

УДК 519.6: 621.382.233

Прогнозування стаціонарного розподілу носіїв заряду в активній області $p-i-n$ структур методами теорії збурень

А.Я. Бомба, І.П. Мороз

Бомба Андрій Ярославович

*доктор технічних наук, професор; професор кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики
Національний університет водного господарства та природокористування,
вул. Соборна, 11, м. Рівне, Україна, 33028
e-mail: abomba@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0001-5528-4192>*

Мороз Ігор Петрович

*кандидат фізико-математичних наук, доцент; докторант кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики
Національний університет водного господарства та природокористування,
вул. Соборна, 11, м. Рівне, Україна, 33028
e-mail: igor_moroz@yahoo.com
<https://orcid.org/0000-0001-6381-2266>*

Розроблено методику прогнозування стаціонарного розподілу концентрації електронно-діркової плазми в i -області поверхнево-орієнтованих $p-i-n$ структур, яка забезпечує можливість з достатнім ступенем адекватності описувати стан плазми не тільки всередині активної області діода (відтворюючи результати застосування наближення амбіполярної дифузії), але й, що важливо, поблизу зон $p-i$ - та $n-i$ - контактів. Відповідна математична модель сформована у вигляді нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі для системи рівнянь неперервності струму носіїв заряду та Пуассона. Отримано її наближений розв'язок у вигляді відповідних асимптотичних рядів за степенями малого параметра. Проведено комп'ютерний експеримент.

Ключові слова: метод збурень, сингулярно збурена крайова задача, асимптотичний ряд, примежова функція, дифузійно-дрейфовий процес, інтегральна поверхнево-орієнтована $p-i-n$ структура.

Prediction of the charge carriers stationary distribution in the active region of the $p-i-n$ structures by the perturbation theory methods

A. Bomba, I. Moroz

Bomba Andriy

*PhD, Doctor of Science, Professor, Prof. of Department of Computer Science and Applied Mathematics
National University of Water and Environmental Engineering, 11 Soborna str.,
Rivne, Ukraine, 33028*

Moroz Igor

*PhD, As. Professor, Doctoral Student of Department of Computer Science and Applied Mathematics
National University of Water and Environmental Engineering, 11 Soborna str.,
Rivne, Ukraine, 33028*

The $p-i-n$ diode is an electronic device that is widely used for switching a microwave signals. The theory of the $p-i-n$ diode is based on linear mathematical models that satisfactorily explain the diodes switching properties at low microwave power levels. The developed methods for modeling the corresponding devices on $p-i-n$ diodes turned out to be untenable when studying the properties of diodes and diode structures under the with high-power microwave signals (typical for high-power switches and protective devices). Here are faced with the need to take into account the mutual influence of diffusion-drift, wave, thermal processes, in which the nonlinear components of the mathematical models will dominate. The development of the computer technology and the corresponding mathematical methods (for example, the perturbation theory methods) determines the possibility of improving the existing $p-i-n$ diodes mathematical models and the possibility of the new approaches developing to the analysis of the nonlinear processes in $p-i-n$ diodes and similar electronic devices. The goal of this paper is to improve the mathematical model and methods for predicting the electron-hole plasma stationary distribution in the active region of surface-oriented $p-i-n$ structures based on the use of the boundary functions method. The mathematical model of the electron-hole plasma stationary distribution in the integrated surface-oriented $p-i-n$ structures active region is constructed in the form of the nonlinear

singularly perturbed boundary value problem for the system of equations of the charge carriers current continuity and Poisson. An approximate solution of the corresponding boundary value problem is found in the form of the asymptotic series leading terms in powers of a small parameter. A scheme for finding the problem solution is proposed, which automatically includes the classical formulations of problems for modeling the $p-i-n$ structures characteristics and allows you to make significant amendments to the solution. This ensures an increase in the level of adequacy of modeling and understanding of the features of a number of physical processes (diffusion-drift, recombinant, injection) in the $p-i-n$ diodes active region. We consider the proposed approach a promising tool for studying nonlinear thermal, diffusion-drift, generation-recombination stationary and non-stationary processes occurring in the $p-i-n$ structures elements under the action of the external microwave radiation, and predicting new physical effects in the studied systems, for example, due to the influence of local surface and bulk defects on the $p-i-n$ structures characteristics.

Keywords: *perturbation method, singularly perturbed boundary value problem, asymptotic series, boundary function, diffusion-drift process, integrated surface-oriented $p-i-n$ structure.*

Прогнозирование стационарного распределения носителей заряда в активной области $p-i-n$ структур методами теории возмущений

А.Я. Бомба, И.П. Мороз

**Бомба
Андрей Ярославович**

*доктор технических наук, профессор; профессор кафедры компьютерных наук и прикладной математики
Национальный университет водного хозяйства и природопользования, ул. Соборная, 11, г. Ривне, Украина, 33028*

**Мороз
Игорь Петрович**

*кандидат физико-математических наук, доцент; докторант кафедры компьютерных наук и прикладной математики
Национальный университет водного хозяйства и природопользования, ул. Соборная, 11, г. Ривне, Украина, 33028*

Разработана методика прогнозирования стационарного распределения концентрации электронно-дырочной плазмы в i -области поверхностно-ориентированных $p-i-n$ структур, которая обеспечивает возможность с достаточной степенью адекватности описывать состояние плазмы не только внутри активной области диода (воспроизводя результаты применения приближения амбиполярной диффузии), но и, что важно, вблизи зон $p-i$ - и $n-i$ - контактов. Соответствующая математическая модель сформирована в виде нелинейной сингулярно возмущенной краевой задачи для системы уравнений непрерывности тока носителей заряда и Пуассона. Получено ее приближенное решение в виде соответствующих асимптотических рядов по степеням малого параметра. Проведен компьютерный эксперимент.

