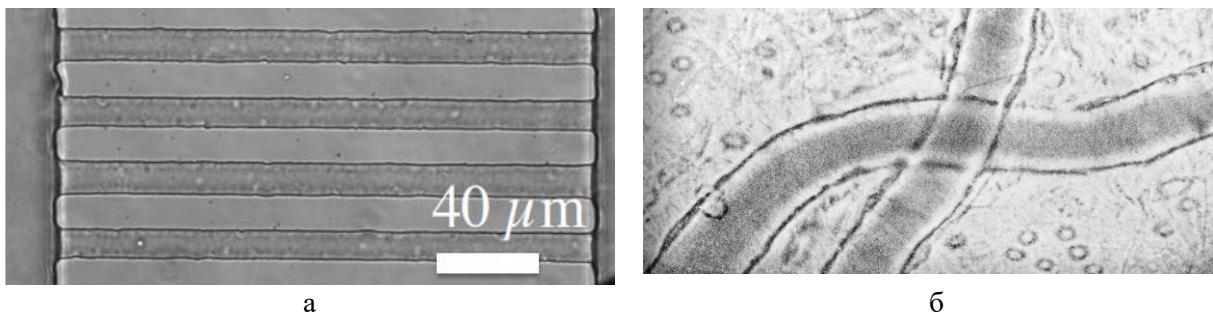


Рис.1 Мікрофотографії течій наносуспензій по каналам мікрорідинних пристроїв (а) і крізь деформівні трубки (б). Чітко видні прозорі пристінні шари, які майже вільні від частинок

Таким чином, течії нанорідин можна розглядати як шаруваті течії незмішуваних однорідних рідин з різними в'язкостями. В силу меншої концентрації частинок у стінок в'язкість пристінних шарів завжди менше в'язкості рідини в ядрі течії. При певних комбінаціях в'язкостей, шорсткостей та інших параметрів такі ефекти істотно впливають на параметри течії в трубках кругового, еліптичного, прямокутного, трикутного і трапецієподібного перетинів [1-3]. При течіях нанорідин між пластинами і коаксіальними циліндрами такі ефекти будуть ще більшими

за рахунок наявності двох і більше поверхонь с різними шорсткостями. Можливі відхилення значення об'ємної витрати Q при течії нанорідини від формули Пуазейля важливо наперед знати для планування роботи мікрорідинних пристроїв і підвищення їх ефективності. Відповідні поправки повинні бути внесені і в робочі формули віскозиментів на основі нанотрубок, які використовуються в лабораторіях і на виробництві нанорідин для визначення їх в'язкості по вимірюваним значенням Q [4]. Використання наближення шаруватої течії було раніше використано для теоретичного обґрунтування ефекту Фареуса [7] та для течій мікро- і нанорідин між паралельними пластинами [3]. У даній роботі досліджується розв'язок системи рівнянь Нав'є-Стокса для одновимірної течії трьох незмішуваних нанорідин між нерухомими коаксіальними циліндрами.

2 Постановка задачі

Розглядається одновимірна $\vec{v} = (v_r, v_\theta, v_x) = (0, 0, v)$ стаціонарна ($\partial/\partial t = 0$) вісесиметрична ($\partial/\partial \theta = 0$) ламінарна течія трьох незмішуваних нестисливих нанорідин з різними в'язкостями $\mu_{1,2,3}$ між двома співвісними циліндрами з радіусами R_1, R_2 довжини L під впливом різниці гідростатичних тисків P_1 і $P_2 < P_1$ (Рис.2б).

