DOI: 10.26565/2304-6201-2020-48-07

УДК 004.942

Дескриптивні моделі детермінованих систем

І.А. Отлев, Г. М. Жолткевич

Отлев Ілля Анатолійович — *Аспірант кафедри теоретичної та прикладної інформатики факультету математики і інформатики. Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;*
e-mail: io.sonics.cm@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0227-1413

Жолткевич Григорій Миколайович — *Доктор фізико-математичних наук, професор; декан факультету математики і інформатики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;*
e-mail: *g.zholtkevych@karazin.ua;*
https://orcid.org/0000-0002-7515-2143

Класичні чіткі математичні моделі складних систем не гнучкі та вибагливі до ресурсів в процесі побудови і тяжкі в роботі. Побудова таких моделей складних систем у новій предметній області стикається з рядом проблем. Область, знання та дані погано структуровані або не структуровані взагалі, частина даних відсутня або, навпаки, даних так багато, що виокремити суттєві стає дуже складно. А тому побудова чіткої математичної моделі, вивчення її динаміки для потрібної предметної області стає дуже важким або навіть неможливим завданням. Тому для розв'язку таких завдань ми потребуємо нових методів, а саме побудови дескриптивної моделі складних систем. Дескриптивна модель виступає в ролі не чіткої, але якісної моделі, яка при дослідженні дає змогу дати описову структуру системи, для якої побудована, характер її внутрішніх відносин, наближені правила її динаміки. Така якісна модель дає змогу вже на першому етапі відхилити гіпотези, що з нею не співвідносяться.

Ключові слова: *математична модель, складні системи, динаміка складних систем, дескриптивні моделі.*

Descriptive models of the determined systems

I. Otlev, G. Zholtkevych

Otlev I. A. — *PhD student of the department of theoretical and applied inforamatics. department of Mathematics and Informatics, Kharkiv National University named by V. N. Karazin. Freedom Square 4, Kharkiv, 61022*

Zholtkevych G. N. — *Professor, Dean of the department of Mathematics and Informatics, Kharkiv National University named by V. N. Karazin. Freedom Square 4, Kharkiv, 61022*

Common mathematical models of complex systems are not flexible, their creation is very resource-demanding and they are hard to work with. The numerous problems can arise during the process of building a mathematical model for complex systems. An area of knowledge, facts, and information could be structured badly or not structured at all. Part of the data might be missing or vice versa – we might have too much data available, which makes it difficult to find the necessary information. Therefore building a formal mathematical model, studying its dynamic for the relevant area of knowledge becomes a very hard or even almost impossible task. And that is why the new methods for such task are in much demand, namely, the methods of building descriptive mathematical models. The descriptive mathematical model serves as not a strict and formal model but a qualitative one. Such a qualitative model gives us a possibility to describe the character of the system, behavior of its internal components, and approximate rules of its dynamics. The qualitative model gives us a chance to deny the propositions, which do not fit the model directly at the first stage.

Keywords: *Dynamical systems, complex systems, mathematical modelling, descriptive modeling.*

Дескриптивные модели детерминированных систем

И.А. Отлев, Г. Н. Жолткевич

Отлев Илья Анатольевич *Аспирант 4 года обучения, кафедра теоретической и прикладной информатики, факультет Математики и Информатики, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Площадь Свободы, 4, г. Харьков, Украина, 61022*

Жолткевич Григорий Николаевич *д.ф-м.н., профессор; декан факультета Математики и Информатики, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Площадь Свободы, 4, г. Харьков, Украина, 61022*

Классические четкие математические модели сложных систем не гибкие, очень требовательные к количеству ресурсов в процессе построения и сложны в работе. Построение моделей сложных систем для новой предметной области связано с рядом проблем. Область, знания или данные плохо структурированы или не структурированы вовсе, часть данных отсутствует или, наоборот, данных так много, что выделить необходимые становиться очень трудно. А поэтому построение чёткой математической модели, изучение её динамики для интересующей нас предметной области становиться очень трудной или почти невозможной задачей. Поэтому для решения таких задач нам требуются новые методы, а именно методы построения дескриптивных моделей. Дескриптивная модель выступает в роли не чёткой, но качественной модели, которая при исследовании даёт возможность сделать описательную структуру системы, для которой построена, характер её внутренних отношений, приближённые правила динамики. Такая качественная модель даёт возможность уже на первом этапе отбросить гипотезы, которые с ней не соотносятся.