Ключевые слова: *метод возмущений, сингулярно возмущенная краевая задача, асимптотический ряд, пограничная функция, диффузионно-дрейфовый процесс, интегральная поверхностно-ориентированная $p-i-n$ структура.*

1 Вступ

$P-i-n$ структури (плазмові діоди) – нелінійні активні елементи електронної техніки, які широко використовуються для комутації надвисокочастотного (НВЧ) електромагнітного поля (рис.1.1). Робота такого пристрою ґрунтується на зміні провідності активної області діода (i -області) шляхом формування електронно-діркової плазми під дією струму управління. Носії заряду потрапляють в активну область завдяки процесу інжекції з високолегованих p - та n - областей. В активній області відбувається дифузія та дрейф електронів і дірок, їх концентрація змінюється внаслідок генераційно-рекомбінаційних процесів. Базові характеристики $p-i-n$ діода – згасання, що вноситься у лінію передач, швидкодію – в основному визначають накопичений в i -області заряд та геометрія структурних елементів діода [1-6].

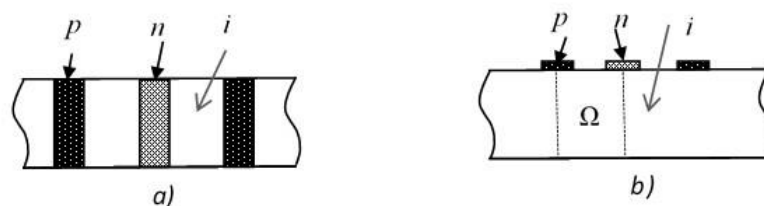


Рис.1.2 Схематичне зображення поперечного перерізу діодної збірки (а) та поверхнево-орієнтованої $p-i-n$ структури (б)

У техніці НВЧ використовуються різні типи $p-i-n$ структур: наприклад, діодні збірки (рис. 1.1, a); поверхнево-орієнтовані структури (рис. 1.1, b); “кремнієві вікна” тощо. У останні роки вивчаються властивості $p-i-n$ структур з розміщенням елементів на поверхні напівпровідникового кристалу, оскільки прогнозується підвищення технологічності виготовлення структур даного типу (шляхом застосування технології виготовлення інтегральних схем та вирішення проблеми узгодження з лінією передач на етапі проектування відповідної електродинамічної системи), покращення тепловідведення.

В основу базової математичної моделі, яка описує розподіл концентрації дірок (n), електронів (p) та потенціалу (φ) в активній області $p-i-n$ діодів (рис.1.2) у стаціонарному режимі роботи пристрою, покладають систему рівнянь неперервності струмів дірок та електронів, рівняння Пуассона [1,6,7]:

$$\begin{cases} \Delta n = \nabla n \nabla \varphi + n \Delta \varphi + \frac{1}{D_n \tau_n^*} n, \\ \Delta p = -\nabla p \nabla \varphi - p \Delta \varphi + \frac{1}{D_p \tau_p^*} p, \\ \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{e} \Delta \varphi = -(p - n + N_l), \end{cases} \quad (1.1)$$

де τ_p^* , τ_n^* – характерні релаксаційні часи життя дірок та електронів в i -області (у загальному випадку залежні від локальної концентрації електронів та дірок і визначаються певним механізмом рекомбінації носіїв заряду); $N_l = N_a - N_d \equiv N_l(r)$ – задана функція профілю легування (описує різницю концентрацій акцепторів і донорів в активній області); D_p , D_n – коефіцієнти дифузії відповідно дірок та електронів; e – заряд електрона; ε , ε_0 – відносна діелектрична проникність напівпровідника та діелектрична стала.

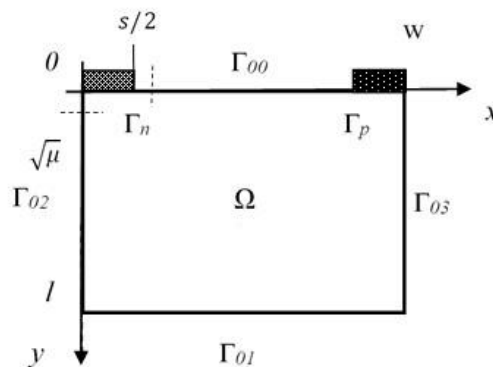


Рис.1.2 Елемент поверхнево-орієнтованої $p-i-n$ структури

Система рівнянь (1.1) доповнюється умовами на межі області $\partial\Omega=\Gamma$ ($\Gamma=\Gamma_n \cup \Gamma_p \cup \Gamma_0$). Граничні умови на інжекційних контактах (ділянках межі Γ_n , Γ_p) записують з урахуванням того, що через межу Γ_n переважно протікає електронний струм, відповідно через Γ_p – дірковий (при широкій активній області більша частина інжектованих носіїв заряду рекомбінує в i -області і не встигає потрапити в область протилежного контакту) [2,6]. Також враховано поверхневу рекомбінацію на контактах:

$$\begin{aligned} \left((\vec{j}_n + \vec{j}_{nr}) \cdot \vec{\nu} \right)_{\Gamma_n} &= J, \quad \left((\vec{j}_p + \vec{j}_{pr}) \cdot \vec{\nu} \right)_{\Gamma_n} = 0, \\ \left((\vec{j}_p + \vec{j}_{pr}) \cdot \vec{\nu} \right)_{\Gamma_p} &= J, \quad \left((\vec{j}_n + \vec{j}_{nr}) \cdot \vec{\nu} \right)_{\Gamma_p} = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

