

УДК 531.8+62-50

Параметрична оптимізація кінематичної структури та руху дволанкового маніпулятора

М.В. Демидюк, В.М. Демидюк

**Демидюк
Мирослав Васильович**

*кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАНУ, вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна
e-mail: m_demydyuk@ukr.net
<https://orcid.org/0000-0002-9719-4512>*

**Демидюк
Віталій Мирославович**

*магістр (системний аналіз), інженер-програміст, ТОВ “ДевКрафт”
(ORIL Inc., www.oril.co), вул. Сигнівка, 3, оф. 81, м. Львів, 79040, Україна,
e-mail: vitalii.demydiuk@oril.co
<https://orcid.org/0000-0003-3442-2108>*

Досліджуємо керований рух дволанкового маніпулятора, який під дією керувань (моментів сил у шарнірах) виконує транспортну операцію в горизонтальній площині: переносить вантаж із заданого початкового положення в задане кінцеве. Швидкість вантажу на початку та в кінці операції вважаємо нульовою, тривалість руху заданою. Під час налаштування маніпулятора (на виконання заданої операції) можна змінити положення базового шарніра, що зв'язує систему з нерухомою основою. Також для заданих лінійних координат вантажу (на початку та в кінці руху) можливі різні кутові конфігурації ланок маніпулятора. Сформульовано задачу сукупної оптимізації координат базового шарніра, початкових і кінцевих конфігурацій ланок маніпулятора та його руху за умови мінімізації квадратичного (за керуваннями) функціонала. Запропоновано алгоритм побудови субоптимального розв'язку задачі, який ґрунтується на методиці параметричної оптимізації. Кутові координати маніпулятора апроксимуємо сумою кубічного полінома та скінченного тригонометричного ряду (з невідомими параметрами). Коефіцієнти полінома знаходимо із початкових та кінцевих умов транспортної операції. В результаті вихідна задача зводиться до задачі нелінійного програмування з цільовою функцією, залежною від координат базового шарніра, граничних конфігурацій ланок та коефіцієнтів тригонометричного ряду. Для розв'язання отриманої задачі використовуємо числові алгоритми мінімізації функцій багатьох змінних. Наведено результати числового моделювання субоптимального руху дволанкового маніпулятора, також чисельно досліджено вплив координат базового шарніра на характеристики цього руху.

Ключові слова: дволанковий маніпулятор, транспортна операція, оптимальне керування, параметризація кутових координат, нелінійне програмування.

Parametric optimization of the kinematic structure and the movement of the two-link manipulator

Demydyuk Myroslav

*PhD, Senior Researcher,
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
National Academy of Sciences of Ukraine, 3-B Naukova St., L'viv, 79060,
Ukraine*

Demydiuk Vitalii

*Master's Degree (System Analysis), Software Engineer, LLC “DevCraft”,
(ORIL Inc., www.oril.co), 3 Syhnyvka St., off. 81, L'viv, 79040, Ukraine*

The controlled motion of a two-link manipulator has been studied. The manipulator being under the action of controls (torques at joints) performs a transport operation in the horizontal plane, namely, transfers the cargo from a given initial position to a given final position. The speeds of the cargo at the beginning and end of the operation are considered to be zero, and the duration of the movement is given. While preparing the manipulator for executing a given operation, it is possible to change the placement of the joint which connects it to a fixed base. The different angular configurations of manipulator links are available at the beginning and the end of the operation. The problem for aggregate optimization of the base joint coordinates, as well as the boundary configurations of the links of the manipulator and its movements is formulated, providing that the quadratic (over the controls) functional is minimized. The algorithm for building a suboptimal solution of the problem, based on the methodology of parametric optimization is proposed. The angular coordinates of the manipulator are approximated by the sum of a cubic polynomial and a finite trigonometric series (with unknown parameters). The coefficients of the polynomial are found from the initial and final conditions of the transport operation. As a result, the initial problem is reduced to the

problem of nonlinear programming with an objective function depending on the coordinates of the base joint, boundary configurations and coefficients of the trigonometric series. The standard numerical procedures for minimization of the functions of many variables have been used to solve the resulting nonlinear programming problem. The results of numerical modeling of two-link manipulator suboptimal motion are described, and the influence of the base joint coordinates on the characteristics of this motion is numerically investigated. The analysis of numerical calculations shows that the position of the base joint and the boundary configurations of a two-link manipulator influence significantly the energy consumption during the transport operation.

Keywords: two-link manipulator, transport operation, optimal control, angular coordinate parameterization, nonlinear programming.

Параметрическая оптимизация кинематической структуры и движений двухзвенного манипулятора

Демьдюк Мирослав Васильевич кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник,
Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С.Подстригача НАНУ, ул. Научная, 3-Б, г. Львов, 79060, Украина

Демьдюк Виталий Мирославович магистр (системный анализ), инженер-программист, ТОО “ДевКрафт”
(ORIL Inc., www.oril.co), ул. Сыгнивка, 3, оф. 81, г. Львов, 79040, Украина

Исследуем движения двухзвенного манипулятора, который под действием управлений (моментов сил в шарнирах) выполняет транспортную операцию в горизонтальной плоскости: перемещает груз с заданного начального состояния в заданное конечное положение. Скорость груза в начале и конце операции считаем нулевой, время движения заданным. При настройке манипулятора (на выполнение заданной операции) можно изменить положение базового шарнира, связывающего систему с неподвижным основанием. Также для заданных линейных координат груза (в начале и конце движения) возможны разные угловые конфигурации звеньев манипулятора. Сформулирована задача совместной оптимизации координат базового шарнира, граничных конфигураций звеньев манипулятора и его движений при условии минимизации квадратичного (по управлениям) функционала. Предложен алгоритм построения субоптимального решения задачи, базирующийся на методике параметрической оптимизации. Угловые координаты манипулятора аппроксимируем суммой кубического полинома и конечного тригонометрического ряда (с неизвестными параметрами). Коэффициенты полинома находим из начальных и конечных условий транспортной операции. В результате исходная задача сводится к задаче нелинейного программирования с целевой функцией, зависящей от координат базового шарнира, граничных конфигураций звеньев и коэффициентов тригонометрического ряда. Для решения полученной задачи используем численные алгоритмы минимизации функций многих переменных. Приведены результаты численного моделирования субоптимального движения двухзвенного манипулятора, также численно исследовано влияние координат базового шарнира на характеристики этого движения.

Ключевые слова: двухзвенный манипулятор, транспортная операция, оптимальное управление, параметризация угловых координат, нелинейное программирование.

1 Вступ

Комплексна автоматизація виробництва – важливий напрям науково-технічного прогресу. На сьогодні автоматизовані виробничі системи широко розповсюджені в різних галузях промисловості. Основним складником таких систем є маніпуляційні роботи. Постійна потреба в підвищенні технічного рівня виробництва висуває на передній план проблеми вдосконалення існуючих та створення нових зразків маніпуляційних роботів із високими функціональними показниками. Серед цих показників чільне місце займають точність позиціонування робочого органу (захоплювача) маніпулятора та енерговитрати, необхідні для виконання робочої операції [1]. Очевидно, що зазначені показники залежать від параметрів конструкції робота та його руху.