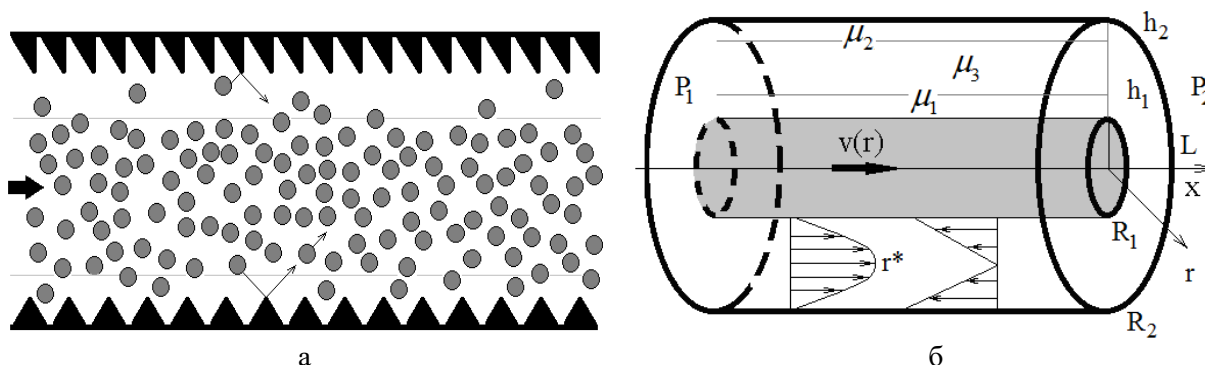


Рис.2 Схема утворення пристінних шарів (а) і схема задачі (б)

Рівняння Нав'є-Стокса в цьому випадку дають звичайне диференціальне рівняння 2-го порядку для швидкостей руху кожного шару

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv^{(j)}(r)}{dr} \right) = - \frac{\delta P}{\mu_j L} \quad (1)$$

де $j=1,2,3$, $\delta P = P_1 - P_2$.

Граничні умови на стінках за наявності дифузного розсіювання мають вигляд [1,2]

$$\left(v^{(1)} + \alpha_1 \frac{dv^{(1)}}{dr} + \beta_1 \frac{d^2 v^{(1)}}{dr^2} \right) \Big|_{r=R_1} = 0, \quad \left(v^{(2)} - \alpha_2 \frac{dv^{(2)}}{dr} + \beta_2 \frac{d^2 v^{(2)}}{dr^2} \right) \Big|_{r=R_2} = 0, \quad (2)$$

де $\alpha_1, \beta_1 > 0$ и $\alpha_2, \beta_2 > 0$ - параметри шорсткості внутрішнього и зовнішнього циліндрів.

На поверхнях розділів шарів виконуються умови безперервності швидкостей і зсувних напружень [8]

$$\left(v^{(1)} - v^{(3)} \right) \Big|_{y=R_1+h_1} = 0, \quad \left(v^{(2)} - v^{(3)} \right) \Big|_{y=R_2-h_2} = 0, \quad (3)$$

$$\left(\mu_1 \frac{dv^{(1)}}{dr} - \mu_3 \frac{dv^{(3)}}{dr} \right) \Big|_{y=R_1+h_1} = 0, \quad \left(\mu_2 \frac{dv^{(2)}}{dr} - \mu_3 \frac{dv^{(3)}}{dr} \right) \Big|_{y=R_2-h_2} = 0.$$

Поле тиску в шарах має лінійне розподілення $P(x) = \delta P x / L + P_1$, яке відповідає граничним умовам на вході і виході з каналу

$$P|_{x=0} = P_1, P|_{x=L} = P_2. \quad (4)$$

Треба знайти поле швидкостей, об'ємну витрату течії

$$Q = 2\pi \left(\int_{R_1}^{R_1+h_1} rv^{(1)}(r)dr + \int_{R_1+h_1}^{R_2-h_2} rv^{(3)}(r)dr + \int_{R_2-h_2}^{R_2} rv^{(2)}(r)dr \right), \quad (5)$$

поле механічних напружень, в тому числі зсувні напруження на стінках

$$\tau_1 = \tau(R_1) = -\mu_1 \left. \frac{dv^{(1)}(r)}{dr} \right|_{r=R_1}, \quad \tau_2 = \tau(R_2) = -\mu_2 \left. \frac{dv^{(2)}(r)}{dr} \right|_{r=R_2}, \quad (6)$$

гідралічний опір каналу

$$Z = \frac{\delta P}{Q} \quad (7)$$

і поправку до робочої формули капілярного віскозиметру [5] на випадок нанорідини

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{Z}{8L}, \quad (8)$$

а також виявити, при яких наборах параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ при відомих значеннях $(R_1, R_2, h_1, h_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \delta P/L)$ можна підвищити витрату течії Q за рахунок тангедійного переносу частинок на шорстких стінках. Для течій нанорідин по трубкам кругового перетину і між циліндрами такі узагальнення були проведені в [2], а для шаруватих течій між паралельними пластинами – в [3].