де J – стала, що визначає густину інжекційного струму (струму управління); $\vec{\nu}$ – вектор нормалі до границі області; $\vec{j}_{n,p}$ – густина струму відповідно електронів і дірок ($\vec{j}_p = e\mu_p p \vec{E} - eD_p \nabla p$,

$\vec{j}_n = e\mu_n n \vec{E} + eD_n \nabla n$, $\vec{E} = -\nabla \varphi$; $\vec{j}_{m,rp}$ – густина рекомбінаційного струму ($(\vec{j}_{rp} \cdot \vec{v})|_{\Gamma} = e\alpha_p p$, $(\vec{j}_m \cdot \vec{v})|_{\Gamma} = e\alpha_n n$, $\alpha_{n,p}$ – швидкості поверхневої рекомбінації відповідно електронів і дірок).

Аналогічним способом визначають граничні умови на ділянці межі Γ_0 . (враховано відмінність швидкостей поверхневої рекомбінації на контактах та вільних від контактів ділянках):

$$\begin{aligned} \left((\vec{j}_n + \vec{j}_{nr}^*) \cdot \vec{v} \right)_{\Gamma_{00}} &= 0, & \left((\vec{j}_p + \vec{j}_{pr}^*) \cdot \vec{v} \right)_{\Gamma_{00}} &= 0, \\ \left((\vec{j}_n + \vec{j}_{nr}^*) \cdot \vec{v} \right)_{\Gamma_{01}} &= 0, & \left((\vec{j}_p + \vec{j}_{pr}^*) \cdot \vec{v} \right)_{\Gamma_{01}} &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

Функція потенціалу повинна задовольняти наступні граничні умови:

$$\varphi|_{\Gamma_n} = 0, \quad \varphi|_{\Gamma_p} = U, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|_{\Gamma_0} = 0, \quad (1.4)$$

де U – стала, що визначає напругу на p - i - n структурі. Припускається, що напруга у основному прикладена до високоомної ділянки p - i - n структури, падінням напруги на інжектуючих і омичних контактах нехтують.

Математична модель (1.1)-(1.4) описує стаціонарні дифузійно-дрейфовий та рекомбінаційний процеси і дозволяє прогнозувати розподіл носіїв заряду в активній області p - i - n діода та його основні характеристики. У базовій математичній моделі p - i - n діода не враховано ряду інших фізичних процесів, що спостерігаються у напівпровідникових пристроях: процеси розігріву, генерації носіїв заряду в об'ємі і на поверхні робочої області, особливості протікання інжекційних процесів на контактах тощо [1,6,7]. Проте навіть у спрощеному варіанті задача (1.1)-(1.4) є складною математичною задачею через нелінійність системи рівнянь (1.1).

Класичний розв'язок задачі (1.1)-(1.4) отримано шляхом введення у розгляд спрощуючих обмежень. Використовується наближення амбіполярної дифузії носіїв заряду [1,6,7], в рамках якого припускають рівність концентрації електронів і дірок в активній області діода. При цьому система рівнянь (1.1) приводиться до лінійного рівняння дифузії, розв'язок якого можна легко знайти в аналітичному вигляді. Очевидно, що умова рівності концентрацій природним чином забезпечується в глибині активної області p - i - n діода і порушується поблизу інжектуючих контактів. Отже, отриманий в рамках застосування наближення амбіполярної дифузії аналітичний результат не забезпечує належного рівня адекватності моделі.

У роботах [14,15] запропоновано шукати розв'язок задачі моделювання характеристик p - n діода (діод з різким p - n переходом, на відміну від p - i - n діода) асимптотичними методами [8-13]. P - n та p - i - n діоди (зокрема, поверхнево-орієнтовані p - i - n структури) мають суттєві відмінності у технічному виконанні, які обумовлюють особливості застосування модельних підходів, їх властивостей та практичного застосування. Відповідно, постановка задачі (1.1)-(1.4) відрізняється від відповідних постановок задач у роботах [14,15], а ідея застосування для аналізу задачі (1)-(4) методів теорії збурень (наприклад, [8-13]) вбачається нами перспективною.

Метою роботи є удосконалення математичної моделі і методики прогнозування розподілу електронно-діркової плазми в активній області поверхнево-орієнтованих p - i - n структур на основі застосування методу примежових функцій [8-13].