Продуктивним підходом у поліпшенні функціональних характеристик роботів є оптимізація їх конструкцій та режимів керування [2]. Поряд з цим важливим оптимізуючим чинником, що дає відчутний результат, є відповідне розміщення (у технологічній зоні виробництва) маніпуляційного робота під час його налаштування на виконання робочої операції. Як свідчать результати числового моделювання руху дволанкового маніпулятора [3], завдяки вибору відповідного розміщення базового шарніра (шарнір, що зв'язує маніпуляційну систему з нерухомою основою) можна суттєво зменшити енерговитрати на виконання операції. Значимо, що такий вибір є особливо актуальним для мобільних роботів, у яких маніпуляційна система закріплена на колісній платформі, що може переміщатися у межах робочої зони [4]. Ще одним плідним підходом у оптимізації маніпуляційних систем є вибір відповідної кінематичної конфігурації ланок маніпулятора. Наприклад, для дволанкового маніпулятора заданому

положенню захоплювача відповідають дві кінематичні конфігурації ланок, вибір яких також істотно впливає на функціональні характеристики маніпуляційної системи [5].

Ефективним у реалізації наведених вище оптимізаційних підходів є використання засобів математичного моделювання, теорії оптимізації та сучасних комп'ютерних технологій. Тому дослідження математичних моделей типових маніпуляційних систем і побудова на їхній основі алгоритмічно-програмного забезпечення для оптимізації конструкцій та режимів керування є актуальною задачею робототехніки.

Серед маніпуляційних систем чільне місце посідають дволанкові маніпулятори. Такі маніпулятори є складовими частинами конструкцій багатьох маніпуляційних роботів, у яких довжини двох суміжних ланок помітно перевищують розміри решти ланок (див., наприклад, конструкції роботів SCARA [6, 7], LabVolt 5150, KUKA KR 100-2 [8]). Саме ці ланки виконують основний обсяг руху робота під час виконання робочих операцій. Тому дволанкові маніпулятори вже тривалий час привертають увагу дослідників, про що свідчить значна кількість публікацій.

Відмітимо деякі публікації, присвячені оптимізації дволанкових маніпуляційних систем. У монографії [6] дослідили низку задач оптимального (за швидкодією) програмного керування дволанковим маніпулятором. Чисельно побудували діаграми, за допомогою яких можна визначити (у параметричному класі кусково-сталих функцій) параметри керування. На підставі числового моделювання автори показали, що для заданої транспортної операції, коли задаються лінійні координати захоплювача на початку та в кінці руху, відповідні (граничні) конфігурації дволанкового маніпулятора суттєво впливають на час швидкодії. У разі прямолінійного переміщення захоплювача автори запропонували методику визначення оптимальної конфігурації маніпулятора. У [9] розв'язали задачу оптимального керування дволанковим маніпулятором із комбінованим функціоналом, у якому інтегральна частина (квадрати керувань) виражає енерговитрати, термінальна частина – тривалість руху. Розв'язок побудували за умови статичної урівноваженості другої ланки, коли її центр мас розміщений на осі шарніра. Також тут чисельно побудували діаграми для визначення оптимальної конфігурації ланок маніпулятора (у кінцевому положенні) та напрямку їхнього повороту. Вплив граничних конфігурацій (на початку та в кінці руху) дволанкового маніпулятора на динамічні характеристики побудованого субоптимального режиму керування чисельно дослідили також у [5]. Тут для розв'язання задачі оптимального керування використали методику параметричної оптимізації, у якій кутові координати системи апроксимували сумою кубічного полінома і скінченного тригонометричного ряду (з невідомими параметрами), що дало змогу звести вихідну задачу до задачі нелінійного програмування. Аналогічну методику під час дослідження задач оптимізації руху дволанкового маніпулятора застосували в статтях [10, 11]. У праці [10] для апроксимації використали класичні ортогональні поліноми. У [11] розглянули маніпулятор, що виконує циклічну транспортну операцію під дією активних та пружинно-демпферних пасивних приводів. На основі методики параметричної оптимізації тут побудували алгоритм сукупної оптимізації параметрів пасивного приводу та законів руху маніпулятора.

Підхід, що ґрунтується на спрощенні рівнянь руху, використали в [1]. Тут для дволанкового маніпулятора з електромеханічними приводами побудували програмні режими керування, які мінімізують: енерговитрати та тривалість руху системи (задача 1); енерговитрати та точність позиціонування (задача 2). Режими керування побудували в припущенні великих передавальних чисел редукторів та нульових коефіцієнтів індуктивності обмоток якорів двигунів, що дало змогу знехтувати взаємовпливом різних ступенів вільності маніпулятора.

Алгоритми керування дволанковим маніпулятором із використанням ПД-регуляторів описано в статтях [12–14]. У [15] запропонували алгоритм адаптації класичного ПД-регулятора (з використанням симплексного інваріантного методу оптимізації), який використали в системі керування дволанковим маніпулятором.

У статті [3] автор акцентував увагу на доцільність раціонального розміщення базового шарніра дволанкового маніпулятора. Тут узагальнені координати маніпулятора задають у вигляді кубічних поліномів (за часом), коефіцієнти яких визначають з умов транспортної операції. Засобами числового моделювання показано, що положення базового шарніра суттєво впливає на енерговитрати маніпулятора. У [16] для дволанкового маніпулятора будівельного робота встановили явні залежності між лінійними розмірами робочої зони, заданої у формі прямокутника, та параметрами маніпулятора (довжинами ланок та граничними значеннями міжланкового кута). У праці [17] побудували математичну модель та алгоритми розв'язання

прямої та оберненої задач кінематики й динаміки дволанкового маніпулятора, на основі яких розробили програмний код (у середовищі MATLAB) та провели низку числових експериментів.

Нижче досліджуємо задачу сукупної оптимізації кінематичної структури та законів руху дволанкового маніпулятора. Маніпулятор під дією керувань (моментів сил у шарнірах) виконує транспортну операцію у горизонтальній площині: за заданий час переносить вантаж із заданого початкового положення у задане кінцеве. Швидкості вантажу на початку та в кінці операції вважаємо нульовими. Припускаємо, що під час налаштування маніпулятора (на виконання заданої операції) можна змінити положення базового шарніра, що зв'яже систему з нерухомою основою. Також для заданого положення вантажу (на початку та в кінці руху) можливі різні кінематичні конфігурації маніпулятора. Якість процесу керування оцінюємо квадратичним (за керуваннями) функціоналом. Побудували субоптимальний розв'язок задачі, який ґрунтується на параметризації кутових координат маніпулятора сумою кубічного полінома та скінченного тригонометричного ряду. Коефіцієнти полінома знайшли із початкових та кінцевих умов транспортної операції. У результаті вихідну задачу оптимального керування (з параметрами) звели до задачі нелінійного програмування з цільовою функцією, залежною від координат базового шарніра, граничних конфігурацій ланок та коефіцієнтів тригонометричного ряду. Для розв'язання останньої використали стандартні числові процедури мінімізації функції багатьох змінних. Провели низку числових експериментів по моделюванню субоптимального руху маніпулятора та чисельно дослідили вплив координат базового шарніра на характеристики цього руху.

Мета дослідження – побудувати алгоритм параметричної оптимізації кінематичної структури та законів руху дволанкового маніпулятора, розробити відповідну комп'ютерну програму та чисельно дослідити вплив параметрів маніпулятора на його динамічні характеристики. Розробка є подальшим розвитком методики параметричної оптимізації у дослідженні задач оптимального керування маніпуляційними системами [5, 10, 11, 18–22].

2 Механічна модель та рівняння руху маніпулятора

Розглянемо дволанковий маніпулятор, що здійснює керований рух у горизонтальній площині O_1XY . Модель маніпулятора схематично зображена на рис. 1 (а). Маніпулятор складається із двох твердих тіл (ланок) OA , AB , з'єднаних між собою циліндричним шарніром A . Перша ланка зв'язана з нерухомою основою (базою) циліндричним шарніром O із координатами (ξ, η) в інерційній системі відліку O_1XY . На кінці другої ланки розташований захоплювач із вантажем. З метою спрощення математичної моделі припускаємо, що лінійні розміри захоплювача (з вантажем) є набагато меншими за розміри ланок маніпулятора, тому їх моделюємо точковою масою m , зосередженою в точці B . Також вважаємо, що всі шарніри системи є ідеальними.

