DOI: 10.26565/2304-6201-2021-50-01

УДК 539.3

Осесиметрична термопружна деформація багатошарової плити з неідеальним тепловим контактом між шарами

Н.М. Антоненко, І.Г. Ткаченко

Антоненко Ніна Миколаївна — *к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої математики Національний університет «Запорізька політехніка», вул Жуковського, 64, м. Запоріжжя, Україна, 69063*
e-mail: antonenkonina.ua@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0427-6499

Ткаченко Ірина Григорівна — *к.ф.-м.н., доцент кафедри фундаментальної та прикладної математики Запорізький національний університет, вул Жуковського, 66, м. Запоріжжя, Україна, 69600*
e-mail: tig.phd81@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4232-2484

Інтегральне перетворення Ганкеля та метод функцій податливості застосовано до розв'язання осесиметричної задачі термопружності для багатошарової плити з неідеальним тепловим контактом між шарами. У матричній формі побудовано рекурентні співвідношення, що пов'язують функції податливості сусідніх шарів плити. Чисельні розрахунки проведено для двошарової плити, що перебуває під дією теплових навантажень. Проаналізовано вплив коефіцієнта теплового опору на розподіл температури в точках нижньої межі верхнього шару і точках верхньої межі нижнього шару, а також на розподіл нормальних напружень на стику шарів плити.

Ключові слова: *напруження, температура, неідеальний тепловий контакт, багатошарова плита, інтегральне перетворення Ганкеля, функції податливості.*

Axisymmetric thermoelastic deformation of a multilayer plate with imperfect thermal contact between its layers

Antonenko Nina — *Candidate of science (physics and mathematics), associate professor of the department of Higher Mathematics National University «Zaporizhzhia Polytechnic», 64 Zhukovskogo str., Zaporizhzhia, Ukraine, 69063*

Tkachenko Iryna — *Candidate of science (physics and mathematics), associate professor of the department of Fundamental and Applied Mathematics Zaporizhzhia National University, 66 Zhukovskogo str., Zaporizhzhia, Ukraine, 69600*

An axisymmetric stationary problem of thermoelasticity for a multilayer plate with imperfect thermal contact between its layers is solved by using the method of compliance functions and the Hankel transform. The mechanical contact of their boundaries is assumed to be perfect. The Hankel transforms of displacements, stresses, and temperature at the points of the layer can be represented in the form of the linear combinations of the six auxiliary functions. The auxiliary functions are connected with the Hankel transforms of displacements, stresses, temperature and flow at the points of the upper boundary of the corresponding layer. Those six auxiliary functions can be found from the boundary conditions in the case considered. Using the conditions on the boundaries between the layers and introducing a dummy layer the recurrent formulas for finding other auxiliary functions have been constructed. The auxiliary functions of each layer are dependence which is represented in the matrix form by using so-called compliance functions. The recurrence relations for the compliance functions of the thermoelastic multilayer plate have been constructed. The algorithm for solving the considered problem is formulated. The numerical calculations for a two-layer plate subjected to the thermal loads are performed. The influences of the thermal resistance coefficient on temperature distribution at the points of the lower boundary of the upper layer and at the points of the upper boundary of the lower layer and on the distribution of normal stresses on the common boundary of layers is analyzed.

Keywords: *stresses, temperature, imperfect thermal contact, multilayer plate, Hankel transform, compliance functions.*

Осесиметричная термоупругая деформация многослойной плиты с неидеальным тепловым контактом между слоями

Антоненко Нина Николаевна — *к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики, Национальный университет «Запорожская политехника», ул. Жуковського, 64, г. Запорожье, Украина, 69063*

Ткаченко Ирина Григорьевна — *к. ф.-м. н., доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики, Запорожский национальный университет, ул. Жуковского, 66, г. Запорожье, Украина, 69600*

Интегральное преобразование Ханкеля и метод функций податливости использованы для решения осесимметричной задачи термоупругости для многослойной плиты с неидеальным тепловым контактом между слоями. В матричной форме построены рекуррентные соотношения для рассчета функций податливости слоев плиты. Числовые расчеты проведены для двухслойной плиты, которая находится под действием тепловых нагрузок. Проанализировано влияние коэфициента теплового сопротивления на распределение температуры в точках нижней границы верхнего слоя и точках верхней границы нижнего слоя плиты, также исследовано влияние указаного коэффициента на распределение нормальных напряжений в точках общей границы слоев.

Ключевые слова: *напряжения, температура, неидеальный тепловой контакт, многослойная плита, интегральное преобразование Ханкеля, функции податливости.*

1 Вступ

Багатошарові плити є складовими компонентами багатьох інженерних конструкцій та споруд. На практиці такі об’єкти часто експлуатуються в умовах високих температур, тому під час їх розрахунку на міцність потрібно враховувати, окрім механічних, ще й температурні ефекти. Авторами [1-4] за допомогою методу функцій податливості [5] отримано розв’язки задач термопружності при умовах ідеального теплового контакту між шарами багатошарової основи та плити в плоскій та просторовій постановках. Розв’язання задачі про осесиметричну термопружну деформацію багатошарової основи з неідеальним тепловим контактом між шарами наведено у [6].

