

УДК 593.

Метод скінченних елементів при визначенні руйнівного навантаження на перфоровану оболонку при короткочасних силових впливах

К.Г. Дегтярьов, В.І. Гнітько, А.М. Тонконоженко

**Дегтярьов Кирило
Георгійович**

*провідний інженер
Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАНУ, вул.
Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна
e-mail kdegt89@gmail.com;
<http://orcid.org/0000-0002-4486-2468>*

**Гнітько
Іванович**

Василь *к.т.н., старший науковий співробітник
Інститут проблем машинобудування 22ул. А. М. Підгорного НАНУ, 22ул.
Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна
e-mail: gmitkovi@gmail.com;
<http://orcid.org/0000-0003-2475-5486>*

**Тонконоженко
Анатолій
Мстиславович**

*керівник сектору
Конструкторське бюро «Південне» ім. М.К. Янгеля
вул. Криворізька, 3 Дніпро 49008, Україна
e-mail: stcu-yuzhnoye@freemail.dnpr.net,
<https://orcid.org/0000-0002-4721-6345>*

Досліджено напружено-деформований стан циліндричної оболонки з періодичною системою отворів. Вважається, що рух оболонки здійснюється під впливом короткочасного інтенсивного навантаження. Запропоновано метод дослідження руйнівних навантажень при короткочасних силових впливах на перфоровану циліндричну оболонку. Задачу визначення руху оболонки розглянуто в пружно-пластичному формулюванні. Вважається, що коли еквівалентні навантаження дорівнюють або перевищують границю плинності, в пружному тілі починають розвиватися пластичні деформації. Зона пластичних деформацій уточнюється на кожному кроці навантаження. Сумарну деформацію зображено в вигляді суми пружної та пластичної складових. Пружні деформації виражаються через пружні переміщення за допомогою співвідношень Коші. Умови рівноваги застосовано в напруженнях. При цьому пружна складова приводить до рівнянь Ламе в переміщеннях, невідомі пластичні напруження приймають вигляд додаткових навантажень та враховуються в правій частині диференціальних рівнянь руху. Застосовуються теорія малих пружно-пластичних деформацій та теорія течії. Обирається закон пластичної течії, задається мульти - лінійна або білінійна діаграма розтягування, що характеризує зону пластичної течії, при цьому вважається, що компоненти девіатору пластичних деформацій прямо пропорційні компонентам девіатору напружень. Для розв'язання системи диференціальних рівнянь руху використано метод скінченних елементів. Використані просторові 20-ті вузлові скінченні елементи з квадратичною апроксимацією переміщень всередині елементів. Проведено дослідження збіжності методу в залежності від кількості елементів. Отримано оцінку моменту початку руйнування.

Ключові слова: перфорована оболонка, пружно-пластична поведінка, короткочасне навантаження, метод скінченних елементів, руйнування

Finite element method in determining the destructive load on the perforated shell under short-term forces

K. Degtyarev, V. Gnitko, A. Tonkonozhenko

Degtyarev Kirill

*senior Engineer,
National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical
engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046;
e-mail: kdegt89@gmail.com;
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4486-2468>.*

Gnitko Vasyl

*PhD, Senior Research Fellow,
National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical
engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046;
e-mail: gmitkovi@gmail.com
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2475-5486>.*

Tonkonozhenko *head of department,*
Anatoly *M. K. Yange Yuzhnoye Design Office*
Dnipro, Krivorizka, 3, Ukraine, 49008,
e-mail: stcu-yuzhnoye@freemail.dnepr.net,
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4721-6345>.

Stress-strain state of cylindrical shells with periodic system of openings is considered. It is supposed that the shell moves under the influence of short-term intense load. The method of determining destructive loads in case of short-term force effects on a perforated cylindrical shell is proposed. The problem of determining the shell motion is considered in the elastic-plastic formulation. It is supposed that when the equivalent loads are equal to or exceed the yield strength; plastic deformations begin to develop in the elastic body. The zone of plastic deformations is specified at each step of loading. The total deformation is presented as the sum of elastic and plastic components. Elastic deformations are expressed through elastic displacements with Cauchy ratios. Equilibrium conditions are applied in stresses. The elastic component results in to Lamé equations in displacements, unknown plastic stresses take the form of additional loads and are taken into account in the right part of the differential equations of motion. The theories of small elastic-plastic deformations and plastic flows are applied. The law of plastic flow is chosen, a multi-linear or bilinear tensile diagram characterizing the zone of plastic flow is given, and it is assumed that components of plastic deviator deformations are directly proportional to the components of the stress deviator. The finite element method is used to solve the system of differential equations of motion. Spatial 20-nodes finite elements with quadratic approximation of unknown motion inside elements are used. Studying the convergence of the method depending on the number of elements has been performed. The estimation of the moment of the beginning of destruction is obtained.

Key words: perforated shell, elastic-plastic behavior, short-term load, finite element method, fracture

Метод конечных элементов при определении разрушающей нагрузки на перфорированную оболочку при кратковременном нагружении

К.Г. Дегтярев, В.И. Гнисько, А.М. Тонконоженко

Дегтярев Кирилл *ведущий инженер*
Георгійович *институт проблем машиностроения им. А. Подгорного НАНУ, ул.*
Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина
e-mail kdegt89@gmail.com;
<http://orcid.org/0000-0002-4486-2468>

Гнисько **Василий** *к.т.н., старший научный сотрудник*
Иванович *институт проблем машиностроения им. А. Подгорного НАНУ, ул.*
Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина
e-mail: gnitkovi@gmail.com;
<http://orcid.org/0000-0003-2475-5486>

Тонконоженко *начальник сектору*
Анатолій *Конструкторское бюро «южное» им. М.К. Янгеля*
Мстиславович *вул. Криворізька, 3 Дніпро 49008, Україна*
e-mail: stcu-yuzhnoye@freemail.dnepr.net,
<https://orcid.org/0000-0002-4721-6345>

Исследовано напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки с периодической системой отверстий. Движение оболочки осуществляется под действием кратковременной интенсивной нагрузки. Предложен метод исследования разрушающих нагрузок при кратковременных силовых воздействиях на перфорированную цилиндрическую оболочку. Задача определения движения оболочки рассмотрена в упруго - пластической формулировке. При этом, когда эквивалентные напряжения равны или превышают предел текучести, в упругом теле развиваются пластические деформации. Зона пластических деформаций уточняется на каждом шаге по нагрузке. Суммарная деформация представлена в виде суммы упругой и пластической составляющих. Упругие деформации выражаются через упругие перемещения с помощью соотношений Коши. Рассмотрены уравнения равновесия в напряжениях. При этом упругая составляющая приводит к уравнениям Ламе в перемещениях, неизвестные пластические напряжения принимают вид дополнительных нагрузок и учитываются в правой части дифференциальных уравнений движения. Применяются теория малых упруго - пластических деформаций и теория течения. Задается мульти - линейная или билинейная диаграмма растяжения, характеризующая зону пластического течения, при этом принято, что компоненты девиатора пластических деформаций прямо пропорциональны компонентам девиатора напряжений. Для решения системы дифференциальных уравнений движения использован метод конечных элементов. Используются пространственные 20-ти узловые конечные элементы с квадратичной аппроксимацией неизвестных перемещений внутри элементов. Проведено исследование сходимости метода в зависимости от количества элементов. Получена оценка времени до начала разрушения.