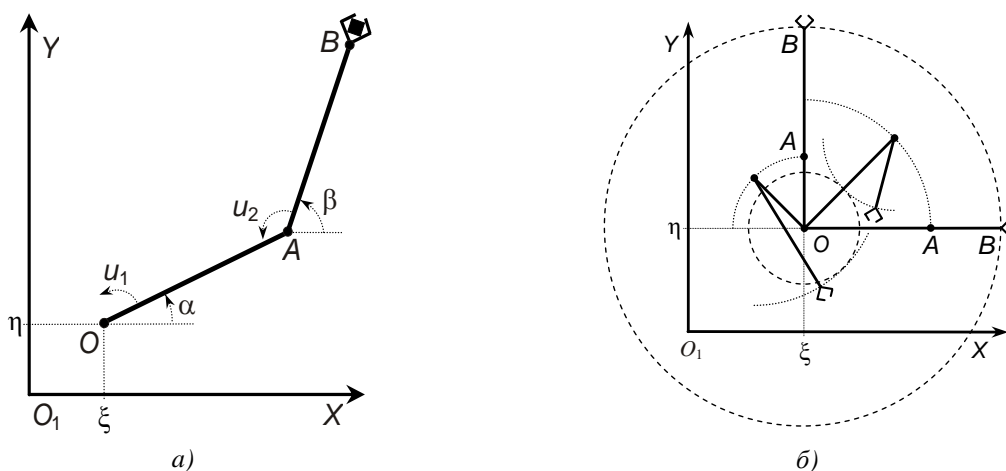


Рис. 1. Кінематична схема (а) та область досяжності маніпулятора (б)

Рівняння руху маніпулятора подамо у вигляді системи двох нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку [5, 10]:

$$\begin{aligned} K_a \ddot{\alpha} + K[\ddot{\beta} \cos(\alpha - \beta) + \dot{\beta}^2 \sin(\alpha - \beta)] &= u_1 - u_2, \\ K_b \ddot{\beta} + K[\ddot{\alpha} \cos(\alpha - \beta) - \dot{\alpha}^2 \sin(\alpha - \beta)] &= u_2, \end{aligned} \quad (1)$$

де позначено: α, β – кути повороту ланок OA, AB відносно осі O_1X ; u_1, u_2 – моменти керуючих сил, прикладених у шарнірах O і A відповідно; $K_a = J_a + a^2(m_b + m)$, $K_b = J_b + mb^2$, $K = a(rm_b + mb)$; $a = |OA|$, $b = |AB|$ – довжини ланок маніпулятора, J_a, J_b – моменти інерції ланок OA, AB відносно осей шарнірів O, A відповідно, m_b, r – маса ланки AB та відстань від її центра маси до шарніра A . Крпкою (зверху над величиною) позначено диференціювання за часом t . Співвідношення (1) є рівняннями Лагранжа другого роду, які описують рух дволанкового маніпулятора під дією керувань $u_1(t), u_2(t)$ [6].

3 Постановка та алгоритм розв'язання задачі оптимізації

В умовах сучасного автоматизованого виробництва досить поширеною технологічною операцією, яку часто виконують маніпуляційні роботи, є транспортна операція – перенесення вантажу із заданого початкового положення (робочого простору маніпулятора) у задане кінцеве положення [2]. Швидкість вантажу в початковому та кінцевому положеннях, зазвичай, рівна нулю. В окремих випадках ця швидкість може бути відмінною від нуля, наприклад, вантаж захоплюють на рухомому конвеєрі та переносять на інший рухомий конвеєр. Тривалість операції, як і закон руху вантажу, можуть задавати заздалегідь, а можуть визначати із додаткових вимог, накладених на рух маніпуляційної системи, наприклад, мінімізації часу переміщення вантажу, витрат енергії приводів керування тощо. Також можлива ситуація, коли задано траєкторію руху вантажу, а закон руху (вздовж заданої траєкторії) потрібно визначити. Водночас на траєкторію можуть накладатися певні геометричні обмеження, зумовлені умовами технологічного процесу.

Нехай задано транспортну операцію

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0, \\ x(T) &= x_T, \quad y(T) = y_T, \quad \dot{x}(T) = \dot{y}(T) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

де x, y – координати точки B у системі відліку O_1XY ; $(x_0, y_0), (x_T, y_T), T$ – задані сталі параметри, які визначають початкове і кінцеве положення вантажу та тривалість руху. Введені параметри (разом з координатами базового шарніра ξ, η) повинні задовольняти умови досяжності маніпулятора

$$(a-b)^2 \leq (x_\tau - \xi)^2 + (y_\tau - \eta)^2 \leq (a+b)^2, \quad \tau = 0, T. \quad (3)$$

На рис. 2 (б) область досяжності маніпулятора обмежена двома концентричними колами (зображеними пунктирними лініями) з центром у точці $O(\xi, \eta)$. Радіуси внутрішнього та зовнішнього кіл рівні відповідно $|a-b|$ та $a+b$. Наведені тут кінематичні схеми маніпулятора відповідають випадкам: $a > b$, $a < b$. Детальніший аналіз зони досяжності дволанкового маніпулятора у разі, коли $\xi = \eta = 0$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, описано у статті [23].

Із аналізу кінематичної схеми маніпулятора слідує, що коли захоплювач розміщується всередині області досяжності, його заданому положенню (x_τ, y_τ) відповідають два різних набори значень кутових координат $(\alpha_\tau^+, \beta_\tau^-)$, $(\alpha_\tau^-, \beta_\tau^+)$ (внаслідок кінематичної надлишковості) [5]:

$$\begin{aligned} \alpha_\tau^\pm &= \tilde{\alpha}_\tau^\pm - \Lambda(\tilde{\alpha}_\tau^\pm), \quad \beta_\tau^\pm = \tilde{\beta}_\tau^\pm - \Lambda(\tilde{\beta}_\tau^\pm), \\ \tilde{\alpha}_\tau^\pm &= \psi_\tau \pm \arccos \frac{r_\tau^2 + c^2}{2ar_\tau}, \quad \tilde{\beta}_\tau^\mp = \psi_\tau \mp \arccos \frac{r_\tau^2 - c^2}{2br_\tau}, \quad c^2 = a^2 - b^2, \\ \psi_\tau &= \operatorname{sgn}(y_\tau - \eta) \arccos \frac{x_\tau - \xi}{r_\tau}, \quad r_\tau = \sqrt{(x_\tau - \xi)^2 + (y_\tau - \eta)^2}, \end{aligned}$$

де функція $\Lambda(\theta) \equiv \pi[1 + \operatorname{sgn}(|\theta| - \pi)]\operatorname{sgn}(\theta - \pi)$ приводить значення кута θ на проміжок $[-\pi, \pi]$. Тут вирази для кутів $\alpha_\tau^\pm, \beta_\tau^\pm$ отримуємо, розв'язавши систему тригонометричних рівнянь $a \cos \alpha_\tau + b \cos \beta_\tau = x_\tau, a \sin \alpha_\tau + b \sin \beta_\tau = y_\tau$ за умов $-\pi \leq \alpha_\tau \leq \pi, -\pi \leq \beta_\tau \leq \pi$. Набори кутів $(\alpha_\tau^+, \beta_\tau^-), (\alpha_\tau^-, \beta_\tau^+)$ відповідають двом конфігураціям кінематичного ланцюга OAB , симетричним відносно прямої OB . Загалом маємо чотири набори конфігурацій у моменти часу $\tau = 0, T$:

$$\zeta_1 = [(\alpha_0^+, \beta_0^-), (\alpha_T^+, \beta_T^-)], \zeta_2 = [(\alpha_0^+, \beta_0^-), (\alpha_T^-, \beta_T^+)], \\ \zeta_3 = [(\alpha_0^-, \beta_0^+), (\alpha_T^+, \beta_T^-)], \zeta_4 = [(\alpha_0^-, \beta_0^+), (\alpha_T^-, \beta_T^+)].$$