Робота [7] присвячена розв’язанню осесиметричної температурної задачі для системи контактуючих тіл циліндр-шар з урахуванням неідеального теплового контакту. Розв’язок осесиметричної контактної задачі термопружності для тришарового пружного циліндра при умові ідеального одностороннього механічного та неідеального теплового контактів наведено в [8]. Запропоновано ітераційний алгоритм, що ґрунтується на основі метода скінченних елементів. У [9, 10] проведено математичне моделювання процесу теплообміну в кусково-неоднорідному шарі через тонке включення. Отримано та досліджено розв’язок задачі теплопровідності при умові неідеального теплообміну.

Розв’язанню задачі про дослідження напружено-деформованого стану багатошарового порожнистого циліндра скінченої довжини, що знаходиться під дією внутрішнього тиску та температури в осесиметричній постановці присвячено статтю [11]. За допомогою сплайн-колокації задачу зведено до одновимірної, проаналізовано поля переміщень і напружень залежно від типу та величини навантажень. Методом інтегрального перетворення Фур’є-Бесселя у [12] отримано розв’язок нестаціонарної задачі теплопровідності для двошарового симетричного простору при умові неідеального термічного контакту.

У наведеній статті досліджується осесиметрична деформація багатошарової плити при умові неідеального теплового контакту між її шарами.

2 Постановка задачі

Розглядається багатошарова плита, що складається з n пружних, однорідних та невагомих шарів. Кожен шар характеризуватимемо товщиною h_k, модулем Юнга E_k, коефіцієнтом Пуассона ν_k, коефіцієнтом теплопровідності $k_{T,k}$ та коефіцієнтом теплового розширення $\alpha_{T,k}$, $k=\overline{1,n}$. На спільних межах шарів виконуються умови ідеального механічного та неідеального теплового контактів [13]. На верхній та нижній межах плити задані напруження та температура.

Шари нумеруватимемо зверху донизу. Усі величини, що відносяться до k-го шару, позначатимемо нижнім індексом k (якщо це не призводитиме до неоднозначності, то індекс опускатимемо). У кожному шарі введемо локальну циліндричну систему координат так як показано на рис. 2.1.

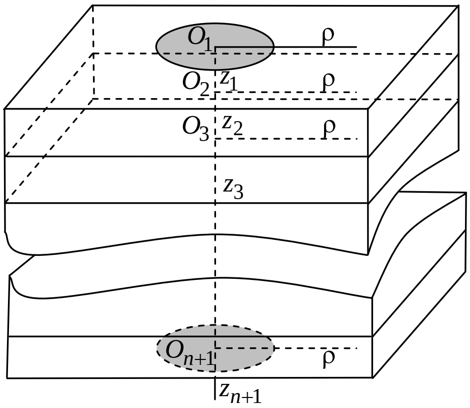


Рис. 2.1 Багатошарова плита

Крайові умови задачі:

$$\sigma_{z,1}(\rho,0)=\sigma(\rho),\ \tau_{\rho z,1}(\rho,0)=\tau(\rho),\ T_1(\rho,0)=f(\rho), \tag{2.1}$$

$$\sigma_{z,n}(\rho,h_n)=\tilde{\sigma}(\rho),\ \tau_{\rho z,n}(\rho,h_n)=\tilde{\tau}(\rho),\ T_n(\rho,h_n)=\tilde{f}(\rho), \tag{2.2}$$

де $\sigma(\rho)$, $\tilde{\sigma}(\rho)$, $\tau(\rho)$, $\tilde{\tau}(\rho)$, $f(\rho)$, $\tilde{f}(\rho)$ – задані функції.

Умови на спільних межах шарів плити:

$$\sigma_{\rho,k+1}(\rho,0)=\sigma_{\rho,k}(\rho,h_k),\ \tau_{\rho z,k+1}(\rho,0)=\tau_{\rho z,k}(\rho,h_k), \tag{2.3}$$

$$u_{z,k+1}(\rho,0)=u_{z,k}(\rho,h_k),\ u_{\rho,k+1}(\rho,0)=u_{\rho,k}(\rho,h_k), \tag{2.4}$$

$$k_{T,k}\frac{\partial T_k}{\partial z}(\rho,h_k)=\frac{1}{R_k}\left(T_{k+1}(\rho,0)-T_k(\rho,h_k)\right),\ k_{T,k+1}\frac{\partial T_{k+1}}{\partial z}(\rho,0)=k_{T,k}\frac{\partial T_k}{\partial z}(\rho,h_k), \tag{2.5}$$

де R_k – коефіцієнт теплового опору, $k_{T,k}$ – коефіцієнти теплопровідності шарів, $k=\overline{1,n}$.

