

УДК 519.6

Система комп'ютерного моделювання нелінійної теплопровідності

І.В. Гарячевська, Д.О. Протектор, Е.О. Усатенко

**Гарячевська Ірина
Василівна**

*к.т.н., доцент; директор навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
площа Свободи 4, Харків, Україна, 61022
e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua
<https://orcid.org/0000-0002-4630-9519>*

**Протектор Денис
Олегович**

*асистент
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
площа Свободи 4, Харків, Україна, 61022
e-mail: d.protector@karazin.ua
<https://orcid.org/0000-0003-3323-7058>*

**Усатенко Емілія
Олександрівна**

*студент
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
площа Свободи 4, Харків, Україна, 61022
e-mail: emiliya-foxdnep@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0002-6500-6775>*

В статті розглядається система комп'ютерного моделювання процесів, які описуються одновимірним нестационарним рівнянням теплопровідності зі степеневу нелінійністю. Розв'язок нелінійного рівняння теплопровідності реалізується за безсітковою схемою, яка заснована на комбінації методу колокації та радіальних базисних функцій. Радіальні базисні функції використовуються для апроксимації розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними, а метод колокації застосовується для знаходження невідомих коефіцієнтів. Система комп'ютерного моделювання дозволяє використовувати наступні радіальні базисні функції: Гаусова, мультиквадратична, зворотна квадратична та зворотна мультиквадратична функції. В системі комп'ютерного моделювання передбачено завдання граничних та початкових умов крайової задачі, а також таких параметрів розв'язку як показник степеня у нелінійному рівнянні теплопровідності, коефіцієнт теплопровідності, щільність, питома теплоємність при сталому тиску, розмір області крайової задачі, відстань між інтерполяційними вузлами, часовий інтервал нестационарної крайової задачі, крок за часом, а також параметр форми радіальної базисної функції. Візуалізація наближеного розв'язку одновимірного нестационарного рівняння теплопровідності зі степеневу нелінійністю в системі комп'ютерного моделювання реалізується у вигляді тривимірної поверхні. Система надає можливість візуалізації наближених розв'язків на окремих часових інтервалах у вигляді тривимірних графіків. Результати чисельних розрахунків демонструються на прикладі тестової задачі, що моделює зупинку фронту теплової хвилі в нелінійному рівнянні теплопровідності.

Ключові слова: система комп'ютерного моделювання, нелінійна теплопровідність, радіальні базисні функції, нестационарна крайова задача, безсітковий метод.

Computer Simulation System of Nonlinear Thermal Conductivity

I. Hariachevska, D. Protektor, E. Usatenko

Hariachevska Iryna

*PhD of Technical Sciences, Associate Professor; Head of the Education and Research Institute of Computer Physics and Energy
V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine,
61022*

Protektor Denys

*Assistant Lecturer
V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine,
61022*

Usatenko Emiliia

*Student
V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, Ukraine,
61022*

The computer simulation system of nonlinear processes described by the one-dimensional nonstationary heat equation with power-law nonlinearity has been examined in the article. The solution of the nonlinear heat equation is realized by a meshless scheme, which is based on combination of the collocation method and radial basis functions. Radial basis functions are used to approximate the solution of a partial differential equation, while the collocation method is used to determine unknown coefficients. The computer simulation system allows us to use the following radial basis functions: Gaussian, multiquadric, inverse quadratic, and inverse multiquadric. The computer simulation system allows setting the initial and boundary conditions of the boundary-value problem. In the computer simulation system, it is possible to set such parameters of the solution as the exponent in the nonlinear heat equation, the coefficient of thermal conductivity, the density, the specific heat at constant pressure, the size of the domain of the boundary-value problem, the distance between interpolation nodes, the time interval of the nonstationary boundary-value problem, the time step, and the shape parameter of the radial basis function. The visualization of an approximate solution of the one-dimensional nonstationary heat equation with power-law nonlinearity is realized in the form of the three-dimensional surface in the computer simulation system. The computer simulation system allows visualization of the solution at chosen time steps as three-dimensional plots. The results of numerical calculations are demonstrated by solving the benchmark problem that simulates the stopping of a heat wave front in a heat equation with power-law nonlinearity.