Позначимо через Ω множину допустимих значень координат базового шарніра $O(\xi, \eta)$, які задовольняють обмеженням (3), через $Z = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4\}$ – множину можливих граничних конфігурацій кінематичної структури маніпулятора. Сформулюємо **задачу**. Знайти такі координати базового шарніра $O(\xi^*, \eta^*) \in \Omega$, конфігурацію $\zeta^* \in Z$, закон руху маніпулятора $\alpha^*(t), \beta^*(t)$ та відповідні програмні керування $u_1^*(t), u_2^*(t), t \in [0, T]$, які забезпечать виконання маніпулятором заданої транспортної операції (2) з мінімальним значенням функціонала

$$E = \int_0^T [u_1^2(t) + u_2^2(t)] dt. \quad (4)$$

Квадратичний функціонал виду (4) часто використовують у задачах оптимального керування механічними системами [1, 2, 5, 9–11, 18, 24, 25]. За певних припущень, коли керування системою відбувається за допомогою електромеханічних приводів, цей функціонал характеризує енерговитрати на її переміщення [1].

Використаємо для розв'язання сформульованої задачі методику параметричної оптимізації (у просторі узагальнених координат). Методика ґрунтується на ідеї методу Рітца [26], згідно з якою задачу про відшукування мінімуму функціонала замінюємо простішою задачею про знаходження мінімуму відповідної функції (багатьох змінних). Згідно з цією методикою узагальнені координат механічної системи представимо у вигляді лінійної комбінації заданих функцій із невідомими параметрами, що дає можливість звести вихідну задачу оптимального керування до задачі нелінійного програмування. Відповідно цій методиці подамо кутові координати маніпулятора $\alpha(t), \beta(t)$ у такому вигляді [5]

$$f = \sum_{i=0}^3 c_i^f t^i + G_n^f(t), \quad G_n^f = \sum_{i=1}^n [a_i^f g_{1i}^f(t) + b_i^f g_{2i}^f(t)], \quad f \in \{\alpha, \beta\}. \quad (5)$$

Тут $\{g_{1i}^f(t), g_{2i}^f(t)\}_{i=1}^n$ – задані на $[0, T]$ функції, $g_{ji}^f \in C^2[0, T], j=1, 2$. Такими функціями можуть бути, наприклад, тригонометричні функції [5, 18, 20, 27], ортогональні поліноми [10, 28, 29] тощо. Коефіцієнти полінома $\{c_i^f\}_{i=0}^3$ знаходимо з умов транспортної операції (2):

$$c_0^f = f_0 - G_n^f(0), \quad c_1^f = -\dot{G}_n^f(0), \\ c_2^f = \frac{1}{T^2} \{3[f_T - f_0 + G_n^f(0) - G_n^f(T)] + T[2\dot{G}_n^f(0) + \dot{G}_n^f(T)]\}, \\ c_3^f = \frac{1}{T^3} \{2[f_0 - f_T + G_n^f(T) - G_n^f(0)] - T[\dot{G}_n^f(0) + \dot{G}_n^f(T)]\}, \quad (6)$$

де граничні значення $f_\tau = f(\tau) \in \{\alpha(\tau), \beta(\tau)\}, \tau = 0, T$, рівні

$$\alpha(\tau) = \alpha_\tau^\pm, \quad \beta(\tau) = \beta_\tau^\mp, \quad \dot{\alpha}(\tau) = \dot{\beta}(\tau) = 0, \quad \tau = 0, T. \quad (7)$$

Рівність нулю кутових швидкостей ланок в співвідношеннях (7) задаємо з огляду на нульові лінійні швидкості вантажу в (2).

Коефіцієнти параметризації $\{a_i^f, b_i^f\}_{i=1}^n, f \in \{\alpha, \beta\}$ знаходимо в результаті розв'язання відповідної задачі нелінійного програмування, яку отримуємо в такий спосіб. Представлення кутових характеристик маніпулятора у вигляді (5) приводить до параметричних сімейств $\alpha(t, \xi, \eta, \zeta, \mathbf{z}), \beta(t, \xi, \eta, \zeta, \mathbf{z})$, де $\mathbf{z} = (a_1^\alpha, b_1^\alpha, a_1^\beta, b_1^\beta, \dots, a_n^\alpha, b_n^\alpha, a_n^\beta, b_n^\beta)$ – вектор невідомих коефіцієнтів

параметризації в (5). Після підставлення α , β та їх похідних у рівняння руху (1) знаходимо параметризовані керування $u_1(t, \xi, \eta, \zeta, \mathbf{z})$, $u_2(t, \xi, \eta, \zeta, \mathbf{z})$, які перетворюють функціонал (4) у функцію багатьох змінних $E(\xi, \eta, \zeta, \mathbf{z})$. У результаті вихідна задача оптимального керування (з параметрами) зводиться до задачі нелінійного програмування [30, 31]

$$E(\xi, \eta, \zeta, \mathbf{z}) \xrightarrow{\xi, \eta, \zeta, \mathbf{z}} \min \quad (8)$$

Наведений вище алгоритм реалізовано у вигляді комп'ютерної програми (в інтегрованому програмному середовищі MS Visual C# 2012, [32]), з допомогою якої проведено оптимізацію кінематичної структури та законів руху дволанкового маніпулятора.

4 Числове моделювання

Наведемо окремі результати розв'язання досліджуваної задачі. Розглядали маніпулятор, ланки якого мають: кільцевий поперечний переріз зі сталими зовнішнім 0.1 м і внутрішнім 0.094 м діаметрами, сталу густину матеріалу 7850 кг/м^3 , $a=0.8 \text{ м}$, $b=0.6 \text{ м}$, $r=0.3 \text{ м}$. Параметри транспортної операції набували таких значень: $x_0=0$, $y_0=1 \text{ м}$, $x_T=0.7 \text{ м}$, $y_T=0.6 \text{ м}$, $T=6 \text{ с}$, $m=8 \text{ кг}$.

Обчислення проводили на комп'ютері з процесором AMD Ryzen 5 1600 (3.2 ГГц) та оперативною пам'яттю 16 ГБ. У параметризації (5) використали тригонометричні функції

$$G_n^f = \sum_{i=1}^n [a_i^f \cos \frac{2\pi i}{T} t + b_i^f \sin \frac{2\pi i}{T} t],$$

де задавали $n=8$, відповідно загальна кількість параметрів оптимізації становила 38. Для розв'язання отриманої задачі нелінійного програмування (8) використали стандартні алгоритми оптимізації, зокрема, циклічний алгоритм покоординатного спуску в поєднанні з алгоритмом золотого поділу відрізка [33]. За початкові значення параметрів оптимізації було взято $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=\zeta_1$, $\mathbf{z}=0$. Точність за параметрами оптимізації (ξ , η , \mathbf{z}) та значенням цільової функції становили відповідно 10^{-6} і 10^{-3} , крок дискретизації проміжка $[0, T]$ – 0.03 с, час розв'язання – близько 11 с.