3 Розв'язок задачі

Інтегрування (1) дає для швидкостей кожного шару

$$v^{(1)}(r) = C_1 + C_2 \ln(r) - k\mu_{31}r^2, \quad v^{(2)}(r) = C_3 + C_4 \ln(r) - k\mu_{32}r^2, \quad v^{(3)}(r) = C_5 + C_6 \ln(r) - kr^2, \quad (9)$$

де $k = \frac{\delta P}{2\mu_3 L}, \mu_{31} = \frac{\mu_3}{\mu_1}, \mu_{32} = \frac{\mu_3}{\mu_2}$.

Підстановка (9) до (2), (3) дає шість алгебраїчних рівнянь для визначення постійних інтегрування C_{1-6} , розв'язок яких дає для констант наступні вирази

$$C_6 = \frac{k(\mu_{31}A - \mu_{32}B + R_{h1}^2 - R_{h2}^2)}{(1 - \mu_{31}) \ln R_{h1} + \mu_{31}B_1 - (1 - \mu_{32}) \ln R_{h2} - \mu_{32}B_2},$$

$$C_5 = \mu_{31}kA_1 + k(1 - \mu_{31})R_{h1}^2 - C_6((1 - \mu_{31}) \ln R_{h1} + \mu_{31}B_1), \quad (10)$$

$$C_4 = \mu_{32}C_6, C_3 = \mu_{32}(kA_2 - B_2C_6), C_2 = \mu_{31}C_6, C_1 = \mu_{31}(kA_1 - B_1C_6),$$

де $R_{h1} = R_1 + h_1, R_{h2} = R_2 - h_2, A = A_1 - R_{h1}^2, B = A_2 - R_{h2}^2, A_1 = R_1^2(1 + 2\alpha_1^\circ + 2\beta_1^\circ),$

$A_2 = R_2^2(1 - 2\alpha_2^\circ + 2\beta_2^\circ), B_1 = \ln R_1 + \alpha_1^\circ - \beta_1^\circ, B_2 = \ln R_2 - \alpha_2^\circ - \beta_2^\circ,$

$\alpha_{1,2}^\circ = \alpha_{1,2} / R_{1,2}, \beta_{1,2}^\circ = \beta_{1,2} / R_{1,2}^2$ - безрозмірні значення шорсткостей.

У випадку $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu, h_1 = h_2 = 0$ (9)-(10) переходять у розв'язок задачі для однорідної нанорідини [2]

$$v(r) = \frac{\delta PR_1^2}{4\mu L} (A + B \ln(r) - r^2), \quad (11)$$

$$A = \frac{(1 + 2\alpha_1^\circ + 2\beta_1^\circ)(\ln R_2 - \alpha_2^\circ) - \rho^2(1 - 2\alpha_2^\circ + 2\beta_2^\circ)(\ln R_1 + \alpha_1^\circ)}{\ln(\rho) + \alpha_1^\circ - \alpha_2^\circ},$$

$$B = \frac{\rho^2 - 1 + 2(\alpha_1^\circ - \beta_1^\circ - \rho^2(\alpha_2^\circ + \beta_2^\circ))}{\ln(\rho) + \alpha_1^\circ - \alpha_2^\circ / \alpha_2^\circ}, \quad \rho = \frac{R_2}{R_1}.$$

При $\alpha_{1,2}^\circ = \beta_{1,2}^\circ = 0$ з (11) отримаємо відому формулу для Пуазейлівської течії в'язкої рідини між коаксіальними циліндрами

$$v(r^\circ) = \frac{\Delta PR_1^2}{4\mu L} \left(1 - r^{\circ 2} + \frac{\rho^2 - 1}{\ln(\rho)} \ln(r^\circ) \right), \quad (12)$$

де $r^\circ = r^\circ / R_1$ - безрозмірна радіальна координата.