2 Постановка задачі

Розглянемо двовимірну просторову модель елемента поверхнево-орієнтованої p - i - n структури (область $\Omega = \{(x, y): 0 < x < w, 0 < y < l\}$, рис.1.2). Введемо безрозмірні змінні $\tilde{x} = \frac{x}{w}$ ($0 < \tilde{x} < 1$),

$$\tilde{y} = \frac{y}{w} \quad (0 < \tilde{y} < \frac{l}{w}), \quad \tilde{\varphi} = \frac{e\varphi}{kT}, \quad \tilde{U} = \frac{eU}{kT}, \quad \tilde{n} = \frac{n}{N_i} \quad (0 \leq \tilde{n} \leq \frac{n_{\max}}{N_i}), \quad \tilde{p} = \frac{p}{N_i} \quad (0 \leq \tilde{p} \leq \frac{p_{\max}}{N_i}),$$

де T – стала, визначає температуру (300 °K); k – стала Больцмана; N_i – концентрація електронів у власному напівпровіднику, залежить від обраного матеріалу напівпровідника. Розглянемо випадок різкої границі між легованими областями і областю власного напівпровідника:

$$N_a(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \Omega \\ \frac{N_{a0}}{N_i}, & (x, y) \in \Gamma_p \end{cases}; \quad N_d(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in \Omega \\ \frac{N_{d0}}{N_i}, & (x, y) \in \Gamma_n \end{cases}.$$

Тоді систему рівнянь (1.1) перепишемо у безрозмірному вигляді:

$$\begin{cases} \mu \Delta \varphi = -(p - n), \\ \Delta n = \nabla n \nabla \varphi + n \Delta \varphi + A_n n, \\ \Delta p = -\nabla p \nabla \varphi - p \Delta \varphi + A_p p, \end{cases} \quad (2.1)$$

де $\mu = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 k T}{e^2 w^2 N_i}$ (малий параметр задачі, $\mu \sim 10^{-8}$), $A_n = \frac{w^2}{D_n \tau_n^*}$, $A_p = \frac{w^2}{D_p \tau_p^*}$. З метою спрощення

запису співвідношень знак “ \sim ” в (2.1) і наступних викладках опущено.

Умови (1.2)-(1.4) (також подані у безрозмірному вигляді) на межі області $\Gamma = \Gamma_n \cup \Gamma_p \cup \Gamma_0$ перепишемо наступним чином:

$$\begin{aligned} n E_V + \frac{1}{w} \frac{\partial n}{\partial v} - 2 \gamma_n n \Big|_{\Gamma_n} &= -\frac{J}{e D_n N_i}, \quad p E_V - \frac{1}{w} \frac{\partial p}{\partial v} - 2 \gamma_p p \Big|_{\Gamma_n} = 0, \quad \varphi|_{\Gamma_n} = 0, \\ -p E_V + \frac{1}{w} \frac{\partial p}{\partial v} - 2 \gamma_p p \Big|_{\Gamma_p} &= -\frac{J}{e D_p N_i}, \quad n E_V + \frac{1}{w} \frac{\partial n}{\partial v} + 2 \gamma_n n \Big|_{\Gamma_p} = 0, \quad \varphi|_{\Gamma_p} = U, \\ n E_V + \frac{1}{w} \frac{\partial n}{\partial v} + 2 \gamma_n^* n \Big|_{\Gamma_{00}} &= 0, \quad p E_V - \frac{1}{w} \frac{\partial p}{\partial v} + 2 \gamma_p^* p \Big|_{\Gamma_{00}} = 0, \\ n E_V + \frac{1}{w} \frac{\partial n}{\partial v} + 2 \gamma_n^* n \Big|_{\Gamma_{01}} &= 0, \quad p E_V - \frac{1}{w} \frac{\partial p}{\partial v} + 2 \gamma_p^* p \Big|_{\Gamma_{01}} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Big|_{\Gamma_0} = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

де $\bar{E} = -\nabla \varphi$, $\gamma_n = \frac{\alpha_n}{2 D_n}$, $\gamma_p = \frac{\alpha_p}{2 D_p}$ (у загальному випадку швидкості поверхневої рекомбінації

на контактах ($\alpha_{n,p}$) і на поверхні структури ($\alpha_{n,p}^*$) відрізняються). На ділянках межі області Γ_{02} , Γ_{03} використовується умови періодичності p - i - n структури:

$$n(0, y) = n(\pm 2i, y), \quad p(1, y) = p(1 \pm 2i, y). \quad (2.3)$$

3 Побудова асимптотичного розв’язку

Задача (2.1)-(2.3) є сингулярно збуреною. Беручи до уваги те, що на структуру її розв’язку в основному впливають умови на контактних ділянках Γ_n та Γ_p , через які здійснюється наповнення i -області неосновними носіями заряду, пропонуємо шукати розв’язок задачі (2.1)-(2.3) аналогічно до [8-13] у вигляді наступних асимптотичних рядів:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi \\ n \\ p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi(x, y, \mu) \\ n(x, y, \mu) \\ p(x, y, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{(m)}(x, y, \mu) \\ N_{(m)}(x, y, \mu) \\ P_{(m)}(x, y, \mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\Phi}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu) \\ \underline{N}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu) \\ \underline{P}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{\Phi}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu) \\ \overline{N}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu) \\ \overline{P}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{\varphi(m)}(x, y, \mu) \\ R_{n(m)}(x, y, \mu) \\ R_{p(m)}(x, y, \mu) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m \mu^i \varphi_i(x, y) \\ \sum_{i=0}^m \mu^i n_i(x, y) \\ \sum_{i=0}^m \mu^i p_i(x, y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m \mu^i \Phi_i(\underline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^m \mu^i \underline{N}_i(\underline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^m \mu^i \underline{P}_i(\underline{\xi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^m \mu^i \overline{\Phi}_i(\underline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^m \mu^i \overline{N}_i(\underline{\xi}) \\ \sum_{i=0}^m \mu^i \overline{P}_i(\underline{\xi}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{\varphi(m)}(x, y, \mu) \\ R_{n(m)}(x, y, \mu) \\ R_{p(m)}(x, y, \mu) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

де $\Phi_{(m)}(x, y, \mu), N_{(m)}(x, y, \mu), P_{(m)}(x, y, \mu)$ - регулярні частини асимптотик; $\underline{\Phi}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu), \underline{N}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu), \underline{P}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu), \bar{\Phi}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu), \bar{N}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu), \bar{P}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu)$ - примежові поправки асимптотик відповідно в околах точок $y=0, 0 \leq x \leq \frac{s}{2w}$ і $y=0, \frac{s}{2w} \leq x \leq 1 - \frac{s}{2w}$ ($\underline{\xi} = \frac{y}{\sqrt{\mu}}$ - регуляризуючий розтяг); $R_{\varphi(m)}(x, y, \mu), R_{n(m)}(x, y, \mu), R_{p(m)}(x, y, \mu)$ - залишкові члени.