У результаті оптимізації отримали мінімальне значення функціонала (4) $E^*=0.8$, яке досягається для координат базового шарніра $\xi^*=1.143 \text{ м}$, $\eta^*=0.413 \text{ м}$, набору конфігурацій ланок $\zeta^*=\zeta_4$ та коефіцієнтів параметризації \mathbf{z} , поданих у табл. 1. Отримане $E^*=0.8$ є меншим приблизно в 7.7 раз від $E^0=6.14$ – величина функціонала (4) для початкових значень параметрів оптимізації, а також менше в 5.4 раз від величини $\tilde{E}^*=4.333$, яку досягли мінімізацією функціонала (4) тільки за коефіцієнтами параметризації \mathbf{z} та фіксованими параметрами $\xi=\eta=0$ (оптимізація без зміщення базового шарніра [5]).

Таблиця 1. Коефіцієнти параметризації

i	$f = \alpha(t)$		$f = \beta(t)$	
	a_i^f	b_i^f	a_i^f	b_i^f
1	0,066725	-0,041106	-0,038123	0,089544
2	0,006689	-0,006904	-0,001038	-0,000214
3	0,000988	-0,001120	0,000296	-0,000906
4	0,000163	-0,000132	0,000082	-0,000296
5	0,000051	-0,000051	0,000000	-0,000132
6	0,000000	-0,000050	0,000000	-0,000051
7	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
8	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

Відповідні графіки кінематичних та динамічних характеристик отриманого субоптимального процесу зображено на рис. 2–6. Тут час t виражено в секундах, лінійні переміщення захоплювача x , y – в метрах, швидкості \dot{x} , \dot{y} – в м/с, кути α , β – в радіанах (рад), кутові швидкості $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ – в рад/с, моменти u_1 , u_2 – в Н · м. На рис. 2 наведено графіки закону руху та швидкості захоплювача, на рис. 3 – графіки кутових координат та швидкостей ланок маніпулятора. Бачимо, що побудований субоптимальний рух маніпулятора є безреверсним та задовольняє умови транспортної операції. Графіки відповідних керувань u_1 , u_2 зображено на рис. 4 (а). На рис. 4 (б) показана траєкторія руху захоплювача (стрілкою вказано напрямок руху).

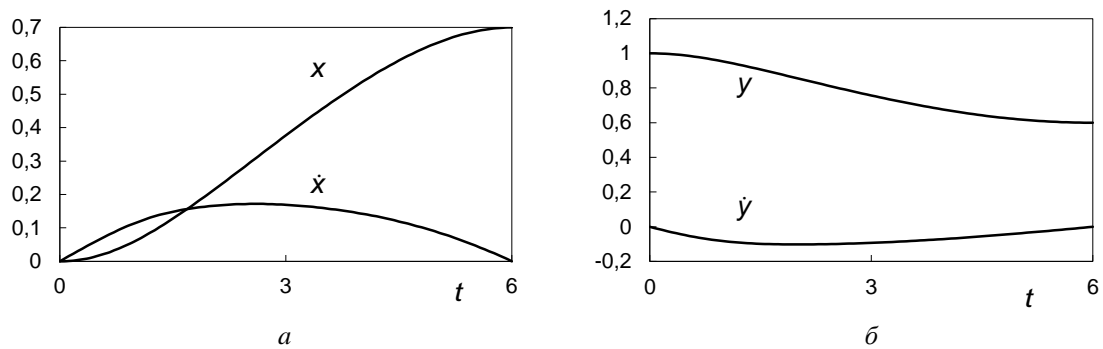


Рис. 2. Закон руху та швидкість захоплювача: (а) – у напрямку осі O_1X ; (б) – у напрямку осі O_1Y

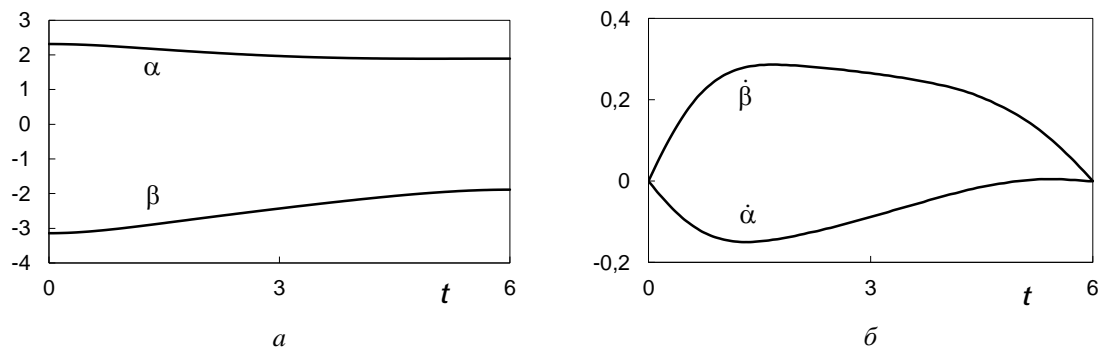


Рис. 3. Кутові характеристики ланок маніпулятора: (а) – кути; (б) – кутові швидкості

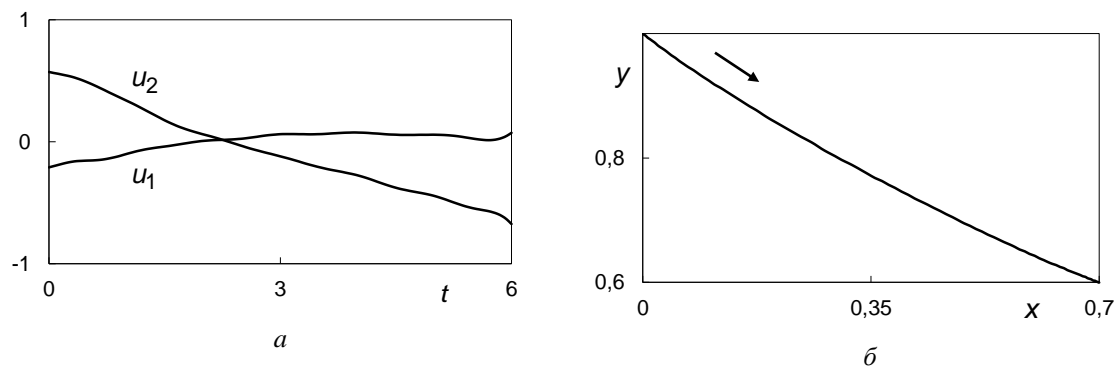


Рис. 4. Керування маніпулятора (а), траєкторія руху захоплювача (б)

На рис. 5 зображено кінограму руху маніпулятора під час переміщення захоплювача з початкового положення $P_0=(0, 1.0)$ у кінцеве $P_1=(0.7, 0.6)$. Бачимо, що базовий шарнір O

зміщений в точку $(1.143, 0.413)$ системи координат O_1XY , положення ланок манипулятора в початковий та кінцевий моменти часу руху відповідають конфігураціям набору ζ_4 .

Розподіл мінімальних (за коефіцієнтами \mathbf{z}) енерговитрат $\tilde{E}^* = \min_{\mathbf{z}} E(\xi, \eta, \zeta, \mathbf{z})$ на дискретній сітці значень параметрів ξ, η та фіксованій конфігурації $\zeta = \zeta_4$ наведено на рис. 6. Тут сітка значень $(\xi, \eta) \in \{(\xi_i, \eta_j): \xi_i = -0.8 + 0.1i, \eta_j = -0.5 + 0.1j, i = \overline{0, 23}, j = \overline{0, 26}\}$. Позначення осі X відповідає параметру ξ , осі Y – параметру η , осі Z – енерговитратам \tilde{E}^* . Видно, що для заданої транспортної операції положення базового шарніра манипулятора суттєво впливає на його енерговитрати.