Keywords: *computer simulation system, nonlinear thermal conductivity, radial basis functions, nonstationary boundary-value problem, meshless method.*

Система компьютерного моделирования нелинейной теплопроводности

**Гарячевская
Ирина Васильевна**

*к.т.н., доцент; директор учебно-научного института компьютерной физики и энергетики
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
площадь Свободы 4, Харьков, Украина, 61022*

**Протектор
Денис Олегович**

*ассистент
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
площадь Свободы 4, Харьков, Украина, 61022*

**Усатенко
Эмилия
Александровна**

*студент
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,
площадь Свободы 4, Харьков, Украина, 61022*

В статье рассматривается система компьютерного моделирования процессов, которые описываются одномерным нестационарным уравнением теплопроводности со степенной нелинейностью. Решение нелинейного уравнения теплопроводности реализуется по бессеточной схеме, которая основана на комбинации метода коллокации и радиальных базисных функций. Радиальные базисные функции используются для аппроксимации решения дифференциального уравнения в частных производных, а метод коллокации применяется для нахождения неизвестных коэффициентов. Система компьютерного моделирования позволяет использовать следующие радиальные базисные функции: функция Гаусса, мультиквадратичная, обратная квадратичная и обратная мультиквадратичная функции. В системе компьютерного моделирования предусмотрено задание граничных и начальных условий краевой задачи, а также таких параметров решения как показатель степени в нелинейном уравнении теплопроводности, коэффициент теплопроводности, плотность, удельная теплоемкость при постоянном давлении, размер области краевой задачи, расстояние между интерполяционными узлами, временной интервал нестационарной краевой задачи, шаг по времени, а также параметр формы радиальной базисной функции. Визуализация приближенного решения одномерного нестационарного уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью в системе компьютерного моделирования реализуется в виде трехмерной поверхности. Система предоставляет возможность визуализации приближенных решений на отдельных временных интервалах в виде трехмерных графиков. Результаты численных расчетов демонстрируются на примере тестовой задачи, моделирующей остановку фронта тепловой волны в нелинейном уравнении теплопроводности.

Ключевые слова: *система компьютерного моделирования, нелинейная теплопроводность, радиальные базисные функции, нестационарная краевая задача, бессеточный метод.*

1 Вступ

Нелінійні параболічні рівняння другого порядку є основою багатьох математичних моделей, що використовуються у фізиці, механіці, біології, хімії та екології. Наприклад, нелінійне рівняння теплопровідності при певних умовах описує процеси електронної та іонної теплопровідності в плазмі, адіабатичній фільтрації газів і рідин в пористих середовищах, течії крові в кровоносних судинах, дифузії нейтронів і альфа-частинок в реакторних матеріалах, хімічної кінетики та біологічної активності.

Нелінійні процеси теплопровідності вперше вивчалися в роботі Я. Б. Зельдовича та А. С. Компанійця [1]. Авторами розглянуто процес поширення тепла за допомогою механізму променевої теплопровідності з миттєвого точкового джерела для плоскої задачі. Розв'язок цієї задачі було отримано в аналітичному вигляді.

Серед рівнянь зазначеного типу особливо часто зустрічається рівняння теплопровідності зі степеневою нелінійністю. Його універсальний характер дає підставу стверджувати, що чисельний розв'язок крайових задач, які описуються рівнянням теплопровідності зі степеневою нелінійністю залишається й понині досить актуальною темою дослідження.

Останнє десятиліття ознаменувалося значним інтересом до безсіткових методів, заснованих на використанні радіальних базисних функцій. На відміну від методу скінченних елементів, безсіткові методи не потребують побудови інтерполяційної сітки всередині області крайових задач, що робить їх обчислювально ефективнішими за скінченно-різницеві методи.

Едвард Канса [2] запропонував без сітковий метод, який був заснований комбінації методу колокації та радіальних базисних функцій. В цьому методі, радіальні базисні функції використовуються для апроксимації розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними, а метод колокації застосовується для знаходження невідомих коефіцієнтів. Дана схема була успішно застосована для розв'язку нелінійних крайових задач, зокрема для чисельного розв'язку рівняння Бюргерса [3] та рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку [4].

Метою дослідження є розробка та програмна реалізація системи комп'ютерного моделювання процесів, які описуються одновимірним нестационарним рівнянням теплопровідності зі степеневою нелінійністю. Чисельний розв'язок в системі комп'ютерного моделювання реалізується за безсітковою схемою з використанням радіальних базисних функцій. Для апроксимації розв'язку в системі використовуються Гаусова, мультикватратична, зворотна квадратична та зворотна мультикватратична радіальні базисні функції.