Підставляючи (3.1) у рівняння системи (2.1) та умови (2.2)-(2.3) та застосувавши стандартну процедуру "прирівнювання" [8-13] формуємо послідовність задач для визначення компонент асимптотичних рядів (3.1). Головну увагу зосереджуємо на пошуку головних членів регулярних рядів (3.1), оскільки ці функції містять основну інформацію про поведінку електронно-діркової плазми. Зокрема, отримуємо наступні системи диференціальних рівнянь для знаходження $n_0, p_0, \varphi_0, \underline{\Phi}_0, \underline{N}_0, \underline{P}_0$:

$$\begin{cases} n_0 = p_0, \\ \Delta n_0 - \nabla(n_0 \nabla \varphi_0) - A_n n_0 = 0, \\ \Delta p_0 + \nabla(p_0 \nabla \varphi_0) - A_p p_0 = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}^2} = -(\underline{P}_0 - \underline{N}_0), \\ \frac{\partial^2 \underline{N}_0}{\partial \underline{\xi}^2} - \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left(\underline{N}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 \underline{P}_0}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left(\underline{P}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \right) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Граничні умови для систем рівнянь (3.2)-(3.3) набувають наступного виду:

$$\left. \frac{\partial n_0}{\partial y} - \beta w n_0 - \beta w \underline{N}_0 \right|_{y=0} = -\frac{J}{2eD_n} \frac{w}{N_i} \text{ при } 0 \leq x \leq \frac{s}{2w}, \quad \varphi_0 + \underline{\Phi}_0 \Big|_{0 \leq x \leq \frac{s}{2w}}^{y=0} = 0, \quad (3.4)$$

$$\left. \frac{\partial n_0}{\partial y} + \beta w n_0 + \beta w \bar{P}_0 \right|_{y=0} = -\frac{J}{2eD_p} \frac{w}{N_i} \text{ при } 1 - \frac{s}{2w} \leq x \leq 1, \quad \varphi_0 + \bar{\Phi}_0 \Big|_{1 - \frac{s}{2w} \leq x \leq 1}^{y=0} = U,$$

$$\left. \frac{\partial n_0}{\partial y} + \beta^* w n_0 \right|_{y=0} = 0 \text{ при } \frac{s}{2w} \leq x \leq 1 - \frac{s}{2w}, \quad \left. \frac{\partial n_0}{\partial y} + \beta^* w n_0 \right|_{y=\frac{l}{w}} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right|_{y=0, y=\frac{l}{w}} = 0,$$

$$n_0(0, y) = n_0(x \pm 2i, y), \quad \left. \frac{\partial \underline{N}_0}{\partial \underline{\xi}} \right|_{\underline{\xi}=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \underline{P}_0}{\partial \underline{\xi}} \right|_{\underline{\xi}=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{P}_0}{\partial \underline{\xi}} \right|_{\underline{\xi}=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{N}_0}{\partial \underline{\xi}} \right|_{\underline{\xi}=0} = 0.$$

Також використовуємо характерні для примежових функцій додаткові умови [8-13]:

$$\lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \underline{\Phi}_0(\underline{\xi}) = \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \bar{\Phi}_0(\underline{\xi}); \quad \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \underline{N}_0(\underline{\xi}) = \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \underline{P}_0(\underline{\xi}) = \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \bar{N}_0(\underline{\xi}) = \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \bar{P}_0(\underline{\xi}) = 0. \quad (3.5)$$

Для визначення $\bar{\Phi}_0(\underline{\xi}), \bar{N}_0(\underline{\xi}), \bar{P}_0(\underline{\xi})$ використовуємо систему рівнянь аналогічну (3.3).

Зауважимо, що система (3.2) приводиться до лінійного диференціального рівняння виду:

$$\Delta n_0 - \frac{1}{2}(A_n + A_p)n_0 = 0, \quad (3.6)$$

яке також отримують і в рамках застосування наближення амбіполярної дифузії [7].

Враховуючи періодичність розміщення елементів у досліджуваній системі, загальний розв'язок (3.6) шукаємо у вигляді ряду:

$$n_0(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} (C_{1i} \exp(-\eta_i y) + C_{2i} \exp(\eta_i y)) \cos \alpha_i x, \quad (3.7)$$

де $\alpha_i = \pi i$, $\eta_i^2 = \alpha_i^2 + \frac{1}{2}(A_n + A_p)$.