Отже, під час налаштування дволанкового манипулятора на виконання транспортної операції важливим є вибір положення його базового шарніра. Як свідчать отримані результати числового моделювання, за рахунок раціонального розміщення цього шарніра можна істотно зменшити енерговитрати манипулятора.

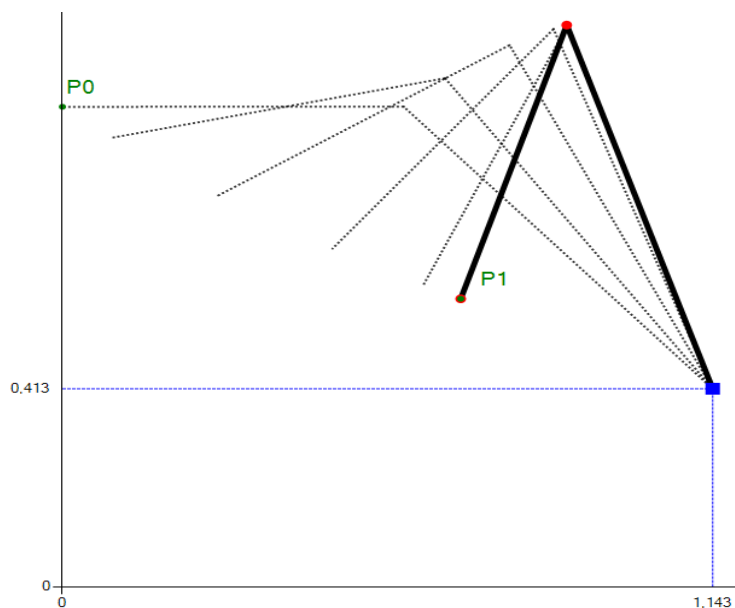


Рис. 5. Оптимальне зміщення базового шарніра та кінограма руху манипулятора

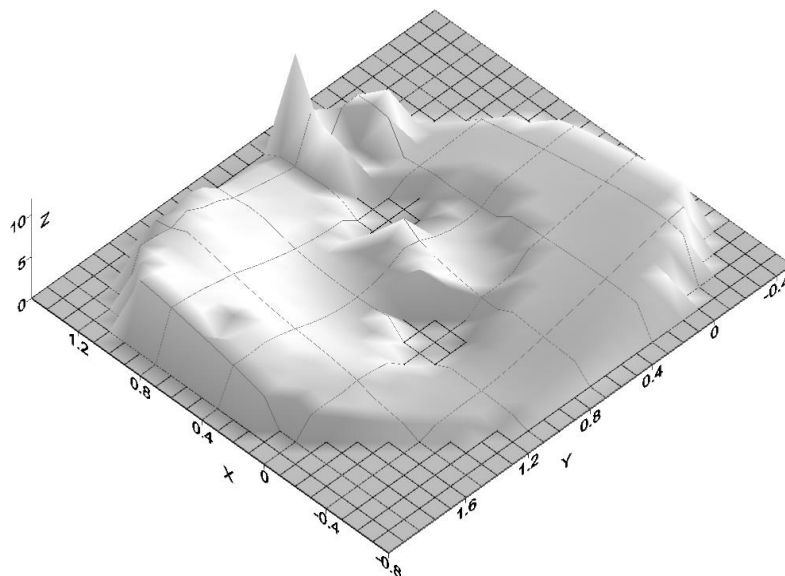


Рис. 6. Розподіл мінімальних енерговитрат манипулятора

5 Висновки

Для дволанкової маніпуляційної системи, що виконує задану транспортну операцію, сформульовано задачу сукупної оптимізації координат базового шарніра, граничних конфігурацій ланок та законів руху маніпулятора. Запропоновано алгоритм побудови субоптимального розв'язку задачі, який ґрунтується на методиці параметричної оптимізації, концепції обернених задач динаміки та числових процедурах нелінійного програмування. В основу методики параметричної оптимізації покладено апроксимацію кутових координат маніпулятора сумою кубічного полінома та скінченного тригонометричного ряду (з невідомими параметрами), що зводить вихідну задачу оптимального керування (з параметрами) до мінімізації функції багатьох змінних. Алгоритм реалізовано у вигляді відповідної комп'ютерної програми із сучасними інтерфейсними модулями для введення, оптимізації, аналізу та збереження параметрів та динамічних характеристик маніпулятора. Проведено серію числових розрахунків (для модельного прикладу маніпулятора), аналіз отриманих числових розрахунків свідчить, що положення базового шарніра та граничні конфігурації дволанкового маніпулятора суттєво впливають на його енерговитрати під час виконання транспортної операції, а тому їх доцільно враховувати під час налаштування маніпуляційної системи.

Розроблене алгоритмічно-програмне забезпечення може бути включене до розрахункових баз даних систем автоматизованого проектування маніпуляційних роботів та використане для удосконалення наявних та розроблення нових зразків маніпуляційних систем із високим рівнем експлуатаційних характеристик.

Перспективою подальших досліджень може бути порівняльний аналіз оптимальних процесів, побудованих для дволанкового маніпулятора за допомогою методики параметричної оптимізації та з використанням принципу максимуму Понтрягіна.

ЛІТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В., Акуленко Л.Д., Болотник Н. Н. Оптимизация режимов управления манипуляционными роботами с учетом энергозатрат. *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика*. 1987. № 3. С. 100–107.
2. Bolotnik N.N., Chernous'ko F.L. Optimization of manipulation robot control. *Soviet Journal Computer and Systems Sciences*. 1990. Vol. 28, No. 5. P. 127–169.
3. Polishchuk O. Control Processes Optimization for Mechanical Systems with Active, Semi-Passive and Passive Actuators. *Applied Mathematics and Physics*. 2013. Vol. 1, No. 4. P. 147–150. URL: <http://www.sciepub.com/AMP/abstract/932> (дата звернення: 07.12.2020).
4. Орлов И. В., Чунг Ч. Т. Управление мобильным двухзвнным манипулятором с ангулярной системой координат. *Вест. Московского энергетического института*. 2011, № 5. С.90–94. URL: <https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=33699077> (дата звернення: 07.12.2020).
5. Demydyuk M. V., Hoshovs'ka N.V. Parametric optimization of the transport operations of a two-link manipulator. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 238, Is. 2. P. 174–188. URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04227-8> (дата звернення: 07.12.2020).
6. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989. 386 с.
7. Lewis F.L., Abdallah C.T., Dawson D.M. Control of Robot Manipulators: Theory and Practice (second edition, revised and expanded). Marcel Dekker, Inc., New York, U.S.A., 2006. 614 p.
8. Ghafil H.N., Jarmai K. Optimization for Robot Modelling with MATLAB. 2020, Springer. 220 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-40410-9> (дата звернення: 07.12.2020).
9. Аветисян В.В. Оптимизация конфигураций и направлений поворотов звеньев двухзвнного манипулятора по комбинированным критериям качества. *Изв. НАН Армении. Механика*. 1998. Том 51, № 4. С. 65–71.
10. Демидюк М.В., Гошовська Н.В. Параметрична оптимізація руху дволанкового маніпулятора з використанням ортогональних поліномів. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2016. Вип. 14. С. 168–175. <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM/issue/view/137> (дата звернення: 07.12.2020).
11. Демидюк М.В., Ширко М.І. Оптимізація режимів руху та параметрів дволанкового маніпулятора з активними і пасивними приводами. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2007. Том 50, № 2. С. 41–48.