2 Ітераційна схема

Розглянемо одновимірне нестационарне рівняння теплопровідності зі степеневою нелінійністю:

$$\rho c_p \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(u^\sigma(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \quad (1)$$

де $x \in [a,b]$, $t \in [0,T]$, ρ – щільність, c_p – питома теплоємність при сталому тиску, k – коефіцієнт теплопровідності, $\sigma > 0$ – відомий коефіцієнт.

Початкові умови мають наступний вид:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [a,b] \quad (2)$$

Граничні умови Діріхле задаються у вигляді:

$$\begin{cases} u(a,t) = g_1(t) \\ u(b,t) = g_2(t) \end{cases}, \quad t \in [0,T] \quad (3)$$

Зробивши заміну $u(x,t) = v^{1/\sigma}(x,t)$ в рівнянні (1), отримаємо рівняння

$$\rho c_p \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{k}{\sigma} \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right)^2 + kv(x,t) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \quad (4)$$

з початковими

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in [a,b] \quad (5)$$

та граничними умовами

$$\begin{cases} v(a,t) = h_1(t) \\ v(b,t) = h_2(t) \end{cases}, \quad t \in [0,T] \quad (6)$$

Застосуємо θ -схему для дискретизації рівняння (4) за часом, отримаємо:

$$v(x,t) \approx \theta v^{n+1} + (1-\theta)v^n \quad (7)$$

$$\nabla v(x,t) \approx \theta \nabla v^{n+1} + (1-\theta)\nabla v^n \quad (8)$$

$$\Delta v(x, t) \approx \theta \Delta v^{n+1} + (1 - \theta) \Delta v^n \quad (9)$$

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \approx \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} \quad (10)$$

де $v^n = v(x, t^n)$, $t^n = n\tau$, τ – крок за часом, n – номер ітерації, $0 \leq \theta \leq 1$ – ваговий коефіцієнт,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Підставимо рівняння (7)-(10) в рівняння (4):

$$\rho c_p \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = \frac{k}{\sigma} \left(\theta \nabla v^{n+1} + (1 - \theta) \nabla v^n \right)^2 + k \left(\theta v^{n+1} \Delta v^{n+1} + (1 - \theta) v^n \Delta v^n \right) \quad (11)$$

Поклавши $\theta = 0$ в рівнянні (11), отримуємо:

$$\rho c_p \frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} = \frac{k}{\sigma} \left(\nabla v^n \right)^2 + k v^n \Delta v^n \quad (12)$$

Перепишемо рівняння (12) в наступній формі:

$$v^{n+1} = v^n + \frac{\tau k}{\rho c_p} \left(\frac{1}{\sigma} \left(\nabla v^n \right)^2 + v^n \Delta v^n \right) \quad (13)$$

Розподілимо рівномірно $N - 2$ точки колокації $\{x_i\}_2^{N-1}$ всередині області (a, b) та дві точки на кордоні області $x_1 = a$ і $x_n = b$. Будемо шукати наближений розв'язок рівняння (4) за допомогою лінійної комбінації радіальних базисних функцій $\varphi(r_{ij})$:

$$v^n(x_i) \approx \sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi(r_{ij}) \quad (14)$$

де $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$ – евклідова відстань між вузлами, α_j^n – невідомі коефіцієнти, які потребують визначення.

Підставимо рівняння (14) в рівняння (13), та отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для точок всередині області

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi(r_{ij}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi(r_{ij}) + \frac{\tau k}{\rho c_p} \left[\frac{1}{\sigma} \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi'(r_{ij}) \right)^2 + \sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi(r_{ij}) \sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi''(r_{ij}) \right] \quad (15)$$

та систему для точок на границях області

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi(r_{1j}) = h_1(t) \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi(r_{Nj}) = h_2(t) \end{cases} \quad (16)$$

В даній роботі використовуються наступні радіальні базисні функції:

$$\varphi(r_{ij}) = e^{-(cr_{ij})^2} \text{ – Гаусова функція}$$

$$\varphi(r_{ij}) = \sqrt{r_{ij}^2 + c^2} \text{ – мультікватрична функція}$$

$$\varphi(r_{ij}) = \frac{1}{r_{ij}^2 + c^2} \text{ – зворотна квадратична функція}$$

$$\varphi(r_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{(r_{ij}^2 + c^2)^3}} \text{ – зворотна мультікватрична функція}$$

де $c \neq 0$ – параметр форми радіальної базисної функції.