Сталі C_{1i} , C_{2i} визначаємо із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що отримана на основі застосування умов (3.4) на ділянках межі області Ω при $y=0$ та $y=l/w$ та проектування на систему базисних функцій $\cos \alpha_j x$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{i=0}^{M-1} (-\eta_i C_{1i} + \eta_i C_{2i}) \cos \alpha_i x \cos \alpha_j x dx &= \int_0^{\frac{s}{2w}} \left(-\frac{J}{2eD_n} \frac{w}{N_i} + \beta w \tilde{\Pi}_\infty^2 \right) \cos \alpha_j x dx + \\ + \beta w \int_0^{\frac{s}{2w}} \sum_{i=0}^{M-1} (C_{1i} + C_{2i}) \cos \alpha_i x \cos \alpha_j x dx - \beta^* w \int_{\frac{s}{2w}}^{1-\frac{s}{2w}} \sum_{i=0}^{M-1} (C_{1i} + C_{2i}) \cos \alpha_i x \cos \alpha_j x dx - \\ - \int_{1-\frac{s}{2w}}^1 \left(\frac{J}{2eD_p} \frac{w}{N_i} + \beta w \tilde{\Pi}_\infty^2 \right) \cos \alpha_j x dx - \beta w \int_{\frac{s}{2w}}^{1-\frac{s}{2w}} \sum_{i=0}^{M-1} (C_{1i} + C_{2i}) \cos \alpha_i x \cos \alpha_j x dx, \\ C_{2i} &= \frac{(\eta_i - \beta^* w)}{(\eta_i + \beta^* w)} \exp(-2\eta_i) C_{1i}, \quad j = \overline{0, (M-1)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Примежові поправки знаходимо шляхом розв'язання задачі (3.3)-(3.4). Введемо заміни $V = \underline{P}_0 - \underline{N}_0$, $W = \underline{P}_0 + \underline{N}_0$. Тоді (3.3) приводимо до системи рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \underline{\Phi}'_0 = \Pi, \\ \Pi' = V, \\ W' + (VI) = C_W, \\ V' + (VII) = C_V, \end{cases} \quad (3.9)$$

де C_W, C_V – сталі інтегрування.

Система рівнянь (3.9) доповнюється граничними умовами при $\underline{\xi}=0$ і $\underline{\xi} \rightarrow \infty$, які отримуємо із співвідношень (3.4) і (3.5) у вигляді:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \underline{\xi}} \right|_{\underline{\xi}=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial \underline{\xi}} \right|_{\underline{\xi}=0} = 0, \quad \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} V(\underline{\xi}) = \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} W(\underline{\xi}) = 0. \quad (3.10)$$

Для встановлення характеру поведінки функції $\Pi(\underline{\xi})$ скористаємось її фізичним змістом. Згідно (3.9) ця функція має зміст напруженості електричного поля, що створене примежовими зарядами. На межі області ($x=0$) значення потенціалу стає, тому $\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial \underline{\xi}} \right|_{\underline{\xi}=0} = \Pi|_{\underline{\xi}=0} = 0$. У глибині активної області (при $\underline{\xi} \rightarrow \infty$) значення напруженості поля стає (Π_∞ , $\lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \Pi = const$).

Розв'язками системи рівнянь (3.9) за умов (3.10) є функції виду:

$$W = -\frac{\Pi^2}{2} + \frac{\Pi_\infty^2}{2}, \quad V = \frac{\Pi^2}{2} - \frac{\Pi_\infty^2}{2}, \quad C_W = 0, \quad (3.11)$$

$$\Pi = \Pi(\underline{\xi}) = -\Pi_\infty \operatorname{th} \left(\frac{\Pi_\infty \underline{\xi}}{2} \right). \quad (3.12)$$

Таким чином, примежові концентрації носіїв заряду з співвідношень (3.11), (3.12) та з урахуванням використаних заміни $V = \underline{P}_0 - \underline{N}_0$, $W = \underline{P}_0 + \underline{N}_0$ отримуємо у наступному вигляді:

$$\underline{P}_0 = 0, \quad \underline{N}_0(\underline{\xi}) = \Pi_\infty^2 \left(1 - th^2 \left(\frac{\Pi_\infty \underline{\xi}}{2} \right) \right). \quad (3.13)$$

Примежові поправки $\bar{N}_0(\underline{\xi})$, $\bar{P}_0(\underline{\xi})$ знаходимо аналогічним способом:

$$\bar{P}_0(\underline{\xi}) = \Pi_\infty^2 \left(1 - th^2 \left(\frac{\Pi_\infty \underline{\xi}}{2} \right) \right), \quad \bar{N}_0 = 0. \quad (3.14)$$

Зауважимо, що у функціях (3.13), (3.14) фігурує однакова стала Π_∞ , оскільки у глибині активної області (при $\underline{\xi} \rightarrow \infty$) значення відповідних потенціалів електричного поля співпадають. Стала інтегрування Π_∞ встановлюється із використанням відповідних граничних умов (3.4) для потенціалу. Отримано трансцендентне рівняння виду:

$$\int_{\frac{s}{2w}}^{1-\frac{s}{2w}} \left(th \left(\frac{\Pi_\infty t}{2\sqrt{\mu}} \right) + th \left(\frac{\Pi_\infty (1-t)}{2\sqrt{\mu}} \right) \right) dt = \frac{U}{\Pi_\infty}. \quad (3.15)$$

Скориставшись міркуваннями, які аналогічні до [8-13], за додаткових умов гладкості та їх узгодженості, приходимо до оцінок залишкових членів асимптотичних рядів:

$$R_{\varphi(m)}(x, y, \mu) = O(\mu^{m+1}), \quad R_{n(m)}(x, y, \mu) = O(\mu^{m+1}), \quad R_{p(m)}(x, y, \mu) = O(\mu^{m+1}).$$