12. Fani D., Shahraki E. Two-link Robot Manipulator using Fractional Order PID Controllers Optimized by Evolutionary Algorithms. *Biosciences Biotechnology Research Asia*. 2016. Vol. 13, No. 1. P. 589–598. URL: <http://dx.doi.org/10.13005/bbra/2075> (дата звернення: 07.12.2020).
13. Khatri M., Khatri P. Trajectory control of two link robotic manipulator using PID. *Golden Research Thoughts*. 2013. Vol. 3, Is. 5. P. 1–7. URL: <http://oldgrt.lbp.world/UploadedData/2998.pdf> (дата звернення: 07.12.2020).
14. Zakia U., Moallem M., Menon C. PID-SMC controller for a 2-DOF planar robot. *Int. Conf. on Electrical, Computer and Communication Engineering (ECCE)*, 7-9 February, 2019, Cox'sBazar, Bangladesh. P. 1–6. <https://ieeexplore.ieee.org/document/8679436> (дата звернення: 07.12.2020).
15. Галемов Р.Т., Масальский Г.Б. Сравнительный анализ методов адаптации параметров регулятора системы управления робота-манипулятора. *Журнал Сибир. федерального универ. Техника и технологии*. 2017. Том 10. Вып. 4. С. 508–522. <https://readera.org/sravnitelnyj-analiz-metodov-adaptacii-parametrov-reguljatora-sistemy-upravlenija-146115895> (дата звернення: 07.12.2020).
16. Міщук Д., Горбатюк Є., Волянюк В. Визначення геометричних параметрів маніпулятора за характеристиками робочого середовища. *Гірничі, будівельні, дорожні і меліоративні машини*. 2019. Вип. 94. С. 25–34. URL: <http://gbdmm.knuba.edu.ua/article/view/208960> (дата звернення: 07.12.2020).
17. Badoniya P., George J. Two Link Planar Robot Manipulator Mechanism Analysis with MATLAB. *Int. J. for Research in Applied Science & Engineering Technology (IJRASET)*. 2018. Vol. 6, Is.7. P. 778–788. <https://www.ijraset.com/files/serve.php?FID=18429> (дата звернення: 07.12.2020).
18. Lidberg M., Berbyuk V. Optimization of Controlled Motion of Closed-Loop Chain Manipulator Robots with Different Degree and Type of Actuation. *J. Stability and Control: Theory and Application (SACTA)*. 2002. Vol. 4. No. 2. P. 56–73.
19. Бербюк В.Є., Демидюк М.В., Литвин Б.А. Параметрична оптимізація ходи та пружних характеристик пасивних приводів двоногого крокуючого робота. *Вісник Київського універ. ім.Тараса Шевченка. Серія: Кібернетика*. 2002, №3. С. 17–20.
20. Demydyuk M.V. Parametric optimization of four-link close-chain manipulator with active and passive actuators. *Journal of Mathematical Sciences*. 2010. Vol. 168, No. 5. P. 746–758. URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-010-0023-x> (дата звернення: 07.12.2020).
21. Демидюк М. В. Оптимізація транспортних операцій чотириланкового замкнутого маніпулятора. *Фізико-математичне моделювання та інформ. технології*. 2014. № 20. С. 107–116. URL: <http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/issue/archive> (дата звернення: 07.12.2020).
22. Demydyuk M.V., Lytvyn B.A. Optimization of the Parameters and Motion Control Modes of the Bilegged Walking Robot. *J. of Automation and Information Sci.* 2016. Vol. 48, Is. 12. P. 48–61. <http://dl.begellhouse.com/journals/2b6239406278e43e,49aee25875792fbb,2db684dd32093748.html> (дата звернення: 07.12.2020).
23. Zar T., Lin P.W., Win S.Y. Workspace Analysis of Two-link Planar Manipulator. *Int. J. of Science and Engineering Applications*. 2019. Vol.8, Is. 08. P. 380–383. DOI: 10.7753/IJSEA0808.1028 <https://ijsea.com/archive/volume8/issue8/IJSEA08081028.pdf> (дата звернення: 07.12.2020)
24. Berbyuk V.E., Boström A.E. Optimization problems of controlled multibody systems having spring-damper actuators. *International applied mechanics*. 2001. Vol. 37, Is. 7. P. 935-940.
25. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Москва: Наука, 1968. 476 с.
26. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы: В 2 т. М.: Наука, 1977. Т. 2. 400 с.
27. Nagurka M., Yen V. Fourier-based optimal control of nonlinear dynamic systems. *Trans. ASME. J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 1990. Vol. 112, № 3. P. 19–26.
28. Mezzadri F., Galligani E. A. Chebyshev technique for the solution of optimal control problems with nonlinear programming methods. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2016. Vol. 121, P. 95–108. URL: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2015.08.023> (дата звернення: 07.12.2020).
29. Tohidi E., Samadi O.R.N., Farahi M.H. Legendre Approximation for Solving a Class of Nonlinear Optimal Control Problems. *J. of Mathematical Finance*. 2011, No. 1. P. 8–13. URL: [10.4236/jmf.2011.11002](http://dx.doi.org/10.4236/jmf.2011.11002) (дата звернення: 07.12.2020).
30. Bazaraa M.S., Sherali H.D., Shetty C.M. Nonlinear programming: theory and algorithms (3rd ed.). John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. 2013. 872 p. URL: <https://www.wiley.com/en-us/Nonlinear+Programming:+Theory+and+Algorithms,+3rd+Edition-p-9780471486008> (дата звернення: 07.12.2020).

звернення: 07.12.2020).

31. Betts J.T. Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming (2-nd edition). Society for Industrial & Applied Mathematics, 2009. 448 p. URL: <https://doi.org/10.1137/1.9780898718577> (дата звернення: 07.12.2020).
32. Deitel P., Deitel H. Visual C# 2012: How to Program, 5-th Ed. Pearson, 2013. 1020 p.
33. Бартіш М.Я. Методи оптимізації. Теорія і алгоритми: Навч. посібник. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Ів. Франка, 2006. 223 с.