1 Вступ

Дослідження впливу пластичних деформацій та деформацій повзучості є актуальним для задач міцності і стійкості неоднорідних конструкцій, наприклад, в ракетно-космічній техніці. При високих рівнях навантаження і тривалих термінах експлуатації в елементах конструкцій виникають пластичні деформації. Такі деформації в першу чергу виникають при локальних навантаженнях і контактних взаємодіях [1-4]. Врахування таких ефектів, що характеризує фізичну нелінійність, дає реальну оцінку міцності і працездатності конструкцій. Задачі теорії пластичності зводяться до побудови крокових процесів послідовних наближень, в кожному наближенні розв'язується задача теорії пружності з введенням параметрів, що характеризують особливості пластичного деформування (додаткові навантаження і деформації, змінні параметри пружності та ін.) [5-9].

При імпульсному навантаженні в конструкції виникають напруження різної природи, що поширюються з визначеними швидкостями у вигляді хвиль збурення (хвиль напружень - навантаження, розвантаження і відображення). Залежно від природи хвиль напружень області збурення поділяються на первинні та вторинні. Первинною є область збурень хвилі навантаження, так як при її відсутності не існує хвиль розвантаження і відображення; відповідно області збурень хвиль розвантаження і відбитих хвиль вважаються вторинними. Вони завжди знаходяться всередині області збурень хвилі і є областями з початковими напруженнями та деформаціями.

Метою цього дослідження є прогноз руйнування конструктивного елемента в вигляді перфорованої, встановлення моменту часу, в який відбувається руйнування. На підставі розрахунків даються рекомендації щодо зміни параметрів конструктивного елемента для поліпшення міцності.

2. Формулювання задачі

Розглянуто циліндричну оболонку, послаблену періодичною системою кругових отворів. Створено спрощену геометричну модель для розрахунку руху такої оболонки, зображену на рис. 2.1. Для прискорення розрахунків було введено дві площини симетрії, що дозволило залишити в розрахунках одну чверть вхідної конструкції.

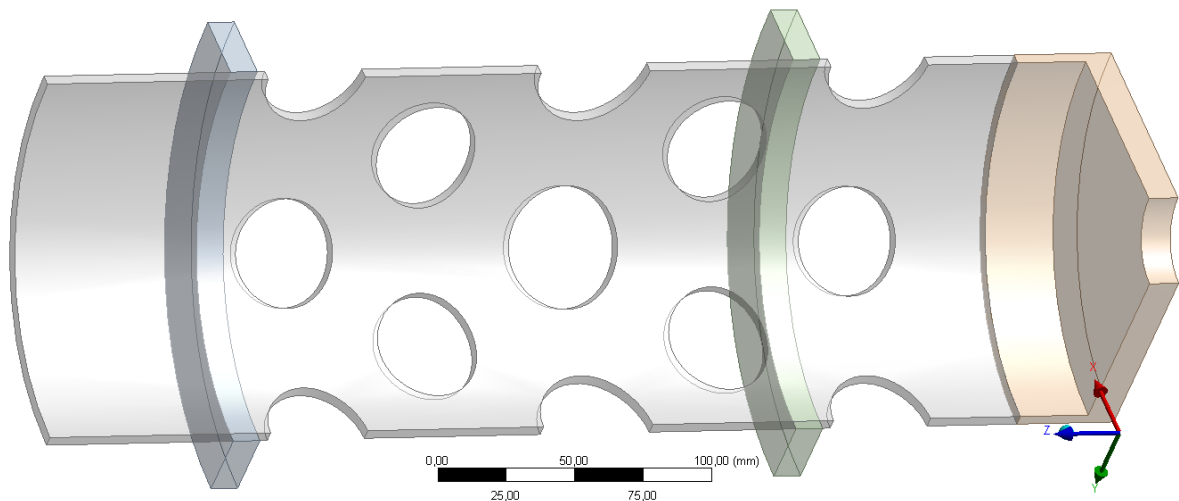


Рисунок 2.1 Розрахункова модель конструкції

Навантаження, що діє на конструктивний елемент, подаються у вигляді таблиці, в якій показано зміну тиску як функції часу.

Вважаємо, що при збільшенні навантаження в тілі можуть розвиватися пластичні деформації, тобто зв'язок напружень і переміщень не буде описуватися законом Гука.

Для визначення динамічного напружено-деформованого стану пружного тіла служать граничні умови задачі і система трьох диференціальних рівнянь еліптичного типу в частинних похідних другого порядку (рівнянь Ламе) напружень і деформацій

$$\mu \Delta u_j + (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} + X_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad j=1,2,3.$$

$$\text{де } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \vartheta = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3};$$

$u_i(\mathbf{x})$ - переміщення,

X_i - компоненти об'ємної сили,

ρ - густина матеріалу конструктивного елемента,

$\mu = E[2(1+\nu)]^{-1}$ – модуль зсуву,

$\lambda = E\nu[(1+\nu)(1-2\nu)]^{-1}$ – коефіцієнт Ламе,

E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона, відповідно.

$$\text{При цьому } \nu = \lambda[2(\lambda + \mu)]^{-1}, \quad E = \mu(2\mu + 3\lambda)(\lambda + \mu)^{-1}.$$

Якщо перші похідні переміщень настільки малі, що їх квадратами і добутками частинних похідних від $u_i(\mathbf{x})$ можна знехтувати, то деформації ε_{ij} подаються у формі тензора малих деформацій Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}). \quad (2.1)$$

Компоненти тензора напружень для пружного ізотропного тіла, яке зазнає впливу зовнішніх механічних навантажень, визначаються через компоненти $u_i(\mathbf{x})$ за законом Гука в формі [10]

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Згідно з [10], введемо диференційний оператор пружних напружень (оператор зусиль класичної теорії пружності), що діє на поверхні зі зовнішньою одиничною нормаллю $\mathbf{n}(\mathbf{x})$

$$T_{ij}^n(\partial_x, \mathbf{n}(\mathbf{x})) = \lambda n_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} + \mu n_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \delta_{ij} \mu \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{x})}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

де $n_j(\mathbf{x})$ - компоненти вектору нормалі.