Таким чином, розподіл концентрації електронно-діркової плазми в активній області інтегральної поверхнево-орієнтованої p - i - n структури визначається функцією виду:

$$n(x, y) = \sum_{i=0}^{M-1} (C_{1i} \exp(-\eta_i y) + C_{2i} \exp(\eta_i y)) \sin \alpha_i x + \begin{cases} \Pi_\infty^2 \left(1 - th^2 \left(\frac{\Pi_\infty y}{2\sqrt{\mu}} \right) \right), & 0 \leq x \leq \frac{s}{2w}, 1 - \frac{s}{2w} \leq x \leq 1 \\ 0, & \frac{s}{2w} < x < 1 - \frac{s}{2w} \end{cases}. \quad (3.16)$$

4 Результати чисельних експериментів

Результати чисельного моделювання показано на графіках стаціонарного розподілу концентрації електронів і дірок в активній області елемента поверхнево-орієнтованої p - i - n структури (рис. 4.1, 4.2).

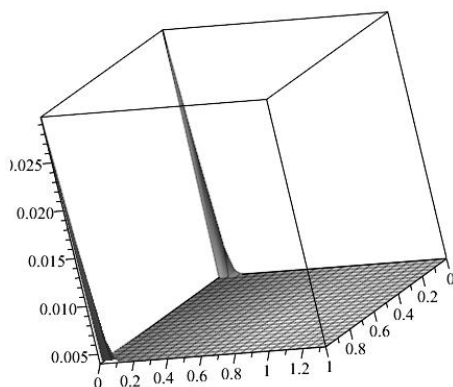


Рис.4.1 Розподіл концентрації електронно-діркової плазми в активній області згідно уточненої моделі, що враховує примежові поправки

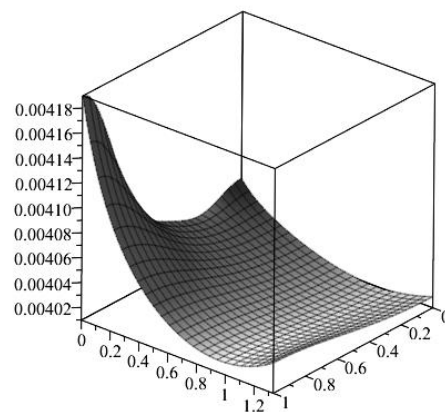


Рис.4.2 Розподіл концентрації носіїв заряду в активній області згідно моделі амбіполярної дифузії

В експериментах використано наступні значення сталих: $N_i = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $T = 300^\circ \text{ К}$, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$, $J = 0,4 \text{ ма/см}^2$, $U = 5 \text{ мВ}$, $w = 30 \text{ мкм}$, $s = 10 \text{ мкм}$, $D_n = 30 \text{ см}^2/\text{с}$, $D_p = 6 \text{ см}^2/\text{с}$, $\tau_n^* = 20 \text{ мкс}$, $\tau_p^* = 25 \text{ мкс}$.

Рис.4.1 ілюструє стаціонарний розподіл носіїв заряду в i -області p - i - n діода згідно удосконаленої математичної моделі (3.16). Спостерігається різкий ріст концентрації електронів у області поблизу n - i переходу і дірок поблизу p - i переходу. Підвищене значення концентрації носіїв заряду (~ 10 раз для зазначеного набору вхідних даних) спостерігається на відстані $\sim \sqrt{\mu}$ від межі n - i та p - i переходів. Такий характер стаціонарного розподілу концентрації плазми вбачається природним, оскільки об'єктивно у зоні інжекції носіїв заряду певного типу їх концентрація повинна значно переважати концентрацію зарядів протилежного типу через дію рекомбінаційних процесів. Цю особливість поведінки розподілу концентрації плазми у діоді не можна відобразити за допомогою класичної моделі амбіполярної дифузії.

Для порівняння результати моделювання в рамках класичного підходу показано на рис.4.2. Відмітимо, що згідно прогнозу за удосконаленою математичною моделлю p - i - n діода накопичений у i -області заряд на 3-5% перевищує значення аналогічного показника, що отримано традиційними методами. При цьому спостерігається перерозподіл концентрації плазми – у середині активної області діода концентрація плазми дещо знижується.

5 Висновки

Побудовано математичну модель стаціонарного розподілу електронно-діркової плазми в активній області інтегральних поверхнево-орієнтованих p - i - n структур у вигляді нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі для системи рівнянь неперервності струму носіїв заряду та Пуассона. Знайдено наближений розв'язок відповідної крайової задачі у вигляді головних членів асимптотичних рядів за степенями малого параметра.

Запропоновано схему пошуку розв'язку поставленої задачі, що автоматично включає класичні постановки задач моделювання характеристик p - i - n структур і дозволяє внести суттєві поправки у розв'язок. Цим забезпечується підвищення рівня адекватності моделювання і розуміння особливостей протікання ряду фізичних процесів (дифузійно-дрейфового, рекомбінаційного, інжекційного) в активній області p - i - n діодів.

Запропонований підхід вважаємо перспективним інструментальним засобом для вивчення нелінійних теплових, дифузійно-дрейфових, генераційно-рекомбінаційних стаціонарних і нестаціонарних процесів, що протікають в елементах p - i - n структур під дією зовнішнього надвисокочастотного випромінювання, та прогнозування нових фізичних ефектів у досліджуваних системах, наприклад, обумовлених впливом локальних поверхневих і об'ємних дефектів на характеристики p - i - n структур.