Будемо розв'язувати рівняння (13) крок за кроком, починаючи з початкових умов (5). Запишемо рівняння (14) разом з граничними умовами (6) в матричній формі:

$$[v]^n = A[\alpha]^n \quad (17)$$

де $[v]^n = [v_1^n, v_2^n, \dots, v_N^n]^T$, $[\alpha]^n = [\alpha_1^n, \alpha_2^n, \dots, \alpha_N^n]^T$ і $A = [\varphi(r_{ij})]$, $1 \leq i, j \leq N$.

Розділимо матрицю A в рівнянні (17) на дві матриці A_d і A_b , які відповідають внутрішнім і граничним точкам області крайової задачі:

$$A = A_d + A_b \quad (18)$$

де

$$A_d = \begin{cases} \varphi(r_{ij}), & \text{якщо } 2 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

$$A_b = \begin{cases} \varphi(r_{ij}), & \text{якщо } i=1, N, 1 \leq j \leq N \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

Запишемо разом рівняння (15) і (16), з урахуванням рівняння (18), в матричній формі:

$$A[\alpha]^{n+1} = A_d[\alpha]^n + \frac{\tau k}{\rho c_p} \left(\frac{1}{\sigma} (B_d[\alpha]^n) \cdot (B_d[\alpha]^n) + (A_d[\alpha]^n) \cdot (C_d[\alpha]^n) \right) + [H]^{n+1} \quad (19)$$

де

$$B_d = \begin{cases} \varphi'(r_{ij}), & \text{якщо } 2 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

$$C_d = \begin{cases} \varphi''(r_{ij}), & \text{якщо } 2 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

$[H]^{n+1} = \left[h_1^{n+1}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{N-2}, h_2^{n+1} \right]^T$, “ \cdot ” – покомпонентний добуток двох векторів.

Позначимо праву частину в рівнянні (19) наступним чином:

$$M = A_d[\alpha]^n + \frac{\tau k}{\rho c_p} \left(\frac{1}{\sigma} (B_d[\alpha]^n) \cdot (B_d[\alpha]^n) + (A_d[\alpha]^n) \cdot (C_d[\alpha]^n) \right) + [H]^{n+1} \quad (20)$$

Тоді рівняння (19) можна переписати у вигляді

$$A[\alpha]^{n+1} = M \quad (21)$$

Рівняння (21) може бути розв'язане відносно невідомих коефіцієнтів $[\alpha]^{n+1}$ наступним чином:

$$[\alpha]^{n+1} = A^{-1}M \quad (22)$$

Наближений розв'язок рівняння (4) на $n+1$ кроці може бути знайдений за формулою:

$$[v]^{n+1} = A[\alpha]^{n+1} \quad (23)$$

Наведений ітераційний метод було програмно реалізовано в створеній системі комп'ютерного моделювання.

3 Опис системи комп'ютерного моделювання

Інтерфейс системи комп'ютерного моделювання процесів, які описуються одновимірним нестационарним рівнянням теплопровідності зі степеневою нелінійністю представлено на Рис. 1.