Швидкість (12) має максимальне значення (Рис.2б)

$$v_{\max} = \frac{\Delta PR_1^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{\rho^2 - 1}{2\ln(\rho)} \left(1 - \ln \frac{\rho^2 - 1}{\ln(\rho)} \right) \right) \quad \text{при } r^* = \sqrt{\frac{\rho^2 - 1}{2\ln(\rho)}}. \quad (13)$$

З (5), (9), (10) отримуємо вираз для об'ємної витрати тришарової течії

$$\begin{aligned} Q_{3-1} = & k(\mu_{31}R_1^4 - \mu_{32}R_2^4 + (1 - \mu_{31})R_{h1}^4 - (1 - \mu_{32})R_{h2}^4) + \\ & + (C_2(1 - 2\ln R_1) - 2C_1)R_1^2 - (C_4(1 - 2\ln R_2) - 2C_3)R_2^2 + \\ & + R_{h1}^2(2C_1 + 2(C_2 - C_6)\ln R_{h1} - C_2 - 2C_5 + C_6) - R_{h2}^2(2C_3 + 2(C_4 - C_6)\ln R_{h2} - C_4 - 2C_5 + C_6). \end{aligned} \quad (14)$$

У випадку однорідної нанорідини ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$) з (14) отримуємо вираз

$$Q_s = k(R_1^4 - R_2^4) + (C_7(1 - 2\ln R_1) - 2C_8)R_1^2 - (C_7(1 - 2\ln R_2) - 2C_9)R_2^2 - 2R_2^2(C_9 - C_8), \quad (15)$$

де $C_7 = \frac{k(A_1 - A_2)}{B_1 - B_2}$, $C_8 = kA_1 - B_1C_7$, $C_9 = kA_2 - B_2C_7$, який співпадає з отриманим в [3].

При $\alpha_{1,2}^\circ = \beta_{1,2}^\circ = 0$ з (15) маємо відомий аналітичний роз'язок для течії Пуазейля

$$Q_{n-s} = Q_P \left(\rho^4 - 1 - \frac{(\rho^2 - 1)^2}{\ln(\rho)} \right), \quad (16)$$

де $Q_P = \frac{\delta P}{8\mu L} \pi R_1^4$ - формула Пуазейля для об'ємної витрати кластичної в'язкої рідини у трубці з круговим перерізом радіусу R_1 , а індекси $s, n-s$, $3-1$ відносяться до течій з прослизанням (slip), непрослизанням (no slip) і тришаровому (3-layer).

Для напружень зсуву в тришаровій течії з (6), (9), (10) отримуємо

$$\tau_{3-1,1} = \mu_3 \left(2kR_1 - \frac{C_6}{R_1} \ln(r) \right), \quad \tau_{3-1,2} = \mu_3 \left(2kR_2 - \frac{C_6}{R_2} \ln(r) \right). \quad (17)$$

У випадку однорідної нанорідини ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$) з (17) маємо вирази [3]

$$\tau_{s,1} = \mu \left(2kR_1 - \frac{C}{R_1} \ln(r) \right), \quad \tau_{s,2} = \mu \left(2kR_2 - \frac{C}{R_2} \ln(r) \right), \quad (18)$$

де $C = k \frac{\mu(A - B) + R_1^2(1 - \rho^2)}{\mu(B_1 - B_2) + (\mu - 1)\ln \rho}$, які раніше були отримані в [2] для часткового випадку

поверхонь з однаковими шорсткостями $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2 \neq 0$.

При $\alpha_{1,2}^\circ = \beta_{1,2}^\circ = 0$ з (18) маємо відомий аналітичний роз'язок для напружень зсуву

$$\tau(r^\circ) \equiv -\mu \frac{dv}{dr} = \frac{\tau_P}{2\rho} \left(\frac{\rho^2 - 1}{r^\circ \ln(\rho)} - 2r^\circ \right), \quad (19)$$

$$\tau_1 = \tau_P \left(\frac{\rho - \rho^{-1}}{2\ln(\rho)} - \rho^{-1} \right), \quad \tau_2 = \tau_P \left(\frac{1 - \rho^{-2}}{2\ln(\rho)} - 1 \right), \quad (20)$$

де $\tau_P = \delta PR_2 / 2L$ - напруження на стінці трубки з радіусом R_2 в класичній течії Пуазейля.