Припустимо, що на частині межі Γ_1 задані переміщення тіла, а на частині Γ_2 - зусилля; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Зусилля виражаються за формулою

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}^n(\partial_x, \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + \lambda n \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}). \quad (2.3)$$

Тобто граничні умови мають вигляд

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_1} = \mathbf{U}(t), \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_2} = \mathbf{P}(t). \quad (2.4)$$

Задаються також початкові умови, якщо розглядається динамічний стан

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = 0. \quad (2.5)$$

Зазвичай розглядаються нульові початкові умови, тобто вважається, що рух тіла починається із стану спокою.

Вважаємо, що при збільшенні навантаження в тілі можуть розвиватися пластичні деформації, тобто зв'язок напружень і переміщень не буде описуватися законом Гука. Будемо застосовувати теорію малих пружних деформацій або теорію течії.

Формулювання задачі пружно-пластичного деформування є такі. Нехай на тіло, що займає область Ω з границею Γ , діють задані об'ємні та поверхневі сили. Потрібно визначити поля напружень, деформацій і переміщень $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) та невідомі заздалегідь інтенсивності повних напружень та повних деформацій в області Ω , які відповідають заданим граничним умовам та співвідношенням, що описують рух тіла при різних рівнях навантаження.

Для знаходження зазначених функцій застосовуються такі рівняння:

- диференціальні рівняння рівноваги в напруженнях σ_{ij}

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} 0; \quad i, j = 1, 2, 3,$$

- граничні умови (2.4);
- початкові умови (2.5);
- співвідношення Коші, які дають залежності між компонентами тензора деформацій і компонентами вектора переміщень та визначаються формулою (2.1);
- фізичні рівняння, що зв'язують компоненти тензорів напружень і деформацій до моменту виникнення пластичних деформацій (закон Гука, формула (2.2));
- умова плинності, при виконанні якого виникають пластичні деформації (умова Хубера-Мізеса-Генки)

$$\sigma_{eq}(\mathbf{x}) = \sigma_T,$$

де σ_T - межа плинності;

$\sigma_i(\mathbf{x})$ - інтенсивність повних напружень, що визначається за формулою

$$\sigma_{eq}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)}.$$

Якщо $\sigma_{eq}(\mathbf{x}) < \sigma_T$, то матеріал знаходиться в пружній зоні, і пластичні деформації не розвиваються.

Згідно з [11] використовуємо гіпотезу про існування єдиної кривої деформування, яка встановлює однозначну залежність між еквівалентними деформаціями ε_{eq} та еквівалентними напруженнями σ_{eq} . Задається мульти - лінійна або білінійна діаграма розтягування, що характеризує зону пластичної течії. За гіпотезою єдиної кривої деформування вважається, що діаграма напруження-деформації залишається такою ж, як при одноосьових випробуваннях, але одноосьові напруження і деформація замінюються відповідними інтенсивностями напружень і деформацій. За даними [12] вважаємо, що густина ρ є сталою.

Інтенсивність еквівалентних деформацій визначається за формулою

$$\varepsilon_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)}. \quad (2.6)$$

Повна деформація є сумою її пружної та пластичної складових за гіпотезами Прандтля-Рейса [11]

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{pl}. \quad (2.7)$$

Тоді повну еквівалентну деформацію можна подати у вигляді суми її еквівалентних пружної ε_{eq}^e та пластичної ε_{eq}^{pl} частин, а саме:

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_{eq}^e + \varepsilon_{eq}^{pl}.$$

Компоненти пружної деформації зв'язані з компонентами напружень законом Гука.

Згідно з [13] вважаємо, що за рахунок пластичних деформацій зміна об'єму невелика, тобто виконана умова нестисливості матеріалу; при малих пластичних деформаціях компоненти девіатора деформацій пропорційні компонентам девіатора напружень. Між інтенсивністю еквівалентних напружень та інтенсивністю еквівалентних деформацій існує функціональна залежність

$$\sigma_{eq} = \Phi(\varepsilon_{eq}), \quad (2.8)$$

Причому ця залежність, є єдиною для даного матеріалу, не залежить від виду напруженого стану, й подібна до залежності від напруженнями та деформаціями при розтягненні. Тому цю залежність зазвичай будують за діаграмою розтягнення.

Фізичні рівняння, або рівняння зв'язку між напруженнями та деформаціями, або швидкостями деформацій, залежать від прийнятих законів зміцнення. В теорії малих пружно-пластичних

деформацій задається зв'язок між напруженнями та деформаціями, а в теорії пластичного плинину задаються зв'язки між напруженнями та швидкостями деформацій.

В цьому дослідженні використано теорію малих пластичних деформацій, з використанням гіпотез Прандтля-Рейса [13], а також теорію Купера – Саймондса [14], коли пластичні деформації суттєво перевищують пружні.

Фізичні рівняння теорії малих пружно-пластичних деформацій мають вигляд

$$\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_{eq}}{\varepsilon_{eq}} \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{eq}}{\sigma_{eq}} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0), \quad \sigma_0 = \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_0, \quad \sigma_{eq} = \Phi(\varepsilon_{eq}), \quad (2.9)$$

де ε_{eq} визначається за формулою (2.6).

Внаслідок рівності (2.7) маємо для прирощень деформацій такі співвідношення

$$\delta\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon_{ij}^e + \delta\varepsilon_{ij}^{pl}.$$

Прирощення пружних деформацій знаходимо із закону Гука, а прирощення пластичних деформацій знаходимо за формулою [13], а саме

$$\delta\varepsilon_{ij}^{pl} = \Psi \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}}.$$

При застосуванні теорії малих пружно-пластичних деформацій маємо для додаткових деформацій такі вирази [13] із застосуванням критерію Хубера-Мізеса-Генки маємо

$$\delta\varepsilon_{ij}^{pl} = \left(\Psi - \frac{1}{2\mu} \right) (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0),$$

де $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0$ - компоненти девіатора напружень.