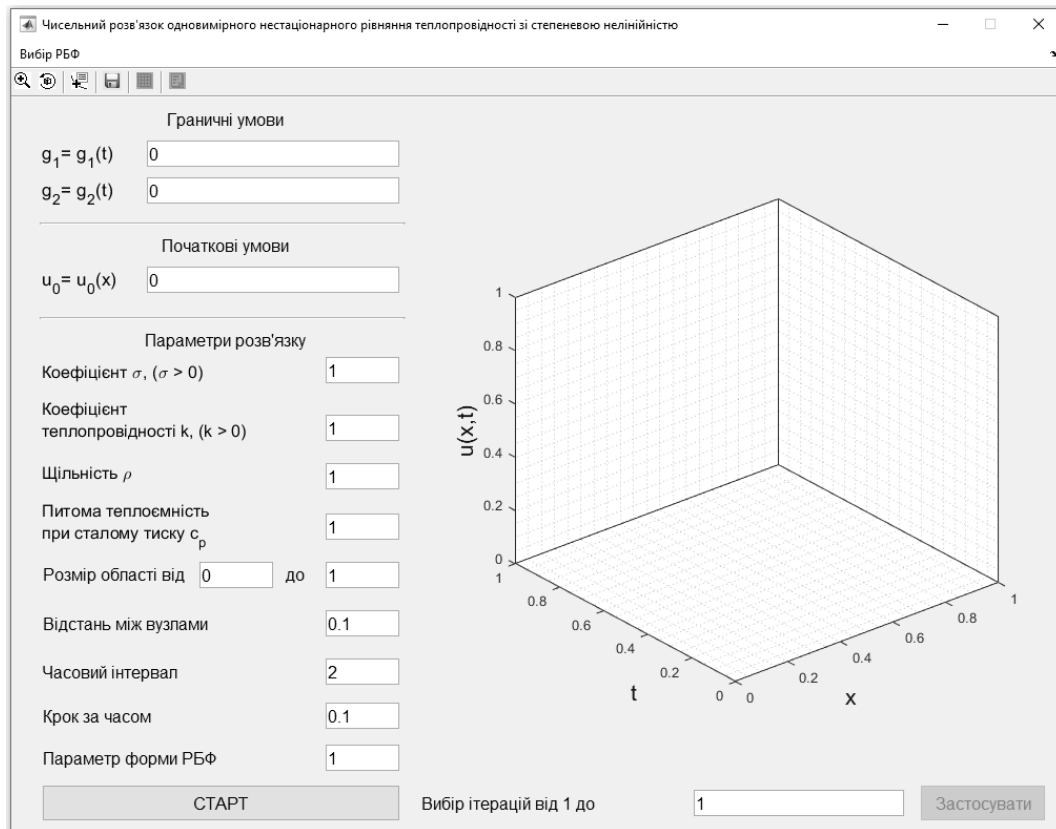


Рис. 1. Інтерфейс системи комп'ютерного моделювання

На Рис. 2 зображена панель інструментів, яка розташована в верхній частині головного вікна програми.

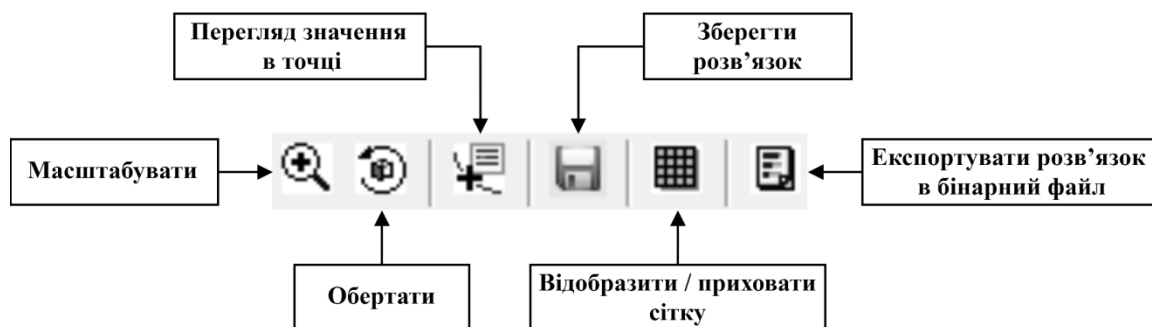


Рис. 2. Панель інструментів

На панелі інструментів розміщені кнопки, які дозволяють масштабувати графічну область та обертати її в тривимірному просторі, зберігати наближений розв'язок в растрові та векторний графічні формати, відображати числове значення отриманого розв'язку в окремих точках, відображати та приховувати сітку на тривимірній поверхні, а також експортувати розв'язок в бінарний файл.

В системі комп'ютерного моделювання передбачено завдання граничних та початкових умов крайової задачі. Початкові умови можуть набувати константного значення, або бути функцією, що залежить від координат. Граничні умови задаються в числовому виді, або як функція, що залежить від часу.

Система комп'ютерного моделювання дає можливість налаштовувати наступні параметри розв'язку крайової задачі: показник степеня у нелінійному рівнянні теплопровідності, коефіцієнт теплопровідності, щільність, питома теплоємність при сталому тиску, розмір області крайової задачі, відстань між інтерполяційними вузлами, часовий інтервал нестационарної крайової задачі, крок за часом, а також параметр форми радіальної базисної функції.