З (14)-(16) можна обчислити безрозмірні співвідношення для об'ємних витрат Q_{3-1} / Q_s і Q_s / Q_{n-s} , а з (17), (18), (20) - безрозмірні напруження тертя на стінках

$\tau_{3-1,1} / \tau_{s,1}$, $\tau_{3-1,2} / \tau_{s,2}$, $\tau_{s,1} / \tau_{n-s,1}$, $\tau_{s,2} / \tau_{n-s,2}$, які тут не наведені через громіздкість. Аналіз цих безрозмірних виразів показав, що при деяких комбінаціях параметрів моделі можна отримати прискорення руху як за рахунок наявності трьох шарів нанорідин ($Q_{3-1} / Q_s > 1$), так і тангенціального переносу імпульсу під час дифузного розсіювання ($Q_s / Q_{n-s} > 1$). При цьому відповідно зменшуються витрати енергії течії на в'язке тертя ($|\tau_{3-1,1}| / |\tau_{s,1}| < 1$, $|\tau_{3-1,2}| / |\tau_{s,2}| < 1$, $|\tau_{s,1}| / |\tau_{n-s,1}| < 1$, $|\tau_{s,2}| / |\tau_{n-s,2}| < 1$). Підстановка (14) і (15) в (7) дає вирази для гідравлічного опору тришарової течії Z_{3-1} і однорідної нанорідини Z_s , підстановка яких в (8) дає робочі формули для віскозиметру з урахуванням ($\mu_{\text{eff},3-1} = k / 4Q_{3-1}$) і без урахування ($\mu_{\text{eff},s} = k / 4Q_s$) ефекту Фареуса, тобто наявності пристінних шарів тієї ж рідини, але зі значно меншою концентрацією наночастинок.

4 Чисельні розрахунки і обговорення результатів

Проведемо чисельні розрахунки впливу пристінних шарів на безрозмірні об'ємну витрату і напруження тертя на стінках при наступних значеннях параметрів моделі, які властиві деяким мікрореометрам і нанорідинам на основі води [1-3]: $R_1 = 20$ нм, $R_2 = 60$ нм, $L = 500$ нм, $\delta P = 1$, $\mu_3 = 1$, $\mu_2 = 0.8$, $\mu_1 = 0.8$ сПз, $h_1 = 0.2 * (R_2 - R_1)$ нм, $h_2 = 0.2 * (R_2 - R_1)$ нм. Для набору значень $\{\alpha^\circ_1, \beta^\circ_1, \alpha^\circ_2, \beta^\circ_2\}$ прийемо, відповідно до [2], діапазони $\alpha^\circ_{1,2} \in [1, 1.5]$, $\beta^\circ_{1,2} \in [-0.5, 1.5]$. Результати розрахунків наведені на Рис.3,4. Безрозмірні залежності об'ємної витрати течії трьох шарів нанорідин відносно однорідної нанорідини від параметрів моделі показують, що при $\mu_{31}, \mu_{32} > 1$ ця залежність зростає при різних значеннях $\alpha^\circ_{1,2}, \beta^\circ_{1,2}$ (Рис.3а,б). Зі зростанням $h_{1,2} / (R_2 - R_1)$ об'ємна витрата зростає. Цей ефект властивий і звичайним рідинам і пов'язаний з роллю пристінних шарів як мастильних [8]. При цьому чим нижче в'язкість і більше товщина шарів, тим менше тертя на стінках (Рис.4а,б) і вище об'ємна витрата. Більш складний вплив