Ключевые слова: *математическая модель, сложные системы, динамика сложных систем, дескриптивные модели.*

1 Вступ

Математичне моделювання є загально прийнятим методом дослідження складних природних і технічних систем [1]. Це зумовлено складністю, а іноді і неможливістю, експериментальних досліджень зважаючи на фізичні, технічні, чи фінансові обмеження. Основою математичного моделювання є математична модель, що представляє собою приблизний опис об'єкту чи явища, що досліджується, отриманий шляхом абстрагування від несуттєвих з точки зору дослідника властивостей об'єкту дослідження, його складових та зв'язків між ними. Крім того, такий опис виконується на базі певного обраного математичного формалізму, який надає відповідний інструментарій аналізу моделі з метою прояснення структури об'єкта дослідження, прогнозування його поведінки, визначення можливостей і методів керування такою поведінкою. Розвиток сучасних інформаційних технологій дозволяє застосовувати комп'ютерні системи до аналізу математичних моделей за умови, що математичний формалізм, обраний дослідником базується на конструктивній математиці і може бути поданий комплексом алгоритмів і структур даних. Відповідний різновид математичного моделювання відомий як імітаційне моделювання, а моделі, що використовує підхід – імітаційними моделями.

Таким чином, створення адекватної об'єкту і меті дослідження математичної моделі є передумовою успішного досягнення цієї мети. Слід підкреслити, що побудова адекватної математичної моделі потребує структурованих знань про об'єкт дослідження, відповідних обчислювальних ресурсів та часу.

При застосуванні математичного моделювання до дослідження конкретних систем визначну роль відіграє контекст дослідження. Саме контекст фіксує точку зору дослідника і спосіб змістовної інтерпретації математичних результатів, отриманих під час математичного чи комп'ютерного аналізу моделі.

При досліджені складних систем у галузях де математичні методи традиційно не використовуються, або використовуються в елементарній формі, виникає проблема поетапної побудови ланцюга моделей, які поступово ускладнюються. Важливою властивістю такого ланцюга є узгодженість його членів у тому розумінні, що наступна модель у ланцюгу є більш специфічною, але не суперечить попередній [2, § 1.2]. Така точка зору, з якої побудова моделі розглядається як покроковий процес побудови ланцюга узгоджених моделей, потребує визначення першого члену цього ланцюга. В кожному конкретному випадку вибір першого члена є специфічним. Наприклад, якщо для предметної області дослідження вже існують розвинуті математичні моделі, тоді ланцюг буде починатися з найбільш близької до проблеми, що досліджується, існуючої моделі і складається з двох-трьох членів.

Проте, нас цікавить інша ситуація, тобто об’єктом дослідження є система з предметної області, для якої не має чітко структурованого, формального опису. В такому випадку вихідний член ланцюгу моделей є достатньо простим і представляє системні компоненти і зв’язки між ними на логічному, описовому рівні. Саме для цього випадку ми пропонуємо використовувати дескриптивне моделювання. Дескриптивне моделювання було запропоновано в роботах [3, 4] для дослідження техногенних впливів на екосистеми.