Розв'язок одновимірного нестационарного рівняння теплопровідності зі степеневою нелінійністю в системі комп'ютерного моделювання візуалізується у вигляді тривимірної поверхні (Рис. 3).

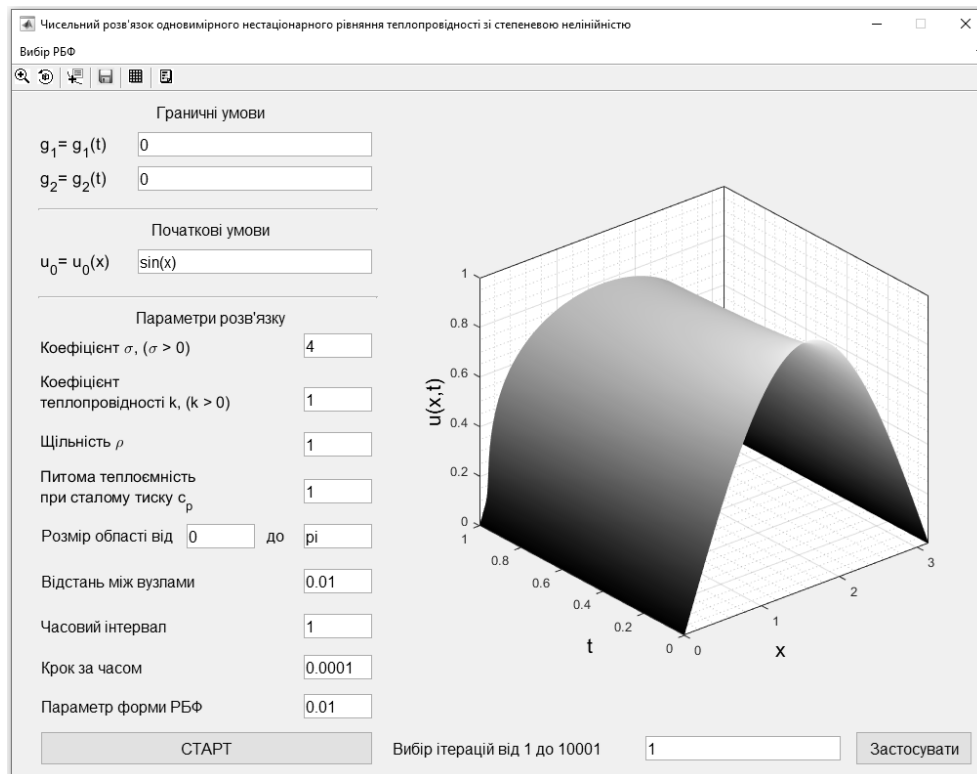


Рис. 3. Візуалізація наближеного розв'язку у вигляді тривимірної поверхні

Система комп'ютерного моделювання дозволяє візуалізувати отриманий наближений розв'язок на окремих проміжках часу у вигляді тривимірних графіків (Рис. 4).