Необхідно знайти термо-напружено-деформівний стан (ТНДС) у всіх точках плити в рамках осесиметричної деформації.

3 Метод розв'язання

Задача розв'язується за допомогою інтегрального перетворення Ганкеля:

$$\bar{v}^m(p;z)=\int_0^{+\infty}\rho v(\rho,z)J_m(p\rho)d\rho, \tag{3.1}$$

$$v(\rho;z)=\int_0^{+\infty}p\bar{v}^m(p,z)J_m(p\rho)dp, \tag{3.2}$$

де $\bar{v}^m(\rho)$ – трансформанта Ганкеля порядка m, J_m – функція Бесселя першого роду порядку m, $p\in[0;+\infty)$ – параметр інтегрального перетворення.

Відомо [3], що трансформанти Ганкеля компонент ТНДС окремого шару можна представити у вигляді лінійної комбінації допоміжних функцій

$$\alpha=\bar{\sigma}_z(p,0),\ \beta=\mu pW(p,0),\ \gamma=\mu pU(p,0),\ \delta=\bar{\tau}_{\rho z}(p,0), \tag{3.3}$$

$$\eta=\bar{T}(p,0),\ \varepsilon=\frac{1}{p}\frac{d\bar{T}}{dz}(p,0) \tag{3.4}$$

цього шару наступними співвідношеннями:

$$2\mu pW(p,z)=\left((2-\omega)\operatorname{sh}pz-\omega pz\operatorname{ch}pz\right)\alpha+2\left(\operatorname{ch}pz-\omega pz\operatorname{sh}pz\right)\beta+$$
$$+2\left((1-\omega)\operatorname{sh}pz-\omega pz\operatorname{ch}pz\right)\gamma-\omega pz\operatorname{sh}pz\,\delta+E\omega\alpha_T\left((\operatorname{sh}pz+pz\operatorname{ch}pz)\eta+pz\operatorname{sh}pz\,\varepsilon\right), \tag{3.5}$$

$$2\mu pU(p,z)=\omega pz\operatorname{sh}pz\,\alpha+2\left((1-\omega)\operatorname{sh}pz+\omega pz\operatorname{ch}pz\right)\beta+2\left(\omega pz\operatorname{sh}pz+\operatorname{ch}pz\right)\gamma+$$
$$+\left((2-\omega)\operatorname{sh}pz+\omega pz\operatorname{ch}pz\right)\delta-E\omega\alpha_T\left(pz\operatorname{sh}pz\,\eta+(pz\operatorname{ch}pz-\operatorname{sh}pz)\varepsilon\right), \tag{3.6}$$

$$\bar{\sigma}_z(\xi,z)=(\operatorname{ch}pz-\omega\, pz\operatorname{sh}pz)\alpha+2\omega(\operatorname{sh}pz-pz\operatorname{ch}pz)\beta-2\omega\, pz\operatorname{sh}pz\,\gamma-$$
$$-\left((1-\omega)\operatorname{sh}pz+\omega\, pz\operatorname{ch}pz\right)\delta+E\,\omega\alpha_T\left(pz\operatorname{sh}pz\,\eta+(pz\operatorname{ch}pz-\operatorname{sh}pz)\varepsilon\right), \tag{3.7}$$
$$\bar{\tau}_{\rho z}(p,z)=\left(-(1-\omega)\operatorname{sh}pz+\omega\, pz\operatorname{ch}pz\right)\alpha+2\omega\, pz\operatorname{sh}pz\,\beta+2\omega(\operatorname{sh}pz+pz\operatorname{ch}pz)\gamma+$$
$$+(\operatorname{ch}pz+\omega\, pz\operatorname{sh}pz)\delta-E\,\omega\alpha_T\left((\operatorname{sh}pz+pz\operatorname{ch}pz)\eta+pz\operatorname{sh}pz\,\varepsilon\right), \tag{3.8}$$
$$\bar{T}(\xi,z)=\operatorname{ch}pz\,\eta+\operatorname{sh}pz\,\varepsilon, \tag{3.9}$$

де $\bar{\sigma}_z(p,z)=\bar{\sigma}_z^0(p,z)$, $\bar{\tau}_{\rho z}(p,z)=\bar{\tau}_{\rho z}^1(p,z)$, $U(p,z)=\bar{u}_\rho^1(p,z)$, $W(p,z)=\bar{u}_z^0(p,z)$, $\bar{T}(p,z)=\bar{T}^0(p,z)$, $\omega=1/2(1-\nu)$.