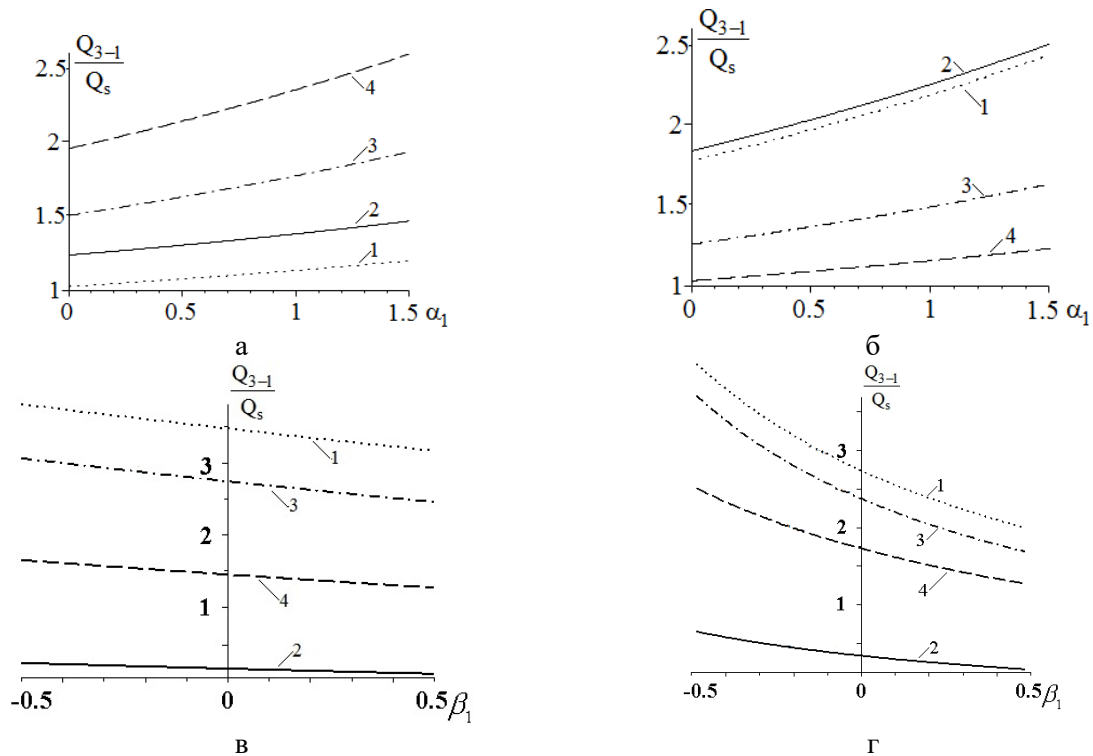


Рис.3 Залежності $Q_{3-1}(\alpha_1) / Q_s(\alpha_1)$ (а,б) і $Q_{3-1}(\beta_1) / Q_s(\beta_1)$ (в,г) при $\alpha_2 = 1.3$, $\beta_2 = 1.25$ (а,в) і $\alpha_2 = 1.2$, $\beta_2 = 0.1$ (б,г); криві 1-4 відповідають значенням $\beta_1 = -0.5; 1.5; 0; 1.2$ (а,б) і $\alpha_1 = 0.01; 0.5; 1; 1.5$ (в,г).