ЛІТЕРАТУРА

1. Sze S., Kwok K. Physics of Semiconductor Devices . New York: Wiley-Interscience, 2006. 815 p.
2. Гусятинер М.С. Горбачев А.И. Полупроводниковые сверхвысокочастотные диоды. М.: Радио и связь, 1985. 262 с.
3. Lebedev I. V., Shnitnikov A. S., Dyakov I. V., Borisova N. A. Impedance properties of high-frequency PIN diodes. *Solid-State Electronics*, 1998. Vol. 41, № 1, pp. 121-128.
4. Grimalsky V. V., Kishenko Ya. I., Koshevaya S. V., Moroz I. P. The Interaction of Powerful Electromagnetic Waves With Integrated p-i-n-structures. *Doc. of Int. Symp. "Physics and Engineering of Mm and Submm Waves"*, June 7-10, 1994. Kharkov, Ukraine, vol.1, pp. 238-239.
5. Haine M.E., Rose F.W.G. On the conductance of p-i-n junctions at high microwave fields. *Solid-State Electron*, 1972. Vol.15, №.6, pp.687-705.
6. Адирович Э. И., Карагеоргий-Алкалаев П. М., Лейдерман А. Ю. Токи двойной инжекции в полупроводниках . Под ред. Гальперина. М.: Советское радио, 1978. 320 с.
7. Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г. Физика полупроводников. М.: Наука, 1990. 685 с.
8. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры. *Математический сборник*, 1952. Т. 31(73), № 3, С. 575-586.

9. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. *УМН*, 1957. Т.12, №5, С. 3-122.
10. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. шк., 1990. 208 с.
11. Бомба А.Я., Присяжнюк І.М., Присяжнюк О.В. Методи теорії збурень прогнозування процесів тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах. Рівне: О.Зень, 2017. 291 с.
12. Бомба А.Я. Про асимптотичний метод наближеного розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі. *Український математичний журнал*, 1982. Т.34, № 4, С.37-40.
13. Smith D.R. Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. 520 p.
14. Белянин М.П. Об асимптотическом решении одной модели p-n- перехода. *Вычислительная математика и математическая физика*, 1986. Т.26, №2, С.306-311.
15. Васильева А.Б., Стельмах В.Г. Сингулярно возмущенные системы теории полупроводниковых приборов. *Вычислительная математика и математическая физика*, 1977. Т.17, №2, С.339-348.

REFERENCES

1. Sze S., Kwok K. Physics of Semiconductor Devices . New York: Wiley-Interscience, 2006. 815 p.
2. Gusyatiner M.S. Gorbachov A.I. Semiconductor microwave diodes. Moscow: Radio and communication, 1985. 262 p. [in Russian]
3. Lebedev I. V., Shnitnikov A. S., Dyakov I. V., Borisova N. A. Impedance properties of high-frequency PIN diodes. *Solid-State Electronics*, 1998. Vol. 41, issue 1, pp. 121-128.
4. Grimalsky V. V., Kishenko Ya. I., Koshevaya S. V., Moroz I. P. The Interaction of Powerful Electromagnetic Waves With Integrated p-i-n-structures. *Doc. of Int. Symp. "Physics and Engineering of Mm and Submm Waves"*, June 7-10, 1994. Kharkov, Ukraine, vol.1, pp. 238-239.
5. Haine M.E., Rose F.W.G. On the conductance of p-i-n junctions at high microwave fields. *Solid-State Electron*, 1972. Vol.15, issue 6, pp.687-705.
6. Adirovich E. I., Karageorgiy-Alkalaev P. M., Leyderman A. Yu. Double injection currents in semiconductors. Moscow: Soviet radio, 1978. 320 p. [in Russian]
7. Bonch-Bruevich V. L., Kalashnikov S. G. Physics of Semiconductors. Moscow: Nauka, 1990. 685 p. [in Russian]
8. Tikhonov A. N. Systems of differential equations containing small parameters multiplying some of the derivatives. *Mat. Sb.*, 1952. Vol. 31(73), issue 3, pp. 575-586. [in Russian]
9. Vishik M. I., Lusternik L. A. Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter. *UMN*, 1957. Vol. 12, issue 5 (77), pp. 3-122. [in Russian]
10. Vasilieva A. B., Butuzov V. F. Asymptotic methods in the theory of singular perturbations. – Moscow: Vissh. shkola, 1990. 208 p. [in Russian]
11. Bomba A. Ya., Prysnyaguk I. M., Prysnyaguk O. V. Methods of perturbation theory for predicting heat and mass transfer processes in porous and microporous media. Rivne: O.Zen, 2017. 291 p. [in Ukrainian]
12. Bomba A. Ya. On the asymptotic method of approximate solution of one mass transfer problem during filtration in a porous medium. *Ukrainian Mathematical Journal*, 1982. Vol.34, issue 4, pp.37-40. [in Ukrainian]
13. Smith D.R. Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. 520 p.
14. Belyanin M. P. On the asymptotic solution of a model of a (p – n) junction. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1986. Vol.26, issue 2, pp.306-311. [in Russian]
15. Vasilieva A. B., Stelmah V. G. Singularly perturbed systems of the theory of semiconductor devices. *Mathematics and Mathematical Physics*, 1977. Vol.17, issue 2, pp.339-348. [in Russian]