Для знаходження невідомих компонентів ТНДС плити треба визначити допоміжні функції для кожного її шару. Побудуємо рекурентні співвідношення, що пов'язують допоміжні функції сусідніх шарів. Застосуємо до умов (2.3)–(2.5) пряме інтегральне перетворення Ганкеля (3.1). Отримані в результаті співвідношення при використанні рівностей (3.3), (3.4) та формул (3.5)–(3.9) при $z=h_k$ можна записати у вигляді:

$$\bar{\alpha}_{k+1}=M_{11,k}\bar{\alpha}_k+M_{12,k}\bar{\beta}_k+M_{13,k}\eta_k+M_{14\,k}\eta_{n+1}, \tag{3.10}$$
$$\bar{\beta}_{k+1}=M_{21,k}\,\bar{\alpha}_k+M_{22,k}\bar{\beta}_k+M_{23,k}\eta_k+M_{24,k}\eta_{n+1}, \tag{3.11}$$
$$\bar{\eta}_{k+1}=V_k\,\bar{\eta}_k,\ k=\overline{1,n-1}, \tag{3.12}$$

де $\bar{\alpha}_k=\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \delta_k\end{pmatrix}$, $\bar{\beta}_k=\begin{pmatrix}\beta_k\\ \gamma_k\end{pmatrix}$, $\bar{\eta}_k=\begin{pmatrix}\eta_k\\ \varepsilon_k\end{pmatrix}$, $L_k=R_k\,k_{T,k}$, $\bar{\mu}_k=\dfrac{\mu_k}{\mu_{k+1}}$, $S_k=\operatorname{sh}p_k$, $C_k=\operatorname{ch}p_k$, $p_k=ph_k$,

$M_{11,k}=\begin{pmatrix}C_k-\omega_k p_k S_k & -(1-\omega_k)S_k-\omega_k p_k C_k\\ -(1-\omega_k)S_k+\omega_k p_k C_k & C_k+\omega_k p_k S_k\end{pmatrix}$, $M_{12,k}=2\omega_k\begin{pmatrix}S_k-p_kC_k & -p_kS_k\\ p_kS_k & S_k+p_kC_k\end{pmatrix}$,

$M_{13,k}=E_k\,\omega_k\,\alpha_{T,k}\begin{pmatrix}p_kS_k+r_k(S_k-p_kC_k)\\ -S_k-p_kC_k+r_k\,p_kS_k\end{pmatrix}$, $M_{14,k}=E_k\,\omega_k\,\alpha_{T,k}F_k\begin{pmatrix}p_kC_k-S_k\\ -p_kS_k\end{pmatrix}$,

$M_{21,k}=\dfrac{1}{2\bar{\mu}_k}\begin{pmatrix}(2-\omega_k)S_k-\omega_k p_k C_k & -\omega_k p_k S_k\\ \omega_k p_k S_k & (2-\omega_k)S_k+\omega_k p_k C_k\end{pmatrix}$,

$M_{22,k}=\dfrac{1}{\bar{\mu}_k}\begin{pmatrix}-\omega_k p_k S_k+C_k & (1-\omega_k)S_k-\omega_k p_k C_k\\ (1-\omega_k)S_k+\omega_k p_k C_k & \omega_k p_k S_k+C_k\end{pmatrix}$,

$M_{23,k}=\dfrac{E_k\,\omega_k\,\alpha_{T,k}}{2\,\bar{\mu}_k}\begin{pmatrix}S_k+p_kC_k-r_k\,p_kS_k\\ -p_kS_k-r_k(S_k-p_kC_k)\end{pmatrix}$, $M_{24,k}=\dfrac{E_k\,\omega_k\,\alpha_{T,k}F_k}{2\,\bar{\mu}_k}\begin{pmatrix}p_kS_k\\ S_k-p_kC_k\end{pmatrix}$,

$V_k=\begin{pmatrix}C_k+L_k\,p\,S_k & S_k+L_k\,p\,C_k\\ \Delta_k\,S_k & \Delta_k\,C_k\end{pmatrix}$, $k=\overline{1,n}$.

Уведемо фіктивний шар з номером $n+1$ та будемо вважати, що на межі n-го та $(n+1)$-го шарів виконуються умови ідеального механічного та теплового контактів:

$$\sigma_{\rho,n+1}(\rho,0)=\sigma_{\rho,n}(\rho,h_n),\ \tau_{\rho z,n+1}(\rho,0)=\tau_{\rho z,n}(\rho,h_n), \tag{3.13}$$
$$T_{n+1}(\rho,0)=T_n(\rho,h_n), \tag{3.14}$$

Рівності (3.13) та (3.14) у просторі транформант Ганкеля запишемо у такому вигляді:

$$\bar{\alpha}_{n+1}=M_{11,n}\,\bar{\alpha}_n+M_{12,n}\,\bar{\beta}_n+M_{13,n}\eta_n+M_{14,n}\eta_{n+1},\ \eta_{n+1}=C_n\,\eta_n+S_n\,\varepsilon_n.$$