Згідно з методом додаткових навантажень [11], знаходимо

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0) = \frac{1}{\Psi} (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0), \quad \frac{1}{\Psi} = 2\mu - \left(2\mu - \frac{1}{\Psi} \right).$$

Це дає змогу побудувати таке зображення повних напружень

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \left(2\mu - \frac{1}{\Psi} \right) (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0).$$

Якщо $2\mu - \frac{1}{\Psi} = 0$, то маємо співвідношення пружної задачі. Це співвідношення приймаємо як нульове наближення для значення Ψ . Після розв'язання рівнянь Ламе знаходимо відповідні нульові наближення для переміщень та деформацій $u_i^{(0)}, \varepsilon_{ij}^{(0)}$. Далі за формулою (2.6) знаходимо $\varepsilon_{eq}^{(0)}$ та за формулою (2.8) обчислюємо $\sigma_{eq}^{(0)}$. Після цього знаходимо перше наближення для Ψ за формулою

$$\Psi^{(1)} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{eq}^{(0)}}{\varepsilon_{eq}^{(0)}}.$$

Далі знову розв'язуємо рівняння Ламе з відомими додатковими правими частинами, побудованими за $\left(2\mu - \frac{1}{\Psi} \right) (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0)$ та отримуємо $u_i^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}$. Далі знаходимо $\varepsilon_{eq}^{(1)}, \sigma_{eq}^{(1)}$ та

$\Psi^{(2)} = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{eq}^{(1)}}{\varepsilon_{eq}^{(1)}}$. Розв'язання задачі продовжуємо доти різниця між наближеннями по нормі не буде

перевищувати наперед заданого малого додатного числа [15].

Після цього переходимо на наступний крок за часом.

Теорію малих пружно-пластичних деформацій застосовуємо доти пластична частина деформацій є малою в порівнянні з пружною. В наших розрахунках надалі приймалось, що для застосування цієї теорії еквівалентна пластична деформація має не перевищувати 0.1 від еквівалентної пружної деформації.

При перевищенні вказаної межі переходимо до застосування теорії Купера – Саймондса. При цьому обчислюємо швидкості деформацій і застосовуємо зв'язок між швидкостями деформацій та напруженнями, як критерій руйнування використовуємо таку залежність

$$\dot{\sigma}_{eq} = \sigma_{eq} \left[1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}_{eq}}{D} \right)^{\frac{1}{n}} \right], \quad (2.10)$$

де D, n є сталими матеріалу, інтенсивність швидкостей $\dot{\epsilon}_{eq}$ обчислюється за формулою

$$\dot{\epsilon}_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22})^2 + (\dot{\epsilon}_{22} - \dot{\epsilon}_{33})^2 + (\dot{\epsilon}_{33} - \dot{\epsilon}_{11})^2} + \frac{3}{2} (\dot{\epsilon}_{12}^2 + \dot{\epsilon}_{23}^2 + \dot{\epsilon}_{31}^2).$$

Вираз (2.10) є динамічною границею плинності. Рівняння (2.9) узагальнюються таким чином

$$\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0 = \frac{2}{3} \frac{\dot{\sigma}_{eq}}{\dot{\epsilon}_{eq}} \dot{\epsilon}_{ij}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_{eq}}{\dot{\sigma}_{eq}} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0), \quad \dot{\sigma}_{eq} = \Phi(\dot{\epsilon}_{eq}).$$

В рівняннях Прандтля-Рейса приріст пружних деформацій вважаємо малим по відношенню до приросту пластичних деформацій.

Далі знаходимо швидкості деформацій та напруження на кожному кроці за часом.

Вибирається також критерій руйнування. Це критичне значення еквівалентної деформації. Моделювання процесу локального руйнування матеріалу реалізується наступним чином. Коли еквівалентні деформації сягають свого граничного значення, матеріал конструкції вважається зруйнованим, а час, за який отримано це граничне значення, вважається часом руйнування.

3 Числовий метод розв'язання задачі

На теперішній час основними методами чисельного інтегрування диференціальних рівнянь по просторовим координатам в задачах аналізу статичного та динамічного напружено-деформованого стану конструкцій є методи скінченних та граничних елементів, метод скінченних різниць та методи розкладення в ряди [16-20]. Кожен з них має свої переваги та недоліки, що обумовлює вибір методу для кожної конкретної задачі.

В цьому дослідженні використано метод скінченних елементів, детальний опис застосованого методу подано в роботі [9].

Була створена якісна скінченно-елементна сітка з методом побудови одноманітних скінченних елементів, пріоритетом якого є рівносторонні елементи однакового розміру, які найбільш краще підходять для динамічного аналізу.

Використовувались 20-вузлові просторові скінченні елементи з квадратичною апроксимацією переміщень всередині елементів.

Також було здійснено локальне подрібнення сітки в найбільш слабких і небезпечних місцях конструкції. Такими місцями є кільця отворів найбільших діаметрів, що знаходяться між двох пасків конструкції. Фінальна сітка скінченних елементів (рис. 3.1) налічує понад 35 тисячі скінченних елементів із середньою якістю елемента більше 0.85, що є хорошим результатом для оболонкової моделі даної геометрії. Збільшення кількості скінченних елементів вдвічі не привело до суттєвої зміни результатів.

В розрахунках прийнято мульті - лінійну діаграму розтягнення, та її форма прийнята для побудови діаграми, що описує зв'язок між інтенсивністю еквівалентних деформацій та еквівалентних напружень, рис. 3.2.