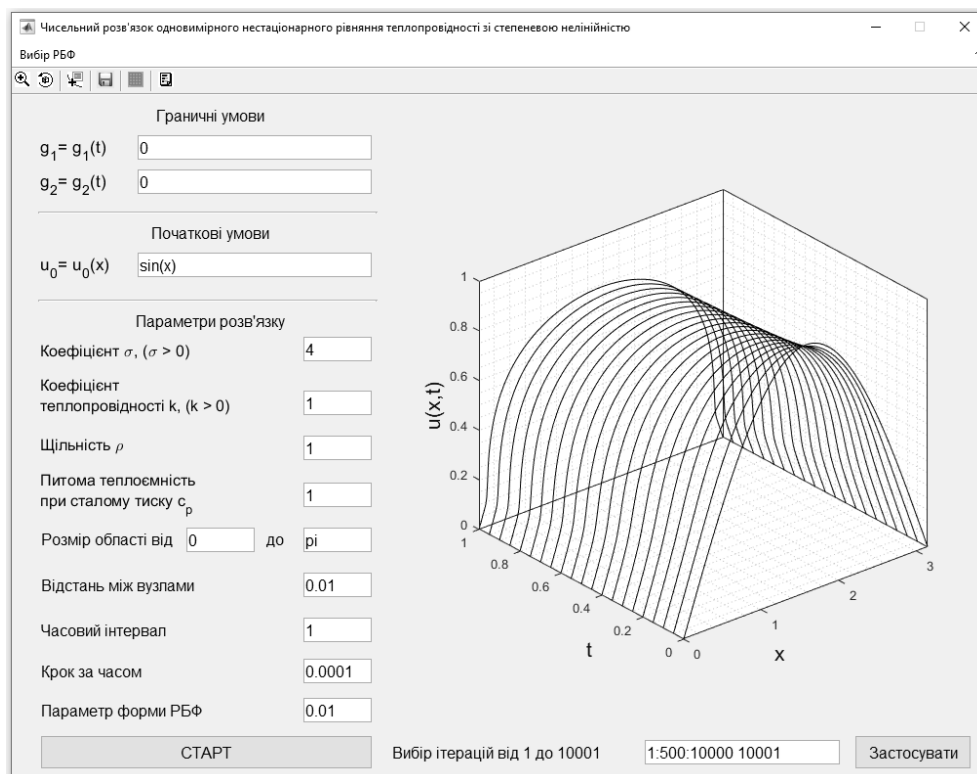


Рис. 4. Візуалізація наближеного розв'язку на окремих проміжках часу

4 Числові результати

В цьому розділі демонструються результати чисельних розрахунків на прикладі тестової задачі, що моделює зупинку фронту теплової хвилі в нелінійному рівнянні теплопровідності.

Постановка задачі

Розглянемо одновимірне нестационарне рівняння теплопровідності зі степеневою нелінійністю:

$$\rho c_p \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(u^\sigma(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \quad (24)$$

де $x \in [0,1]$, $d_x = 0.01$, $\tau = 0.0001$, $\rho = 1$, $c_p = 1$, $k = 1$, $\sigma = 4.5$.

Початкові умови задані наступним рівнянням:

$$u(x,0) = \frac{1}{2} \left(4 \left| x - \frac{1}{4} \right| - 8 \left| x - \frac{1}{2} \right| + 4 \left| x - \frac{3}{4} \right| \right) \quad (25)$$

Граничні умови мають вид:

$$\begin{cases} u(a,t) = 0 \\ u(b,t) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

На Рис. 5 представлена візуалізація наближеного розв'язку даної крайової задачі.