Дескриптивне моделювання є спеціальним видом математичного моделювання, який використовується для встановлення базових модельних залежностей. Кінцевою метою такого моделювання є побудова не детальної математичної моделі процесу чи явища, а його описової моделі. Така модель на відміну від детальної фіксує тільки якісні залежності між параметрами моделі. Звичайно, вона не дає детальних відповідей на питання, що виникають в процесі дослідження, але вона має інше призначення. Така модель дає змогу зробити приблизну оцінку системи, дає її якісний опис. Така модель будується для відповіді на конкретні запитання про характер внутрішніх відносин або динаміку системи, і перевірки деяких гіпотез, пов’язаних з цими питаннями на якісному рівні. Вже такий загальний опис, що відповідає дескриптивній моделі, дає можливість відкинути деякі гіпотези, що не відповідають дескриптивній моделі.

2 Дескриптивна динаміка

У даній статті ми подаємо метод побудови дескриптивних моделей складних систем. Зважаючи на те, що дескриптивна модель є математичною моделлю, її побудова має відповідати всім чотирьом основним етапам загальної схеми побудови математичної моделі [5].

На першому етапі ми повинні вивчити наш об’єкт чи явище, спробувати виявити його характерні риси. На цьому етапі ми потребуємо більшої кількості знань і фактів, що мають відношення до об’єкта чи явища, яке ми збираємось описувати за допомогою моделі. Тобто на цьому етапі ми маємо знайти відповіді на запитання, що ми хочемо описати нашою моделлю. На які питання для нашої системи ми хотіли б знайти відповіді? Можливо звузити коло своїх питань, оскільки отримана модель все ж буде описовою.

Другий етап характеризується розв’язанням прямої задачі. На цьому етапі для нас важливо сформулювати чіткий математичний апарат, необхідний для подальшого аналізу. Сформулювати основні правила – сформувати мову нашої роботи. В запропонованій статті ми розглянемо вищезазначені пункти за допомогою таких математичних понять як граф, поле, та блукання полем над графом. Ми сформулюємо основні поняття, твердження та теореми, які нам знадобляться для побудови та аналізу дескриптивної моделі. На цьому етапі буде відбуватися принциповий перехід від загального до конкретного опису системи. Особливістю дескриптивного моделювання є те, що основним інструментом побудови моделей є прості неорієнтовані графи.

На третьому етапі ми будемо досліджувати отримані результати. На якісному рівні відкидати хибні твердження, гіпотези, що виявилися не правдивими. Будемо досліджувати на скільки складними вийшли отримані завдання, та які методи можливо використати для їх розв’язання. Проведемо аналіз нашої моделі: на скільки швидко буде зростати її розмір та складність з подальшим уточненням. Які методи ми зможемо використати надалі? Оскільки ми робитимемо побудову нашої моделі за допомогою графів, проведемо оцінку розмірів графа – кількість його вершин та ребер. Якщо система буде зростати занадто швидко, то, хоча вона і буде лишатись кінцевою, то все ж таки метод простого перебору не буде ефективним, оскільки ми будемо мати справу з занадто великими масивами даних. А отже необхідно буде знайти та використати нові методи для вирішення отриманих завдань. Можливо, ми будемо змушені змінити постановку деяких завдань, зменшити поле нашого вибору до припустимих розмірів.

Четвертий етап пов’язаний з подальшим аналізом нашої моделі з урахуванням вже отриманих знань та попередніх висновків щодо будови, характеру відносин, можливої поведінки системи. Оцінки можливості керування цією поведінкою, зважаючи на складність системи та отримані результати. А також складатися з уточнення нашої моделі – переходу до наступного стану, з більшої точністю. Тобто розширення нашої системи, її уточнення та формалізації. Використання методів оцінки, отриманих на попередньому етапі, оскільки при такому переході ми будемо спостерігати неминуче зростання розмірів, а отже і складності нашої моделі.