Із останніх співвідношень отримуємо:

$$\bar{\beta}_n=-M_{12,n}^{-1}M_{11,n}\,\bar{\alpha}_n-M_{12,n}^{-1}M_{13,n}\eta_n+M_{12,n}^{-1}\,\bar{\alpha}_{n+1}-M_{12,n}^{-1}M_{14,n}\eta_{n+1},\ \varepsilon_n=-\operatorname{cth}p_n\,\eta_n+\frac{1}{S_n}\eta_{n+1}.$$

Якщо використати процедуру, описану в [4], можна довести, що мають місце наступні залежності:

$$\bar{\beta}_k=A_k\,\bar{\alpha}_k+B_k\bar{\alpha}_{n+1}+D_k\,\eta_k+E_k\,\eta_{n+1},\ \varepsilon_k=-r_k\,\eta_k+F_k\eta_{n+1}, \tag{3.15}$$

де A_k, B_k – матриці податливості k-го шару плити, елементи цих матриць та функції D_k, E_k, F_k, r_k називатимемо функціями податливості термопружної плити (за термінологією [5]).

Аналогічно [4], отримано рекурентні формули, що пов'язують функції податливості сусідніх шарів:

$$A_n = -M_{12,n}^{-1} M_{11,n}\,,\ B_n = M_{12,n}^{-1}\,,\ D_n = -M_{12,n}^{-1} M_{13,n}\,,\ E_n = -M_{12,n}^{-1} M_{14,n}\,,\ F_n = \frac{1}{S_n}\,,\ r_n = \operatorname{cth} p_n\,,$$

$$A_k = \left(A_{k+1}M_{12,k} - M_{22,k}\right)^{-1}\left(M_{21,k} - A_{k+1}M_{11,k}\right),\ B_k = -\left(A_{k+1}M_{12,k} - M_{22,k}\right)^{-1}B_{k+1}\,,$$

$$D_k = \left(A_{k+1}M_{12,k} - M_{22,k}\right)^{-1}\left(M_{23,k} - A_{k+1}M_{13,k} - D_{k+1}\left(C_k + L_k\,pS_k - r_k\left(S_k + L_k\,pC_k\right)\right)\right),$$

$$E_k = \left(A_{k+1}M_{12,k} - M_{22,k}\right)^{-1}\left(M_{24,k} - A_{k+1}M_{14,k} - D_{k+1}\left(S_k + L_k\,pC_k\right)F_k - E_{k+1}\right),$$

$$F_k = \frac{F_{k+1}}{\Delta_k C_k + r_{k+1}\left(S_k + L_k pC_k\right)}\,,\ r_k = \frac{\Delta_k S_k + r_{k+1}\left(C_k + L_k pS_k\right)}{\Delta_k C_k + r_{k+1}\left(S_k + L_k pC_k\right)}. \qquad (3.16)$$

Алгоритм розв'язання задачі:

1) за формулами (3.16) обчислюємо функції податливості плити починаючи з n-го шару;

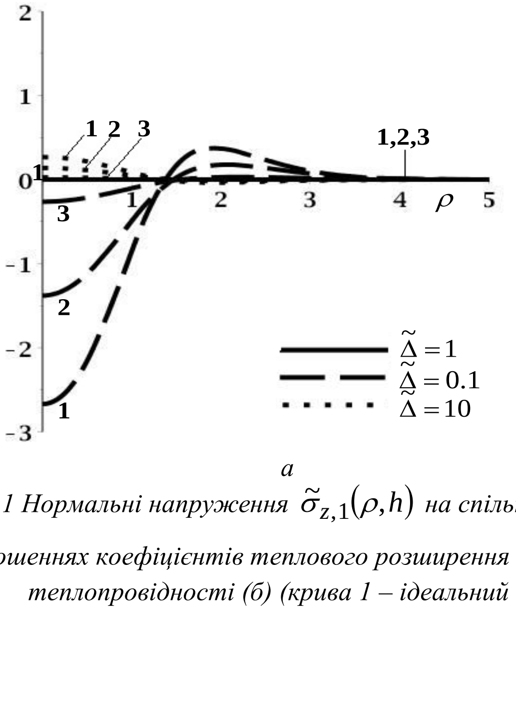
2) використовуючи граничні умови (2.1) та (2.2), знаходимо допоміжні функції α_1, δ_1, η_1 та α_{n+1}, δ_{n+1}, η_{n+1};

3) обчислюємо допоміжні функції шарів за формулами (3.15), (3.10), (3.12);