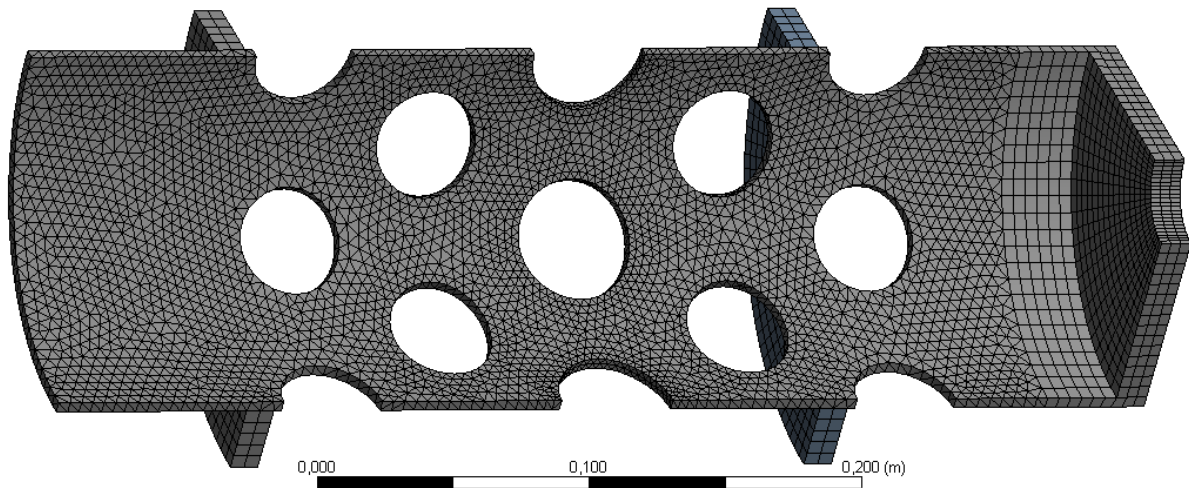


Рисунок 3.1 Скінченно-елементна модель конструкції

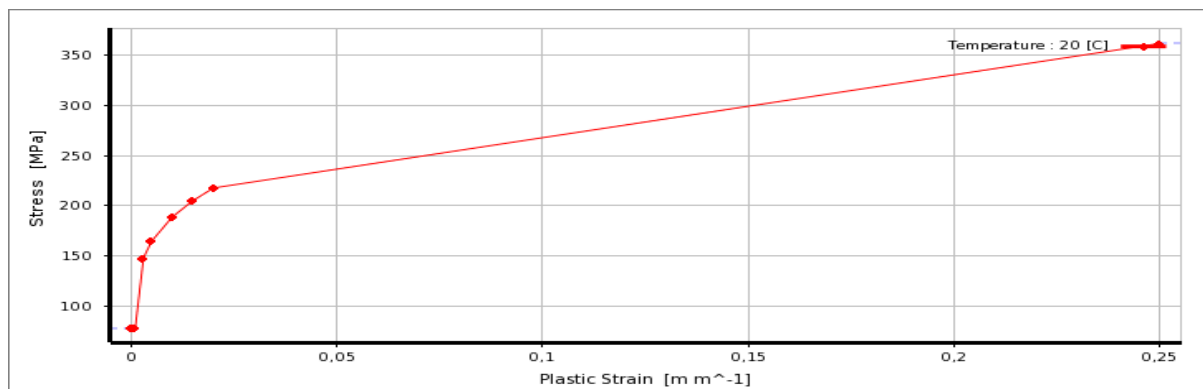


Рисунок 3.2 Мульти- лінійна діаграма розтягнення

Навантаження є тиском на внутрішню поверхню оболонки, включаючи один з її фланців, що викликає не тільки меридіональні, але й напруження розтягу. Навантаження змінюються як за часом, так і за величиною, та задаються в табличному вигляді. Закріплення оболонки приймалося як жорстке зацмелення за контуром оболонки. На рис. 3.3 зображено поверхню навантаження.

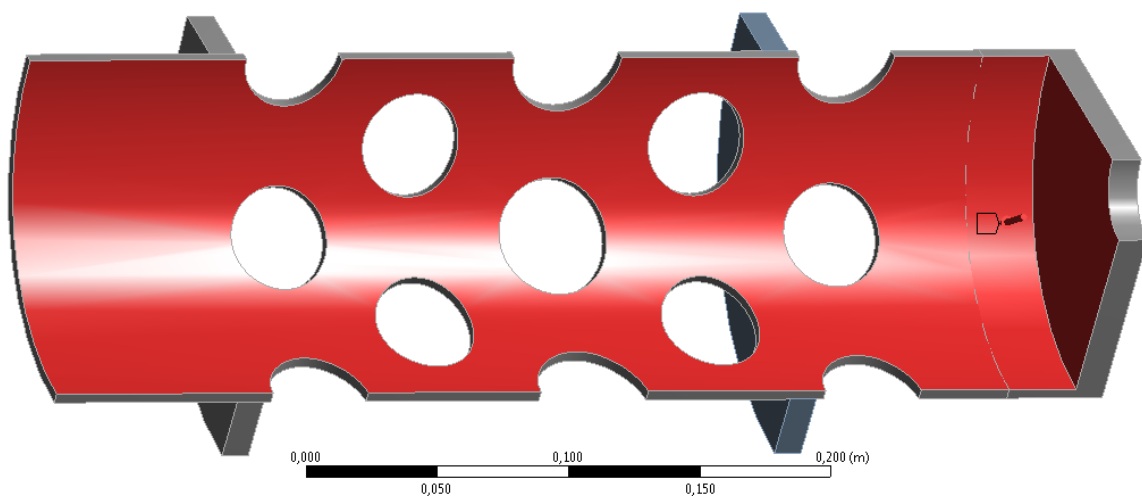


Рисунок 3.3 Поверхня навантаження на оболонку

Розглядалися навантаження, змінні за часом, та досліджувався напружено-деформований стан конструкції з урахуванням пластичних деформацій.

4 Аналіз числових результатів.

Розглянуто напружено-деформований стан перфорованої оболонки з такими геометричними параметрами: діаметр зовнішній 190мм; товщина 4 мм; товщина стінки з потовщеннями в районі фланців 5 мм; довжина оболонки з фланцем 430 мм; довжина моделі без фланця 390 мм; діаметри 1,2,4,5 кільця отворів 40мм; діаметр третього кільця отворів 45 мм; кількість отворів в кільці дорівнює 10, рис. 2.1. Оболонка виготовлена зі сталі 30ХГСА. Фізико-механічні властивості цього матеріалу подані в табл. 4.1.

Вважається що оболонка знаходиться під дією змінного навантаження, яке подається у вигляді таблиці. Схематично зміну навантаження за часом подано на рис. 4.1.

Таблиця 4.1 Властивості матеріалу Сталь 30ХГСА

ρ , кг/м ³	E, ГПа	ν	$\sigma_{0,2}$, МПа	σ_B , МПа	δ , %
7850	213	0,3	834	1059	9

Задача розрахунку полягає у визначенні напружено-деформованого стану конструкції, моменту початку руйнування оболонки, а також процесу руйнування.

Слід врахувати, що при таких високих напруженнях початок розвитку тріщини (початок руйнування конструкції) і момент зрощення тріщин (остаточне руйнування конструкції) практично збігаються в часі. Таким чином, визначення міцності відбувається шляхом визначення максимально допустимих пластичних деформацій. Задачу розв'язано в пружно-пластичному формулюванні.

Результати розрахунків наведені на рис.4.2-4.4.