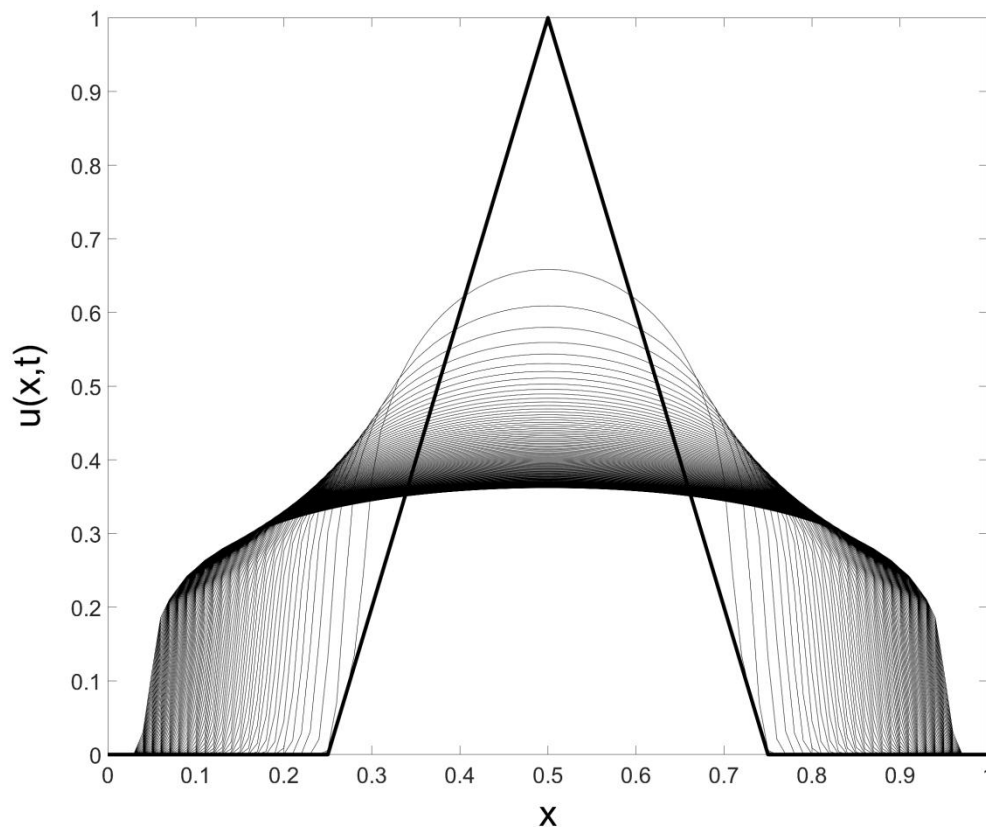


Рис. 5. Візуалізація наближеного розв'язку тестової задачі

Дана задача моделює процес зупинки фронту теплової хвилі в нелінійному рівнянні теплопровідності. Жирною лінією на Рис. 5 зображено початковий розподіл температури.

5 Висновки

Розроблена система комп'ютерного моделювання процесів, які описуються одновимірним нестационарним рівнянням теплопровідності зі степеневою нелінійністю. Розв'язок нелінійного рівняння теплопровідності реалізується за безсітковою схемою, яка заснована на комбінації методу колокації та радіальних базисних функцій. В системі комп'ютерного моделювання

передбачено завдання граничних та початкових умов, а також низки параметрів розв'язку крайової задачі. Наближений розв'язок нестационарної крайової задачі візуалізується у вигляді тривимірної поверхні, або у вигляді тривимірних графіків. Результати чисельних розрахунків продемонстровані на прикладі тестової задачі, що моделює зупинку фронту теплової хвилі в нелінійному рівнянні теплопровідності. Отриманий результат чисельний розрахунків корелюється з експериментальними даними.

ЛІТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. *Сборник посвященный 70 -летию академика А.Ф. Иоффе*. 1950. С. 61–71. URL: <http://books.e-heritage.ru/book/10081565> (дата звернення: 25.02.2021).
2. Kansa E. J. Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – I surface approximations and partial derivative estimates. *Computers & Mathematics with Applications*. 1990. Vol. 19. P. 127-145. DOI: 10.1016/0898-1221(90)90270-T. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/089812219090270T?via%3Dihub> (Last accessed: 25.02.2021).
3. Гарячевська І. В., Протектор Д. О. Система комп'ютерного моделювання для числового вирішення одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2019. Вип. 43. С. 11–19. DOI: 10.26565/2304-6201-2019-43-02. URL: <https://periodicals.karazin.ua/mia/article/view/14807/13856> (дата звернення: 25.02.2021).
4. Гарячевська І. В., Протектор Д. О. Безсітковий метод для числового вирішення рівняння Кортвега-де Фріза сьомого порядку. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2020. Вип. 45. С. 10–20. DOI: 10.26565/2304-6201-2020-45-02. URL: <https://periodicals.karazin.ua/mia/article/view/15819/14634> (дата звернення: 25.02.2021).

REFERENCES

1. Ya. B. Zel'dovich, A. S. Kompaneets, "On the theory of heat propagation with temperature-dependent thermal conductivity". *Collection Devoted to 70th Birthday of Academician A. F. Ioffe*, pp. 61–71, 1950. [in Russian] URL: <http://books.e-heritage.ru/book/10081565> (Last accessed: 25.02.2021).
2. E. J. Kansa, "Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – I surface approximations and partial derivative estimates". *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 19, pp. 127-145, 1990. DOI: 10.1016/0898-1221(90)90270-T. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/089812219090270T?via%3Dihub> (Last accessed: 25.02.2021).
3. I. V. Garyachevskaya, D. O. Protektor, "Computer modeling system for the numerical solution of the one-dimensional non-stationary Burgers' equation". *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, Series «Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems»*, Vol. 43, pp. 11–19, 2019. DOI: 10.26565/2304-6201-2019-43-02. URL: <https://periodicals.karazin.ua/mia/article/view/14807/13856> (Last accessed: 25.02.2021).
4. I. V. Garyachevskaya, D. O. Protektor, "A meshless method for the numerical solution of the seventh-order Korteweg-de Vries equation". *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, Series «Mathematical Modeling. Information Technology. Automated Control Systems»*, Vol. 45, pp. 10–20, 2020. DOI: 10.26565/2304-6201-2020-45-02. URL: <https://periodicals.karazin.ua/mia/article/view/15819/14634> (Last accessed: 25.02.2021).