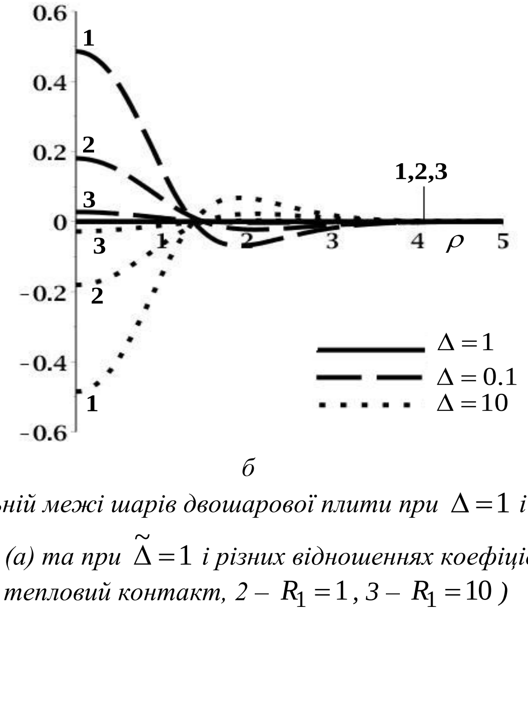
4) підставляємо вирази для допоміжних функцій у трансформанти компонент ТНДС (3.5)–(3.9) та застосовуємо до них обернене перетворення Ганкеля.

4 Чисельні результати

Чисельні розрахунки проведено для двошарової плити з такими характеристиками шарів: $h_1 = h_2 = h$, $E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = 0{,}375$. За крайових умов $T_1(x,0) = \begin{cases} 10\,T_0, |x| < h, \\ 0,\ |x| \ge h, \end{cases}$ $\sigma_{z,1}(\rho,0) = \sigma_{z,2}(\rho,h_2) = 0$, $\tau_{\rho z,1}(\rho,0) = \tau_{\rho z,2}(\rho,h_2) = 0$ знайдено нормальні напруження $\tilde{\sigma}_z(\rho,h) = \sigma_{z1}(\rho,h)/(\alpha_{T1} T_0 E_1)$ на стику шарів двошарової плити для різних відношень коефіцієнтів теплового розширення шарів $\tilde{\Delta} = \alpha_{T1}/\alpha_{T2}$ при $\Delta = k_{T1}/k_{T2} = 1$ (рис. 4.1а) та для різних відношень коефіцієнтів теплопровідності шарів Δ при $\tilde{\Delta} = 1$ (рис. 4.1б). Також знайдено розподіл температури в точках нижньої межі першого шару $\tilde{T}_1(\rho,h) = T_1(\rho,h)/T_0$ (рис. 4.2а) та верхньої межі нижнього шару плити $\tilde{T}_2(\rho,0) = T_2(\rho,0)/T_0$ (рис. 4.2б) для різних відношень коефіцієнтів теплопровідності шарів Δ. На рис. 4.1–4.2 крива 1 відповідає ідеальному тепловому контакту, крива 2 – $R = 1$, крива 3 – $R = 10$.

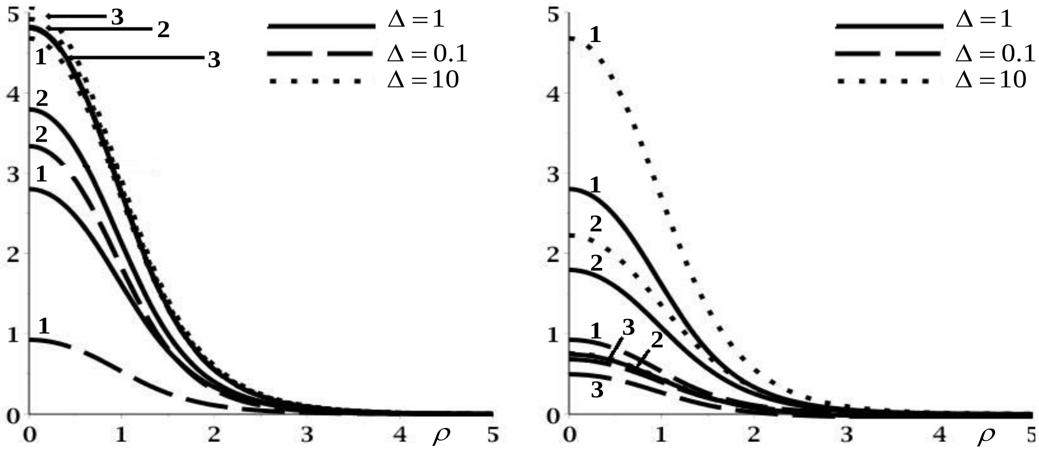


а



б

Рис. 4.1 Нормальні напруження $\tilde{\sigma}_{z,1}(\rho,h)$ на спільній межі шарів двошарової плити при $\Delta = 1$ і різних відношеннях коефіцієнтів теплового розширення (а) та при $\tilde{\Delta} = 1$ і різних відношеннях коефіцієнтів теплопровідності (б) (крива 1 – ідеальний тепловий контакт, 2 – $R_1 = 1$, 3 – $R_1 = 10$)