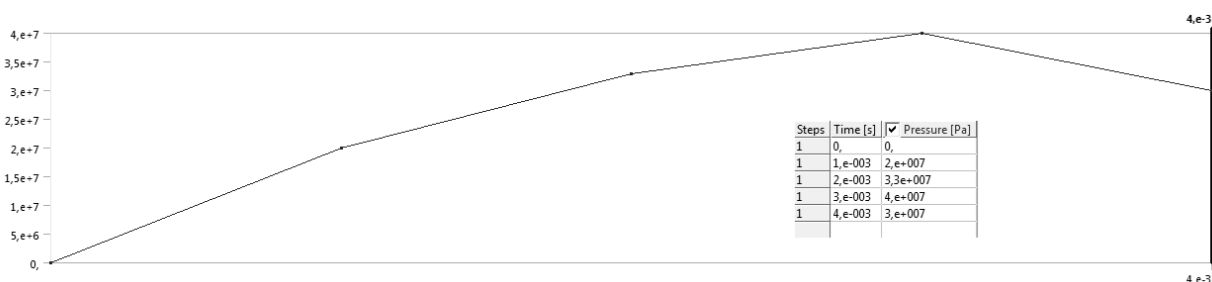
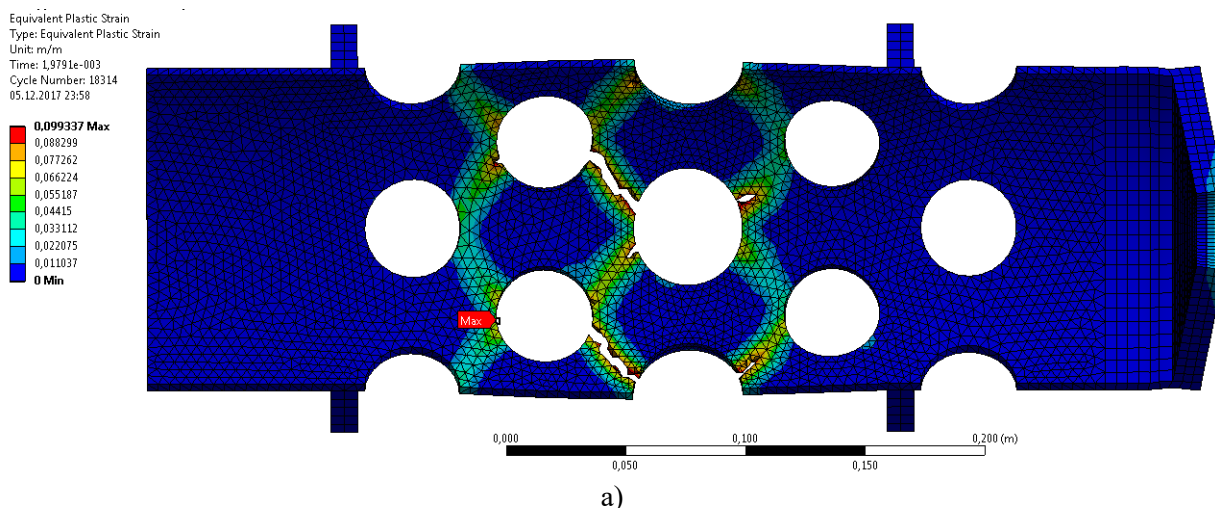
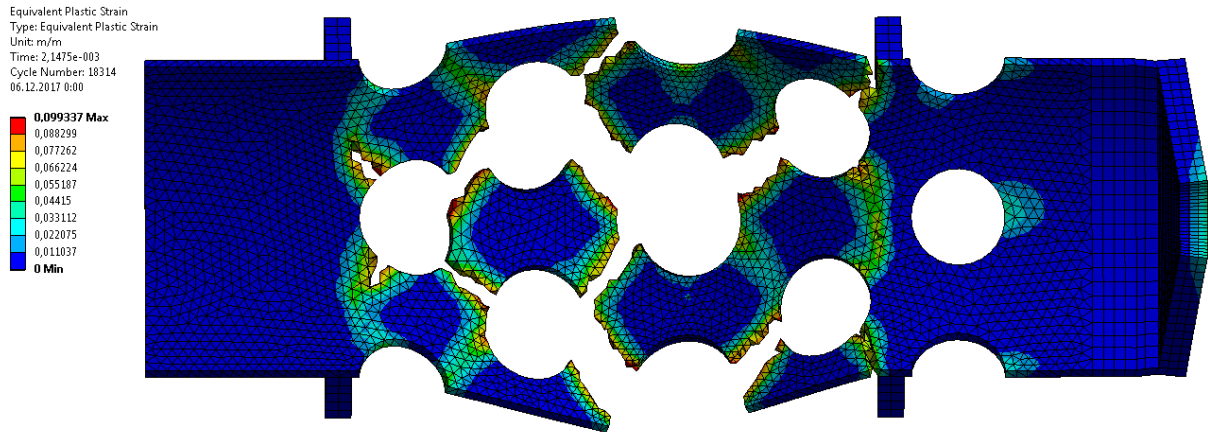


Рисунок 4.1 Зміна навантаження за часом

Зазначимо, що після моменту часу $t = 1.65\text{мс}$ матеріал зазнає значних пластичних деформацій у порівнянні з пружними. Тому, починаючи з цього моменту, було використано рівняння теорії пластичного плинину в формі Купера – Саймондса. Значення сталих в формулі (2.10) прийняті такими $D = 3000$ 1/с, $n = 3$, що характерно для сталей.





б)

Рисунок 4.2 Розвинення пластичних деформацій за часом: а) $t = 1.98$ мс б) $t = 2.15$ мс.

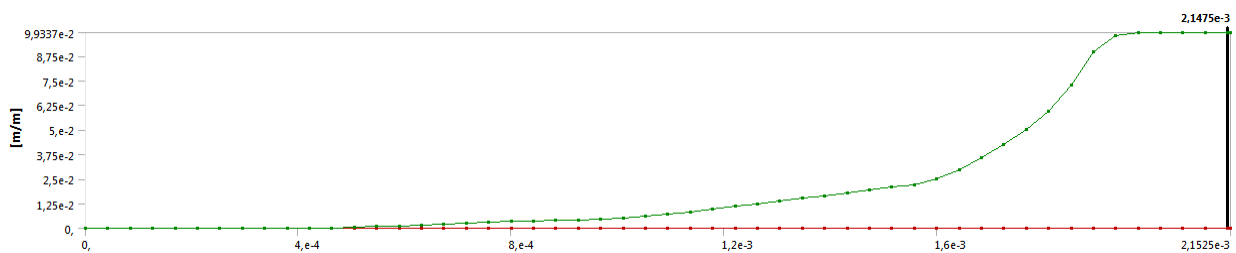


Рисунок 4.3 Залежність максимальних пластичних деформацій від часу навантаження

Аналізуючи результати, наведені на рис. 4.2 – 4.3, можна зробити такі висновки.