Описаний процес побудови дескриптивної математичної моделі ми будемо проводити вважаючи, що система для якої ми будуємо модель чітко детермінована, тобто визначена, така, що еволюціонує поступово, має обумовлений крок розвитку, та кожен наступний стан системи може бути повністю визначений через попередній. Згідно з класифікацією систем С. Біра, такі системи можуть бути як простими, так і складними [6]. Такі визначення ми приймаємо поки що для зручності при використанні наведених методів. Очевидно, що в подальшому, наведені визначення, теореми та методи можна буде доопрацювати в процесі побудови дескриптивних моделей для систем, які мають стохастичний характер або можуть бути описані так званою «не чіткою логікою» (Fuzzy logic) [7]. Такі системи можна частіше зустріти при вивченні різних областей знань, а тому методи побудови таких моделей, методи роботи з ними і їх аналізу є необхідними для вивчення в подальшому.

Для початку зазначимо, що робити опис складних систем ми будемо за допомогою математичного графа та таких понять як поле над графом, блукання графом і т.інш. Важливо зазначити, що будується граф особливим принципом, а саме граф для нашої моделі буде зв’язним, неорієнтовним та будуватися на принципі «сусідства». Тобто кожні дві вершини, що зв’язані спільним ребром, будуть сусідніми. Значення компонент для таких сусідніх вершин будуть відрізнятися не більше ніж на 1 крок, або не відрізнятися взагалі, оскільки ми не виключаємо можливості не переходу.

Оскільки через вершини ми збираємось описувати конкретні стани нашої системи, досить природньо виглядає наша умова сусідства. Це означає поступовий розвиток нашої системи, її динаміку без розривів. За такої умови за визначений один крок ми потрапляємо лише до сусіднього стану, або лишаємось в поточному.

Нехай ми маємо граф $G(V,E)$ з набором вершин V і ребер E. Кожне ребро ми розуміємо як двоелементну підмножину V. Саме такі два елементи є сусідніми, а тому досяжними за один крок з обох боків. А також для будь якого $x \in V$ будемо використовувати наступне позначення: $E(x) = \{e \in E \mid x \in e\}$.

Також введемо визначення блукання графом. **Блуканням графом** $G(V,E)$ будемо називати оператор $S: V \to V$ такий, що $\{x, Sx\} \in E$ для будь-якого $x \in V$.

Для дескриптивного моделювання кожна вершина графу представляється вектором $(x_1,\ldots,x_n)$ значень n атрибутів, кожний з яких приймає одне з m значень з множини $\{0,1,\ldots,m-1\}$. Ми будемо вважати значення i та j сусідніми, якщо $|i-j| \le 1$. Тепер ми можемо сформувати множину ребер графа, як множину двоелементні підмножини векторів E, які утворені векторами x та x' такими, що x_k і x'_k є сусідніми значеннями для будь-якого $1 \le k \le n$.

Блукання для цього графу тоді визначається оператором $S(x_1,\ldots,x_n) = (x_1',\ldots,x_n')$, де значення відповідних компонентів векторів x та x' є сусідніми.

Таким чином дескриптивна модель характеризується параметрами n – кількість атрибутів, що описують стани нашої системи, та m – кількість значень, які ці атрибути можуть приймати, і повністю визначається оператором блукання S відповідним графом. Очевидно, що наш граф матиме загалом m^n вершин.

Описавши тепер майже весь граф, необхідно дізнатися яку складність він представляє собою. Тобто які розміри має, а також як зростає його складність, та як він розширюється із вводом додаткової компоненти, або ще одного значення для них.

Як вже було зазначено, для графа нашої моделі, який побудований для n – атрибутів, що приймають m значень, кількість вершин $\|V\|$ дорівнює очевидно m^n. Інша ситуація з кількістю ребер для цього графа, оскільки саме вона визначає розмір множини операторів блукання графом. Будемо позначати кількість ребер графа через $\|E\|$.Загалом, кількість ребер можна подати наступною формулою

$$\|E\| = \begin{cases} m-1, & \textit{якщо } n=1 \ i\ m \geq 2 \\ \dfrac{m^n(m^n-1)}{2} & \textit{якщо } n \geq 2 \ i\ m=2 \\ (m-1)(3m-2)^{n-1} & \textit{якщо } n \geq 2 \ i\ m>2 \end{cases} \tag{0.1}$$

Розглянемо формулу (2.1) більш детально.