а б

Рис. 4.2 Температура у точках нижньої межі першого шару плити $\tilde{T}_1(\rho,h)$ *(а) та точках верхньої межі другого шару плити* $\tilde{T}_2(\rho,0)$ *(б) (крива 1 – ідеальний тепловий контакт, 2 –* $R_1 = 1$ *, 3 –* $R_1 = 10$ *)*

Аналіз графіків розподілу наведених нормальних напружень і температури дозволяє зробити наступні висновки:

1) найбільш суттєвий вплив коефіцієнта теплового опору на розподіл нормальних напружень $\tilde{\sigma}_{z,1}(\rho,h)$ спостерігається для плити з $\Delta = 1$, $\tilde{\Delta} = 0{,}1$, а найменш суттєвий – для плити з $\Delta = 1$, $\tilde{\Delta} = 10$;

2) для плити, яка складається з шарів, що мають однакові характеристики, нормальні напруження на стику шарів відсутні;

3) збільшення коефіцієнта теплового опору призводить до зменшення модуля нормальних напружень $\tilde{\sigma}_{z,1}(\rho,h)$;

4) збільшення коефіцієнта теплового опору призводить до збільшення температури $\tilde{T}_1(\rho,h)$ в точках нижньої межі першого шару плити, а в точках верхньої межі другого шару спостерігається зворотній ефект;

5) найбільш суттєвий ефект на розподіл температури $\tilde{T}_1(\rho,h)$ спостерігається при $\Delta = 0{,}1$, а для $\tilde{T}_2(\rho,0)$ – при $\Delta = 10$.

5 Основний текст

Запропоновано спосіб визначення термо-напружено-деформованого стану багатошарової плити з неідеальним тепловим контактом між шарами, що перебуває під дією осесиметричних теплових та силових навантажень. У просторі транформант Ганкеля в матричній формі побудовано рекурентні співвідношення, що пов'язують допоміжні функції сусідніх шарів, через які виражаються трансформанти напружень та переміщень шарів, а також рекурентні співвідношення між функціями податливості сусідніх шарів плити. Проведено чисельні розрахунки для двошарової плити, що знаходиться під дією теплових навантажень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Величко І. Г., Ткаченко І. Г. Плоска термопружна деформація багатошарової основи. *Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. 2004. Вип. 8, т. 1, № 6. С. 154–161.
2. Величко І. Г., Ткаченко І. Г. Просторова та осесиметрична термопружна деформація багатошарової основи. *Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. 2004. Вип. 8, т. 2, № 6/2. С. 36–43.
3. Величко І. Г., Ткаченко І. Г. Осесиметрична мішана задача термопружності для багатошарової основи. *Динамические системы*. 2009. Вып. 26. С. 3–12.
4. Антоненко Н. М. Плоска термопружна деформація багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна*

серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». 2018. Вип. 39. С. 4–13. https://periodicals.karazin.ua/mia/article/download/11642/11043/
5. Приварников А. К. Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований : метод. разработка. Днепропетровск : Днепропетр. гос. ун-т, 1976. 60 с.
6. Antonenko N. M., Tkachenko I. H., Shupchynska K. S. Axisymmetric thermoelastic deformation of a multilayer foundation with imperfect thermal contact of its layers. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2020. Т. 63, № 3. С. 123–129. http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/3350
7. Окрепкий Б. С., Алілуйко А. М. Осесиметрична температурна задача для системи тіл циліндр-шар. *Східно-Європейський журнал передових технологій*. 2014. № ¼ (67). С. 10–17. https://cyberleninka.ru/article/n/osesimetrichna-temperaturna-zadacha-dlya-sistemi-til-tsilindr-shar
8. Бобильов (мол.) О. О., Лобода В. В. Осесиметрична контактна задача термопружності для тришарового пружного циліндра з жорстким нерівномірно нагрітим сердечником. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2013. 56, № 4. С. 149–157. http://www.iapmm.lviv.ua/journal/564_pdf/564_16a.pdf
9. Гера Б. В. Математичне моделювання умов неідеального теплового контакту шарів через тонке включення з джерелами тепла. *Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології*. 2013. Вип. 8. С. 61–72. http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID=&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILA=&2_S21STR=Fmmit_2013_18_8
10. Gera B. V., Dmytruk V. A. Obtaining and investigation of the conditions of heat transfer through inhomogeneous inclusion with heat sources. *Mathematical modeling and computing*. 2015. Vol. 2, № 1. P. 33–47. http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID=&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILA=&2_S21STR=mmc_2015_2_1_6
11. Верещака С. М., Дейнека А. В., Данільцев В. В. Термопружний напружений стан склопластикового шарнірного циліндра з урахуванням неідеального контакту між шарами. *Вісник Запорізького нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки*. 2015. № 3. С. 42–50. https://web.znu.edu.ua/herald/issues/2015/2015-fm-3.pdf
12. Блажевський С. Г. Моделювання процесу дифузії тепла у двошаровому симетричному просторі. *Вісник Херсонського нац. тех. ун-ту.* 2018. Т. 2, № 3 (66). С. 29–33. http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID=&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILA=&2_S21STR=Vkhdtu_2018_3(2)__6
13. Немиш Б. Ю. Об аналитическом решении одного класса трехмерных задач термоупругости для неравномерно нагретых слоистых трансверсально-изотропных пластин. *Прикл. механика*. 1999. Т. 35, № 7. С. 95–103.