Поява і зростання пластичної деформації починається з середини першої мілісекунди розрахунку (рис. 4.1а). Спочатку зростання рівня пластичної деформації є несуттєвим і становить близько 3% за 1.5 мс, потім відбувається різке його прискорення. Таку поведінку, очевидно, викликано відгуком конструкції на процес її навантаження. За період між 1.5 мс і 1.98 мс відбувається різкий стрибок рівня пластичної деформації до критичного. У момент часу 1.98 мс в конструкції починаються початкове руйнування. Зруйновані елементи відразу ж зростаються в наскрізну тріщину (рис. 4.2а), що призводить до повного руйнування конструкції. Первинне руйнування відбувається шляхом зрощення тріщин між 2, 3, 4 кільцями отворів, починаючи з отворів найбільшого діаметра. Незабаром, через декілька мілісекунд частина конструкції між отворів перетворюється в набір осколків різного розміру (рис 4.2б).

Таким чином, конструкція сталеві оболонки з товщиною стінки 4 мм не пройшла віртуального випробування і передчасно зруйнувалася. Збільшення товщини стінки конструкції має надати їй додаткову міцність.

Була проведена серія перевірочних розрахунків для товщини моделі з кроком по товщині 0,2 мм. Результати розрахунку відображені на рис. 4.4.

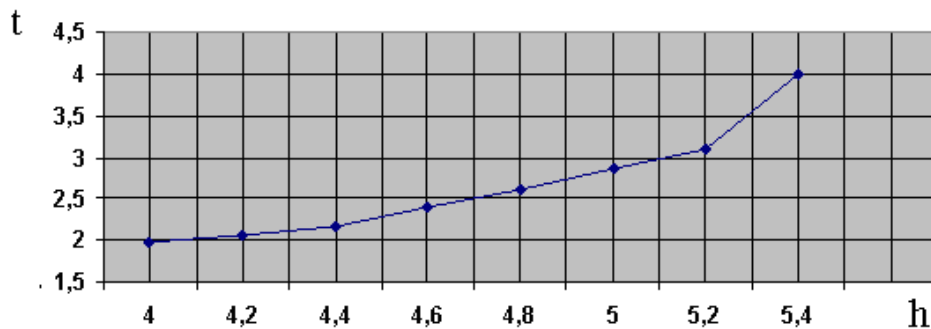


Рисунок 4.3 Залежність часу працездатності конструкції t , мс від товщини її стінки h , мм.

Закінчення серії розрахунків відбувалось при досягненні такої товщини, при якій конструкція витримала без руйнування весь процес навантаження. Першою товщиною оболонки, при якій досягається необхідна міцність, є товщина 5,4мм. Максимальні пластичні деформації, що виникають в конструкції при такій товщині, є відчутними, але не перевищують критичні 10%, що дозволяє конструкції успішно пройти віртуальні випробування і не руйнуватися.

Діаграма розподілу остаточних пластичних деформацій в оболонці подана на рис. 4.4. Графік зміни максимальних пластичних деформацій конструкції в процесі навантаження подано на рис 4.5. Розподіл еквівалентного по Мизесу напруги конструкції в момент максимуму при $t=3,12\text{мс}$ подано на рис. 4.6.

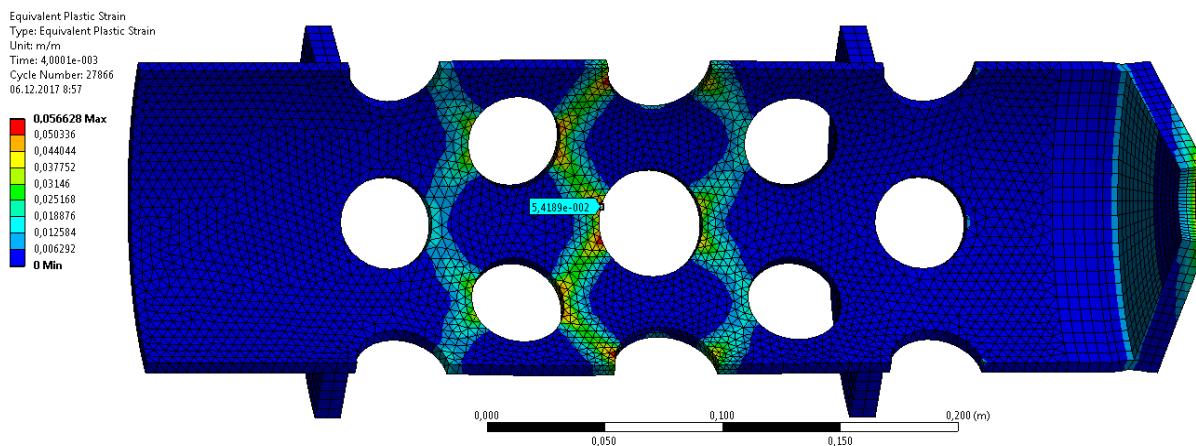


Рисунок 4.4 Розподіл пластичних деформацій конструкції в момент закінчення розрахунку