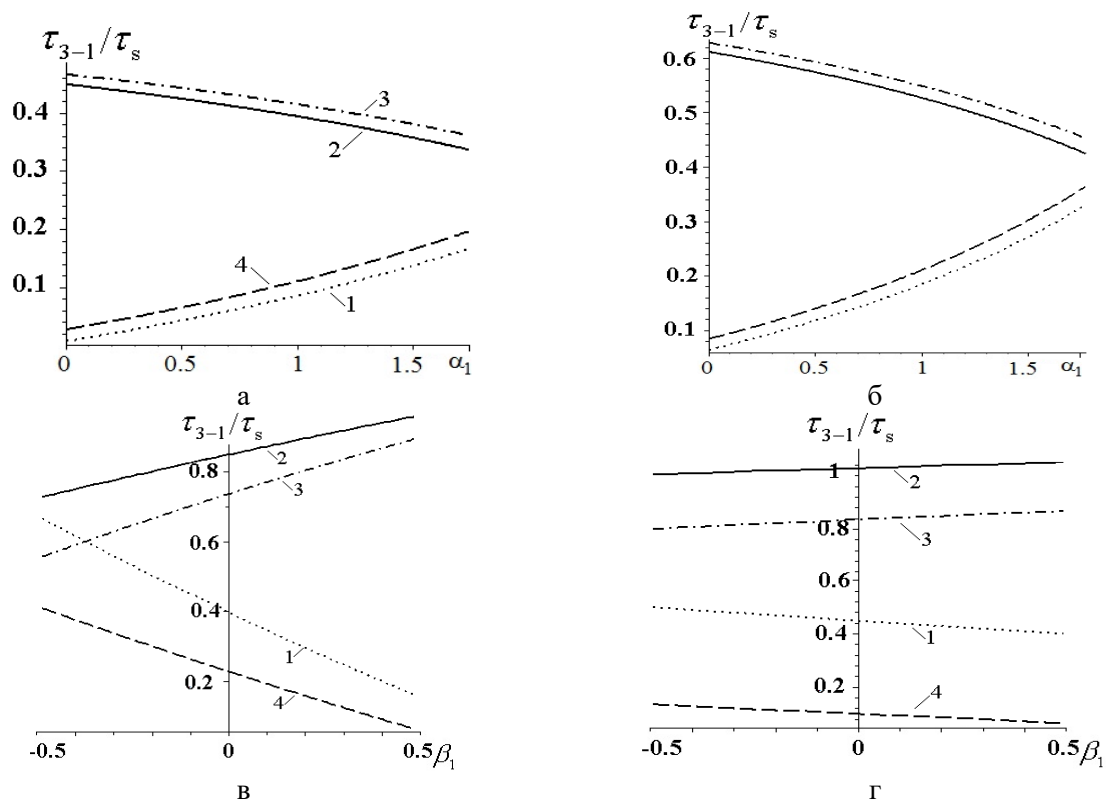


Рис.3 Залежності $|\tau_{3-1}/\tau_s|(\alpha_1)$ (а,б) і $|\tau_{3-1}/\tau_s|(\beta_1)$ (в,г) при $\alpha_2 = 1.3, \beta_2 = 1.25$ (а,в) і $\alpha_2 = 1.2, \beta_2 = 0.1$ (б,г); 1-4 відповідають тим же значенням, що на Рис.3.

оказують параметри шорсткості стінки (Рис.3в,г). Зі зростанням швидкості прослизання $\alpha_{1,2}^\circ$ зменшується тертя (Рис.4) і зростає витрата (Рис.3), але максимальне збільшення витрати досягається при різних комбінаціях $\alpha_{1,2}^\circ, \beta_{1,2}^\circ$ (Рис.3а і Рис.3б). Зміна кривизни профілю швидкості прослизання $\beta_{1,2}^\circ$ приводить до лінійних або нелінійних змін витрати в залежності від знаку $\beta_{1,2}^\circ$ і комбінацій величин параметрів $\alpha_{1,2}^\circ, \beta_{1,2}^\circ$. При $\beta_{1,2}^\circ = 0$ отримаємо залежності для мікрорідин, таких як суспензії біологічних клітин [3,7].

Чисельні розрахунки залежностей Q_{3-1} і τ_{3-1} показали незначну чутливість до інших параметрів моделі. Аналіз залежностей (7),(8) підтверджує зменшення гідравлічного опору і зростаючу залежність $Q_{3-1}(R_2 - R_1)$, що відповідає тиксотропній поведінці мікро- і нанорідин, що задовольняє даним [7].

5 Висновки

Було показано, що в течіях мікро- і нанорідин за рахунок дифузійного відбиття на шорстких стінках зменшується напруження тертя і підвищується об'ємна витрата рідини. Шляхом комп'ютерних симуляцій отримані набори параметрів моделі, які призводять до найбільш значних змін витрати. Отримані розв'язки системи рівнянь Нав'є-Стокса з умовами прослизання другого порядку на стінках, які можуть ефективно використовуватися для валідації чисельного коду наближеного розв'язання задачі в більш складній постановці, для тестування скінченноелементних моделей з ускладненою геометрією або іншим режимом течії, для попередньої оцінки характеру розв'язка. Отримані результати дозволяють уточнити робочі формули для капілярних віскозиметрів, в яких із вимірюваних залежностей об'ємна витрата – перепад тиску розраховується коефіцієнт в'язкості мікро/нанорідини з невідомими реологічними властивостями.