Для випадку, коли $n=1$ формула є очевидною. Дійсно, у цьому випадку маємо лінійний граф з m вершинами, в якого кількість ребер є, очевидно, $m-1$.

Для випадку, коли $m=2, n \geq 2$ пересвідчитися у коректності формули також досить просто. Такий граф є повним, а для повних графів ми маємо формулу для знаходження кількості ребер, знаючи кількість вершин.

Для всіх інших випадків, які і являють для нас найбільший інтерес, обґрунтувати формулу дещо складніше. Позначимо через $E(n,m)$ число $\|E\|$ для моделі з n атрибутами і m значеннями. Ми знаємо, що $E(1,m)=m-1$. А з цього, ми можемо зробити висновок, що:

$$E(n+1,m)Z^{n+1} = Z(3m-2)E(n,m)Z^n \tag{0.2}$$

Де Z – це деякий множник, $(3m-2)$ – це загальна сукупність нових вершин, яка складається з m – старих вершин, що є сусідами, та $2(m-1)$ – нових, що отримуємо при переході.

А отже, формулу (2.6) можна переписати в більш загальному вигляді:

$$E(n,m) = E(k,m)(3m-2)^{n-k} \tag{0.3}$$

Де k – це деяка підмножина вже існуючих компонент. Тоді для формули (2.7) ми можемо провести заміну змінних, та записати її у наступному вигляді:

$$\sum_{k=1}^{\infty} E(k,m)z^k = z(3m-2)\sum_{n=1}^{\infty} E(n,m)z^n \tag{0.4}$$

Як можна побачити, ліва і права частина дуже схожі і відрізняються лише на один множник. Ми можемо винести його, та позначити:

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} E(n,m)z^n \tag{0.5}$$

Враховуючи таку заміну змінних, формулу (2.8) можна переписати у наступному вигляді:

$$\Phi(z) - z(m-1) = z(3m-2)\Phi(z) \tag{0.6}$$

Спрощуючи цю формулу ми отримуємо:

$$\Phi(z)(1-z(3m-2)) = z(m-1)$$

$$\Phi(z) = \frac{z(m-1)}{1-z(3m-2)} \tag{0.7}$$

Для зручності ведення наступних записів, проведемо ще одну просту заміну змінних, та позначимо $a=m-1$, та через $b=3m-2$. Тоді (2.11) можна записати у новій формі із спрощеними змінними:

$$\Phi(z) = \frac{az}{1-bz} = -\frac{a}{b} + \frac{a}{b(1-bz)} = \frac{a}{b}\cdot\left(\frac{1}{1-bz} - 1\right)$$

Тепер ми можемо скористуватися розкладанням функції у ряд Тейлора у нулі. Тоді наші виведені формули приймуть майже остаточну спрощений вигляд, з яким ми і будемо працювати далі:

$$E(n,m) = \frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!} \tag{0.8}$$

Тепер проведемо почергове дослідження похідних для функції $\Phi(z)$. Отримуємо наступні результати:

$$\Phi'(z) = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{(1-bz)^2} = \frac{a}{(1-bz)^2}$$

$$\Phi''(z) = \frac{2ab}{(1-bz)^3}$$

$$\Phi'''(z) = \frac{6ab^2}{(1-bz)^4}$$

Продовжуючи цей процес до n-ної похідної, напишемо загальний вигляд для похідної порядку n.