REFERENCES

1. V.V.Avetisyan, L.D.Akulenko, N.N.Bolotnik, "Optimization of control modes for manipulation robots with regard of the energy consumption". *Izv. Akad. Nauk SSSR. Tekh. Kibern.* No. 3, pp. 100–107. 1987. [in Russian].
2. N.N. Bolotnik, F.L. Chernous'ko, "Optimization of manipulation robot control". *Soviet Journal Computer and Systems Sciences.* Vol. 28, No. 5. pp. 127–169. 1990.
3. O.Polishchuk, "Control Processes Optimization for Mechanical Systems with Active, Semi-Passive and Passive Actuators". *Applied Mathematics and Physics.* Vol. 1, No. 4, pp. 147–150. 2013. URL: <http://www.sciepub.com/AMP/abstract/932> (Last accessed: 07.12.2020).
4. I.V.Orlov, T.T.Trung, "Control of two links mobile manipulator with the angular coordinate system". *Bulletin of Moscow Power Engineering Institute.* No. 5, pp. C.90–94. 2011. URL: <https://www.elibrary.ru/contents.asp?id=33699077> (Last accessed: 07.12.2020) [in Russian].
5. M.V.Demydyuk, N.V.Hoshovs'ka, "Parametric optimization of the transport operations of a two-link manipulator". *Journal of Mathematical Sciences.* Vol. 238, Is. 2, pp. 174–188. 2019. URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04227-8> (Last accessed: 07.12.2020)
6. F. L. Chernous'ko, N. N. Bolotnik, V. G. Gradetskii, *Robot Manipulators: Dynamics, Control, and Optimization*, Moscow: Nauka, 386 p. 1989 [in Russian].
7. F.L.Lewis, C.T.Abdallah, D.M.Dawson, *Control of Robot Manipulators: Theory and Practice* (second edition, revised and expanded). Marcel Dekker, Inc., New York, U.S.A., 614 p. 2006.
8. H.N.Ghafil, K.Jarmai, *Optimization for Robot Modelling with MATLAB*. Springer. 220 p. 2020. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-40410-9> (Last accessed: 07.12.2020).
9. V.V.Avetisyan, "Optimization of configurations and directions of rotations of two-link manipulators by the combined criteria of quality". *Izv. NAN Armenii. Mekhanika.* Vol. 51, Is. 4, pp. 65–71. 1998 [in Russian].
10. M.V.Demydyuk, N.V.Hoshovska, "Parametric optimization of the two-link manipulator motions with using orthogonal polynomials". *Applied Problems of Mechanics and Mathematics.* Is. 14. pp. 168–175. 2016. URL: <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM/issue/view/137> [in Ukrainian].
11. M.V.Demydyuk, M.I.Shyrko, "The two-link semi-passively actuated manipulator motion modes and parameters optimization". *Mathematical Methods and Physicomechanical Fields.* Vol. 50, Is. 2. pp. 41–48. 2007. [in Ukrainian].
12. D.Fani, E.Shahraki, "Two-link Robot Manipulator using Fractional Order PID Controllers Optimized by Evolutionary Algorithms". *Biosciences Biotechnology Research Asia.* 13(1), pp. 589–598. 2016. URL: <http://dx.doi.org/10.13005/bbra/2075> (Last accessed: 07.12.2020).
13. M.Khatri, P.Khatri, "Trajectory control of two link robotic manipulator using PID". *Golden Res. Thoughts.* Vol. 3, Is. 5, pp. 1–7. 2013. URL: <http://oldgrt.lbp.world/UploadedData/2998.pdf> (Last accessed: 07.12.2020)
14. U.Zakia, M.Moallem, C.Menon, "PID-SMC controller for a 2-DOF planar robot". *Int. Conf. on Electrical, Computer and Communication Engineering (ECCE)*, 7-9 February, 2019, Cox'sBazar, Bangladesh, pp. 1–6. <https://ieeexplore.ieee.org/document/8679436> (Last accessed: 07.12.2020).
15. R.T.Galemov, G.B.Masalsky, "Comparative analysis of the regulator parameters adaptation methods of the control system of the robot manipulator". *Journal of Siberian Federal University. Engineering and Technologies.* Vol. 10, Is. 4, pp. 508–522. 2017. <https://readera.org/sravnitelnyj-analiz-metodov-adaptacii-parametrov-reguljatora-sistemy-upravlenija-146115895> (Last accessed: 07.12.2020).
16. D.Mishchuk, E.Gorbatyuk, V.Volianiuk, "Determination of geometric parameters of a manipulator

- using by characteristics the working environment”. *Mining, constructional, road and melioration machines*. Is. 94, pp. 25-34. 2019. URL: <http://gbdmm.knuba.edu.ua/article/view/208960> (Last accessed: 07.12.2020) [in Ukrainian].
17. P.Badoniya, J.George, “Two Link Planar Robot Manipulator Mechanism Analysis with MATLAB” *Int. J. for Research in Applied Sci. & Eng. Technology (IJRASET)*. Vol. 6, Is. 7, pp. 778–788. 2018. <https://www.ijraset.com/files/serve.php?FID=18429> (Last accessed: 07.12.2020).
 18. M.Lidberg, V.Berbyuk, “Optimization of Controlled Motion of Closed-Loop Chain Manipulator Robots with Different Degree and Type of Actuation”. *J. Stability and Control: Theory and Application (SACTA)*. Vol. 4, No. 2, pp. 56–73. 2002.
 19. V.E.Berbyuk, M.V.Demydyuk, B.A.Lytvyn, “Parametric optimization of motion and stiffness characteristics of passive drives of a bipedal walking robot”. *Visnyk Taras Shevchenko National University of Kyiv. Cybernetic*. №3, pp. 17–20. 2002.
 20. M.V.Demydyuk, “Parametric optimization of four-link close-chain manipulator with active and passive actuators”. *Journal of Mathematical Sciences*. Vol. 168, No. 5, pp. 746–758. 2010. URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-010-0023-x> (Last accessed: 07.12.2020).
 21. M. Demydyuk, “Transport operation optimization of the four link closed chain manipulator”. *Physico-mathematical modeling and informational technologies*. No. 20. pp. 107–116. 2014. URL: <http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/issue/archive> (Last accessed: 07.12.2020) [in Ukrainian].
 22. M.V.Demydyuk, B.A.Lytvyn, “Optimization of the Parameters and Motion Control Modes of the Bilegged Walking Robot”. *J. of Automation and Inform. Sci.* Vol. 48, Is. 12, pp. 48–61. 2016. <http://dl.begellhouse.com/journals/2b6239406278e43e,49aee25875792fbb,2db684dd32093748.html> (Last accessed: 07.12.2020).
 23. T.Zar, P.W.Lin, S.Y.Win, “Workspace Analysis of Two-link Planar Manipulator”. *Int. J. of Science and Engineering Applications*. Vol. 8, Is. 8, pp. 380–383. 2019. DOI: 10.7753/IJSEA0808.1028. <https://ijsea.com/archive/volume8/issue8/IJSEA08081028.pdf> (Last accessed: 07.12.2020).
 24. V.E.Berbyuk, A.E.Boström, “Optimization problems of controlled multibody systems having spring-damper actuators”. *International applied mechanics*. Vol. 37, Is. 7, pp. 935-940. 2001.
 25. N. N. Krasovskii, *Motion Control Theory*, Moscow: Nauka, 1968, 476 c. [in Russian].
 26. V.I.Krylov, V.V.Bobkov, P.I.Monastyryni, “Computational methods: In 2 vol. Moscow: Nauka, Vol. 2. 400 p. 1977 [in Russian].
 27. M.Nagurka, V.Yen, “Fourier-based optimal control of nonlinear dynamic systems”. *Trans. ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. Vol. 112, Is. 3, pp. 19–26. 1990.
 28. F.Mezzadri, E.A.Galligani, “Chebyshev technique for the solution of optimal control problems with nonlinear programming methods”. *Mathematics and Computers in Simulation*. Vol. 121, pp. 95–108. 2016. URL: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2015.08.023> (Last accessed: 07.12.2020).
 29. E.Tohidi, O.R.N.Samadi, M.H.Farahi, “Legendre Approximation for Solving a Class of Nonlinear Optimal Control Problems”. *Journal of Mathematical Finance*. No. 1, pp. 8–13. 2011. URL: [10.4236/jmf.2011.11002](https://doi.org/10.4236/jmf.2011.11002) (Last accessed: 07.12.2020).
 30. M.S.Bazaraa, H.D.Sherali, C.M.Shetty, *Nonlinear programming: theory and algorithms (3rd ed.)* – John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. 872 p. 2013. URL: <https://www.wiley.com/en-ua/Nonlinear+Programming:+Theory+and+Algorithms,+3rd+Edition-p-9780471486008> (Last accessed: 07.12.2020).
 31. J. T. Betts, *Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics, University City Science Center, Philadelphia. 190 p. 2001. URL: <https://doi.org/10.1137/1.9780898718577> (Last accessed: 07.12.2020).
 32. P.Deitel, H.Deitel, *Visual C# 2012: How to Program*, 5-th Ed. Pearson, 1020 p. 2013.
 33. M.Y.Bartish, *Optimization methods. Theory and algorithms: Textbook*. Lviv: Publishing Center of Ivan Franko National University of Lviv, 223 p. 2006. [in Ukrainian].