ЛІТЕРАТУРА

1. Gad-el-Hak M. MEMS Introduction and fundamentals. The MEMS Handbook, 2-nd ed., Taylor & Francis Group, LLC, 2006. 1720 p. <https://doi.org/10.1201/9780429103872>
2. Karniadakis G.E., Garimella S., Li D., Kolin S., King M.N. Heat transfer and fluid flow in minichannels and microchannels. Elsevier, 2006. 450 p. <https://www.elsevier.com/books/heat-transfer-and-fluid-flow-in-minichannels-and-microchannels/kandlikar/978-0-08-044527-4>
3. Cherevko V., Kizilova N. Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip boundary conditions. Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications, Springer Proceedings in Physics, vol. 183, O. Fesenko, L. Yatsenko (eds.). 2017. P. 207–230. <https://www.springer.com/gp/book/9783319562445>
4. Ting K., Mozumder A.K., Das P.K. Effect of surface roughness on heat transfer and entropy generation of mixed convection in nanofluid. *Physics of Fluids*. 2019. Vol. 31, 093602. <https://doi.org/10.1063/1.5111104>
5. Qin Y., Zhao J., Liu Zh., et al. Study on effect of different surface roughness on nanofluid flow in nanochannel by using molecular dynamics simulation. *Journal of Molecular Liquids*. 2021, 14, 117148. <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2021.117148>
6. Patil P.M., Doddagoudar S.H., Hiremath P.S. Impacts of surface roughness on mixed convection nanofluid flow with liquid hydrogen/nitrogen diffusion. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. 2019. Vol. 29(6), pp. 2146-2174. <https://doi.org/10.1108/HFF-11-2018-0703>
7. Батюк Л. В., Кізілова Н. М. Моделювання ламінарних течій суспензій еритроцитів крові як бінгамівських мікрорідин. *Вісник КНУ імені Т.Г.Шевченка. Серія «Фізико-математичні науки»*. 2017. Вип. 4. С.23-28. <https://bphm.knu.ua/index.php/bphm/issue/view/56>
8. Регирер С.А. Лекции по биологической механике. М.: Изд-во МГУ. 1980. 144с. https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_001049464/

REFERENCES

1. M. Gad-el-Hak, *MEMS Introduction and fundamentals. The MEMS Handbook*, 2-nd ed., Taylor & Francis Group, LLC, 2006, 1720 p. <https://doi.org/10.1201/9780429103872>
2. G.E. Karniadakis, S. Garimella, D. Li, S. Kolin, M.N. King, *Heat transfer and fluid flow in minichannels and microchannels*. Elsevier, 2006, 450 p. <https://www.elsevier.com/books/heat-transfer-and-fluid-flow-in-minichannels-and-microchannels/kandlikar/978-0-08-044527-4>
3. V. Cherevko, N. Kizilova, “Complex flows of immiscible microfluids and nanofluids with velocity slip boundary conditions.” In: *Nanophysics, Nanomaterials, Interface Studies, and Applications, Springer Proceedings in Physics*, vol. 183, O. Fesenko, L. Yatsenko (eds.), 2017, P. 207–230. <https://www.springer.com/gp/book/9783319562445>
4. K. Ting, A.K. Mozumder, P.K. Das, “Effect of surface roughness on heat transfer and entropy generation of mixed convection in nanofluid”, *Physics of Fluids*, 2019, Vol. 31, 093602. <https://doi.org/10.1063/1.5111104>
5. Y. Qin, J. Zhao, Zh. Liu, et al., “Study on effect of different surface roughness on nanofluid flow in nanochannel by using molecular dynamics simulation”, *Journal of Molecular Liquids*. 2021, 14, 117148. <https://doi.org/10.1016/j.molliq.2021.117148>
6. P.M. Patil, S.H. Doddagoudar, P.S. Hiremath, “Impacts of surface roughness on mixed convection nanofluid flow with liquid hydrogen/nitrogen diffusion”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2019, Vol. 29, No. 6, pp. 2146-2174. <https://doi.org/10.1108/HFF-11-2018-0703>
7. L. Batyuk, N. Kizilova, “Modeling of laminar flows of erythrocyte suspensions as Bingham fluids”, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series: Physics and Mathematics*, 2017, Vol.56(4), P. 23-28 [in Ukrainian]. <https://bphm.knu.ua/index.php/bphm/issue/view/56>
8. S.A. Regirer, ‘Lectures on biological mechanics’, Moscow State University Press, 1980, 144 p. [in Russian]. https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_001049464/