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!ab^{n-1}}{(1-bz)^{n+1}} \tag{0.9}$$

А отже, розкладаючи цю функцію в точці «0», ми отримаємо, що знаменник дорівнює 1. А тому, підставивши наші значення для функцій a та b, отримуємо наступне:

$$E(n,m) = (m-1)(3m-2)^{n-1} \tag{0.10}$$

Що саме і відповідає кількості ребер в нашому графі в ситуації, коли кількість компонент та кількість значень перевищують 2, та система, яку ми описуємо, має дискретний характер. А отже, для цього варіанту ми можемо побачити, що при збільшенні кількості компонент, кількість ребер буде зростати експоненційно. А при збільшенні кількості значень для компонент – поліноміально. Таке зростання складності є досить швидким, а тому потребує розробки та використання методів для роботи з такими задачами. Оскільки, хоча ми і працюємо зз скінченими моделями, все ж таки, вони великі. Тому й необхідні подальші дослідження і розробки методів роботи з такими моделями.

3 Основні визначення

Тепер дамо базові визначення, які будуть застосовуватися при описі даних методів, а саме граф, та концепція ідеї обходу графа. Продемонструємо, що така ідея дуже тісно пов'язана з іншим поняттям, а саме – полем над графом.

В цій статті будемо використовувати позначення $G(V,E)$, що відповідатиме простому, неорієнтованому **графу**. В цьому графі, будемо позначати V – як множину вершин такого графа і відповідно E – як двоелементну підмножину V. Яку досить природньо будем розуміти як множину ребер для визначеного графа. А також для цієї множини, будемо вважати, що для кожного $x \in V$ вірне наступне твердження:

$$E(x) = \{e \in E \mid x \in e\} \tag{0.11}$$

Що можна природньо розуміти як вершини, що належать до одного ребра, а отже належать одному елементу з множини E .

Як вже було зазначено, ми будемо розглядати лише детермінований випадок для системи. Це найпростіший випадок, коли наступний стан системи може бути повністю характеризований за інформацією з поточного стану.

Оскільки ми вже дали визначення графа для нашого методу, тепер ми можемо ввести поняття обходу полем над графом. Детерміністичним **обходом полем над графом** $G(V,E)$ будемо називати оператор $S:V\to V$ такий, що:

$$Sx = x:\{x,Sx\}\in E(x):\forall x\in V \tag{0.12}$$

Тобто ми маємо на увазі таке відображення, що переводить нас з однієї вершини графа в іншу, тільки якщо вони являють собою різні кінці одного ребра. Таким чином ми досить природньо можемо обходити наш визначений граф тільки по вершинам, які зв'язані.

Маючи визначення обходу, ми тепер можемо узагальнити це поняття. А саме ввести поле переміщень по графу. Даючи формальне визначення, ми будемо називати **полем переміщень** графом $G(V,E)$ для деякого обходу $S:V\to V$ таку мапу: $\partial S:V\to E\cup\{\varnothing\}$, яку будемо визначати як:

$$(\partial S)x = \begin{cases} \varnothing & : \quad Sx = x \\ \{x,Sx\} & : \quad Sx \neq x \end{cases} \tag{0.13}$$

звичайно, для $\forall x\in V$.

А також ми можемо сприймати поля на графах незалежними від обходу по цьому графу, як два різних об'єкти і поняття. Таке припущення призводить нас до наступного визначення, яке треба зазначити.

Полем на графі $G(V,E)$ будем називати таке відображення $\tau:V\to E\cup\{\varnothing\}$ таке, що $\tau x\neq\varnothing$. В свою чергу, це саме під собою має на увазі що і $\tau x\in E(x)$.

Вся зазначена сукупність визначень дозволяє нам зробити таке припущення, що для кожного поля на графі ми можемо прокласти унікальне блукання, яке буде співпадати з цим полем. Напишемо це формально у вигляді теореми.

Для будь якого $\tau:V\to E\cup\{\varnothing\}$ на графі $G(V,E)$ існує унікальне блукання S_τ для цього ж графа $G(V,E)$, такий що $\partial S_\tau=\tau$.