REFERENCES

1. I.G. Velychko and I.G. Tkachenko, “Plane thermoelastic deformation of multilayer foundation”. *Visnyk Dnipropetrovskogo universytetu. Seriya: mexanika*, Issue 8, Vol. 1, no. 6, pp. 154-161, 2004. [in Ukrainian]
2. I.G. Velychko and I.G. Tkachenko, “Spatial and axisymmetric thermoelastic deformation of multilayer foundation”. *Visnyk Dnipropetrovskogo universytetu. Seriya: mexanika*, Issue 8, Vol. 2, no. 6/2, pp. 36-43, 2004. [in Ukrainian]
3. I.G. Velychko and I.G. Tkachenko, “An axisymmetrical mixed thermoelectricity problem for multilayer foundation”. *Dynamic systems*, Issue 26, pp. 3-12, 2009. [in Ukrainian]

4. N.M. Antonenko, "Plane thermoelastic deformation of a multilayer plate with elastic links between its layers". *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems»*, vol. 39, pp. 4–13, 2018. [in Ukrainian] https://periodicals.karazin.ua/mia/article/download/11642/11043/
5. A.K. Privarnikov, *The solution of boundary problems of the theory of elasticity for multilayer foundations*. Dnepropetrovsk : DNU, 1976, 60 p. [in Russian]
6. N.M. Antonenko, I.H. Tkachenko, and K.S. Shupchynska, "Axisymmetric thermoelastic deformation of a multilayer foundation with imperfect thermal contact of its layers". *Mathematical methods and physicomechanical fields*, Issue 63, no. 3, pp. 123-129, 2020. [in English] http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/MMPMF/article/view/3350
7. B.S. Okrepkiy and A.M. Aliluiko, "Axisymmetric temperature problem for the body system cylinder-sphere". *Eastert-European Journal of Enterprise Technologies*, no. ¼ (67), pp. 10-17, 2014. [in Ukrainian] https://cyberleninka.ru/article/n/osesimetrichna-temperaturna-zadacha-dlya-sistemi-til-tsilindr-shar
8. A.A. Bobylov (Jr) and V.V. Loboda, "Axisymmetric Contact Problem of Thermoelasticity for a Three-Layer Elastic Cylinder with Rigid Nonuniformly Heated Core". *Mathematical methods and physicomechanical fields*, Issue 56, no. 4, pp. 448-459, 2013. [in Ukrainian] http://www.iapmm.lviv.ua/journal/564_pdf/564_16a.pdf
9. B.V. Gera, "Mathematical modelling of nonideal conditions for thermal contact of layers through thing inclusion with heat source". *Physico-mathematical modelling and informational technologies*, vol. 8, pp. 61-72, 2013. [in Ukrainian] http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID=&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILA=&2_S21STR=Fmmit_2013_18_8
10. B.V. Gera and V.A. Dmytruk, "Obtaining and investigation of the conditions of heat transfer through inhomogeneous inclusion with heat sources". *Mathematical modeling and computing*, vol. 2, no. 1, pp. 33-47, 2015. [in English] http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID=&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILA=&2_S21STR=mmc_2015_2_1_6
11. S.M. Vereshchaka, A.V. Deineka, and V.V. Daniltsev, "Thermal stress state of multilayer fiberglass hinged support cylinder with non-ideal contact between the layers". *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Science*, no. 3, pp. 42-50, 2015. [in Ukrainian] https://web.znu.edu.ua/herald/issues/2015/2015-fm-3.pdf
12. S.G. Blazhevskiy, "Modeling of the process of heat diffusion in two-layer symmetric space". *Visnyk of Kherson National Technical University*, Issue 2, no. 3 (66), pp. 29-33, 2018. [in Ukrainian] http://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID=&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILA=&2_S21STR=Vkhdtu_2018_3(2)__6
13. B.Yu. Nemish, "Three-dimensional thermoelasticity problems for nonuniformly heated laminar transversally isotropic plates". *Applied Mechanics*, Issue 35, no. 7, pp. 732-740, 1999. [in Russian]

Надійшла – 05.06.2021.