Спробуємо довести встановлене твердження. Для доказу унікальності визначимо обхід графом S_τ наступним чином:

$$S_\tau = \lambda x \begin{cases} x & : \quad \tau x = \varnothing \\ y & : \quad \tau x = \{x,y\} \end{cases} \tag{0.14}$$

При такому записі ми більш наочно бачимо, що S_τ це блукання графом $G(V,E)$.

Тепер, спробуємо визначити ∂S_τ. У випадку якщо $\tau x=\varnothing$ ми маємо таку ситуацію, що ми маємо $S_\tau x = x$, а отже справедливо і наступне: $(\partial S_\tau)x=\varnothing=\tau x$.

Для випадку коли $\tau x=\{x,y\}$, ми отримуємо випадок коли $S_\tau x = y$. А отже справедливо і наступне що: $(\partial S_\tau)x=\{x,S_\tau x\}=\{x,y\}=\tau x$. Таким чином частину теореми про існування такого блукання можна вважати доведеною. Що до частини про його унікальність, то ми будемо вважати, що існує такий обхід $S:V\to V$ на графі $G(V,E)$. Такий, що $\partial S=\tau$ а також $Sx_0\neq S_\tau x_0$ для деякого $x_0\in V$.

Припущення, що $Sx_0 = x_0$ логічно призводить нас до того, що $\tau x_0=(\partial S)x_0=\varnothing$. А отже і до висновку, що $S_\tau x_0 = x_0$.

Припущення, що $Sx_0 = y \neq x$ логічно призводить нас до того, що $\tau x_0 = (\partial S)x_0 = \{x_0, y\}$. А отже і до висновку, що $S_\tau x_0 = y$.

Однак обидва припущення не узгоджуються з припущенням, що $Sx_0 \neq S_\tau x_0$, це робить останнє не вірним. А отже є доведенням унікальності такого блукання. Згадуючи, що частина про існування вже була доведена, ми маємо повний доказ нашої представленої теореми.

Зважаючи на те, що ми ввели поняття графа, поля над графом, поняття блукання графом. Нам лишилося зробити ще одне ключове визначення, яке є важливим для подальшої роботи побудови дескриптивної моделі та взагалі для розуміння. Нас цікавить дослідження динаміки системи, її зміни з кроком часу. А отже в контексті графів, нам цікаво дослідити маршрут, або траєкторію розвитку.

Для графа $G(V,E)$ і детерміністичного обходу $S:V \to V$ на цьому графі, послідовність станів $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ будемо називати **траєкторією,** якщо $x_{n+1} = Sx_n$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Тобто, як вже зазначалося для детерміністичного випадку, кожен наступний стан нашої системи може бути описаний із інформації про її поточний стан.

Тепер, сформулювавши основні визначення для загальної ситуації, описавши вигляд та динаміку графа для детерміністичного випадку ми маємо базу для подальшого дослідження.

4 Висновки

Отже, було розроблено зручний та потенційно досить загальний метод побудови дескриптивних моделей для складних систем. Були сформульовані основні визначення необхідні в роботі. Продемонстровано та досліджено граф, що саме і являє собою нашу описову модель для складної системи та дає можливість дослідити як і її окремі стани, так і динаміку.

Виявили, що при розширенні кількості досліджуваних значень, складність системи буде зростати лінійно. Наприклад: для графа з $m = 3, n = 2$ ми можемо порахувати, що його кількість ребер складатиме $E(3,2) = 14$. А при кроці по m ми отримуємо результат: $E(4,2) = 30$. На наступному кроці буде вже $E(5,2) = 52$. Система зростає, але для таких значень, ми ще в змозі застосовувати стандартні методи роботи, або перебирати всі значення по черзі, перебором.

Для кроку по n ми спостерігаємо іншу ситуацію. Оскільки, навіть починаючи з того ж самого графа $E(3,2) = 14$, вже на наступному кроці ми отримуємо $E(3,3) = 98$. Що сильно відрізняється від попередніх переходів для збільшення кількості значень. Для наступного кроку, результат буде ще більшим: $E(3,4) = 686$. Такий зріст набагато ускладнює обробку і аналіз даних. Метод простого перебору не буде ефективним, оскільки на деякому етапі ми будемо просто не в змозі перебрати всі стани. Хоча ми все ж таки працюватимемо з кінцевими величинами, їх ефективна обробка буде потребувати використання спеціальних методів. Розробка таких методів представляє інтерес для подальшого дослідження цієї теми.

Також, слід зазначити, що був розглянутий випадок для систем з дискретною поведінкою. В подальшому такий підхід можна також ускладнювати. Будувати дескриптивні моделі такого типу для систем із стохастичною динамікою. Такі системи є більш універсальними на відміну від стохастичних, а тому методи побудови моделей для них є актуальними. Крім того, після отримання результатів для стохастичних моделей, представлений механізм може бути ще розвинутий для опису ще більш складних систем. Наприклад систем, динаміку яких можна описати за допомогою використання не чіткої логіки (Fuzzy logic).

Узагальнюючи, скажемо що представлені методи та їх подальший розвиток є потенційно дуже якісним та зручним інструментом, який можна буде використовувати для побудови дескриптивних моделей складних систем. Для дослідження і обробки результатів таких моделей, необхідно буде використовувати спеціальні методи, які будуть розроблені в подальшому. Тому подальше дослідження цієї проблеми є актуальним та необхідним.

ЛІТЕРАТУРА

1. Стеценко І.В. Моделювання систем: навч. посіб. Черкаси: ЧДТУ, 2010. 399 с.
2. Жолткевич Г.М. Автоматизація проєктування технологічної оснастки: теорія і практика. К.: Техніка, 1998, 263 с.
3. Zholtkevych, G.N., Bespalov, G.Y., Nosov, K.V. et al. Discrete Modeling of Dynamics of Zooplankton Community at the Different Stages of an Antropogeneous Eutrophication. Acta Biotheor 61, 2013, pp. 449–465.
4. Zholtkevych, G.N., Nosov, K.V., Bespalov, Y.G. et al. Descriptive Modeling of the Dynamical Systems and Determination of Feedback Homeostasis at Different Levels of Life Organization. Acta Biotheor 66, 2018, pp. 177–199.
5. Математическое моделирование / Под ред. А.Н. Тихонова, В.А. Садовничего и др. М.: Изд-во МГУ, 1993, 290 с.
6. Бир С. Кибернетика и управление производством. – М.: Наука, 1965. – 391 с.
7. Zadeh, L. A. "Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic". Fuzzy Sets and Systems. 90 (2), 1997, pp. 111–127

REFERENCES

1. I. V. Stetsenko, *Systems modeling: textbook*. Cherkasy: CSTU, 2010, 399 p. [in Ukrainian]
2. G. N. Zholtkevych, Automation of technological equipment design: theory and practice. Kyiv.: Technique, 1998, 263 p. [in Ukrainian]
3. G. N. Zholtkevych, G. Y. Bespalov, K. V. Nosov, et al. Discrete Modeling of Dynamics of Zooplankton Community at the Different Stages of an Antropogeneous Eutrophication. Acta Biotheor 61, 2013, pp. 449–465. [in English]
4. G. N. Zholtkevych, K. V. Nosov, Y. G. Bespalov, et al. Descriptive Modeling of the Dynamical Systems and Determination of Feedback Homeostasis at Different Levels of Life Organization. Acta Biotheor 66, 2018, pp. 177–199. [in English]
5. Mathematical modeling / Ed. A. N. Tikhonov, V. A. Sadovnichy. M.: Moscow State University, 1993, 290 p. [in Russian]
6. S. Beer, Cybernetics and production management. – M.: Nauka, 1965. – 391 p. [in Russian]
7. L. A. Zadeh, "Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic". Fuzzy Sets and Systems. 90 (2), 1997, pp. 111–127. [in English]

Надійшла – 10.11.2020