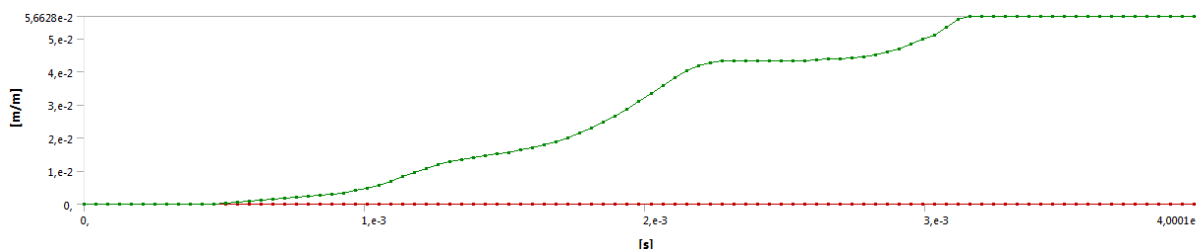


Рисунок 4.5 Графік зміни максимальних пластичних деформацій за часом

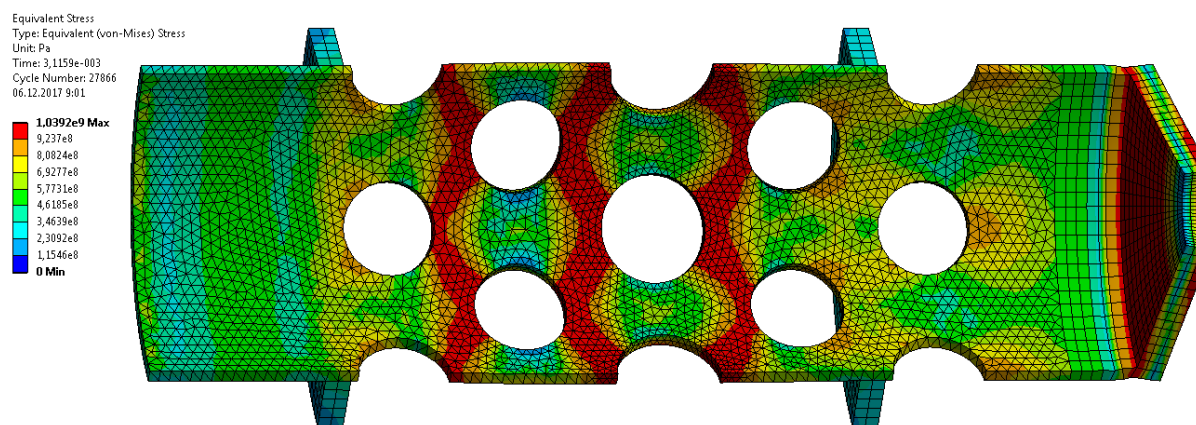


Рисунок 4.6. Розподіл еквівалентного по Мизесу напруги конструкції в момент максимуму при $t=3,12\text{мс}$

Таким чином, була отримана оптимальна товщина конструкції, що дозволяє їй успішно пройти віртуальні випробування і не піддатися руйнуванню. Рівень максимальних пластичних деформацій склав 5,7%, а конструкція витримала весь процес навантаження.

Зазначимо, що під час проведення оптимізаційних розрахунків було виявлено ефект запізнювання відгуку конструкції на її навантаження, що скоріш за все пов'язано з хвильовими процесами в конструкції, а також імпульсним характером навантаження. Описаний ефект в деяких розрахунках приводив до руйнування конструкції, при, здавалося б, достатній товщині. Дана особливість поведінки конструкції могла бути врахована тільки в динамічному розрахунку, який і був проведений.

5. Висновки

Побудовано метод розв'язання задачі визначення руйнівних навантажень на перфоровану оболонку. Розроблено комп'ютерну модель для дослідження, аналізу працездатності та визначення раціональних конструктивних параметрів перфорованих оболонкових систем з різних матеріалів при короткочасних силових впливах. Розроблено комп'ютерний метод моделювання динамічних випробувань, проведення аналізу руйнують навантажень перфорованих оболонкових систем при імпульсних впливах. Досліджено НДС і процес руйнування конструкцій. Визначено час до руйнування і величина руйнівного навантаження. Комп'ютерний аналіз дав можливість знайти мінімальну товщину моделі, що витримує випробування. В подальшому планує проведення оптимізації оболонки, враховуючи геометричні параметри, властивості матеріалів, розташування, форму і радіуси отворів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций / отв. ред. В. Л. Рвачев. Киев, 1988. 288 с. <http://www.pmi.lv/libdb/authors/view/2239>
2. Hudramovych V. S. Contact mechanics of shell structures under local loading. *Int. Appl. Mech.* 2009. V. 45, No 7. P. 708 – 729. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10778-009-0224-5>
3. Ильюшин А. А. Труды в 4-х т. М., 2009. Т. 4. Моделирование динамических процессов в твердых телах и инженерные приложения. 526 с. <https://www.livelib.ru/book/1000815977>
4. Hudramovich V. S., Sirenko V. N., Klimenko D. V., Daniev Ju. F., Hart E. L. Development of the normative framework methodology for justifying the launcher structures resource of launch vehicles. *Strength of Materials*. 2019. Vol. 51, No 3. P. 333 – 340. <https://doi.org/10.33136/stma2020.01.044>
5. Hudramovich V. S., Hart E. L., Strunin K. A. Numerical simulation of behavior of elastic structures with local stiffening. *Kosm. teh. Raket. vooruž.* 2019, (2); 25-34 p. <https://doi.org/10.33136/stma2019.02.025>
6. Hudramovych V. S. Features of nonlinear deformation of shell systems with geometrical imperfections. *Int. Appl. Mech.* 2006. Vol. 42, No 7. P. 3 – 37. <https://doi.org/10.33136/stma2020.01.044>
7. Гудрамович В. С., Скальський В. Р., Селіванов Ю. М. Голографічне та акустикоемісійне діагностування неоднорідних конструкцій і матеріалів / відповід. ред. З. Т. Назарчук. Львів, 2017. 488 с. <http://www.nas.gov.ua/EN/Book/Pages/default.aspx?BookID=0000010420>
8. Гудрамович В. С., Клименко Д. В., Гарт Э. Л. Влияние вырезов на прочность цилиндрических отсеков ракет-носителей при неупругом деформировании материала. *Космична наука і технологія*. 2017. Т. 23, № 6. С. 12 – 20. <https://doi.org/10.15407/knit2017.06.012>
9. Дегтярев К.Г., Гнитько В.И., Тонконоженко А.М. Компьютерное моделирование разрушающей нагрузки на топливный бак. *Вісник Харківського національного університету імені ВН Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»* N 1105, 2014, С.51-59. http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKhIMAM_2014_1105_24_7
10. Трёхмерные задачи математической теории упругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелия, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе. М.: Наука, 1976. 664 с. <https://www.twirpx.com/file/507934>
11. Ильюшин, А. А. Пластичность. Ч. 1. Упруго - пластические деформации / А. А. Ильюшин. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1948. – 376 с. <http://openarchive.nure.ua/handle/document/1342>
12. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості. К.: Вища школа, 2002. - 308 с. <http://www.library.univ.kiev.ua/ukr/elcat/new/detail.php3915952>
13. Cowper G., Symonds P. Strain hardening and strain-rate effects in the impact loading of cantilever beams. Tech. Rep. Brown University: Division of Applied Mathematics, 1957. 28 p. <https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/144762.pdf>
14. J.C.Simo, R.L. Teylor. Consistent tangent operator for rate-independent elastoplasticity. *Computer*

methods in applied mechanics and engineering. Vol.48, pp.101-118, 1985.

[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90070-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90070-2)

15. Degtyarev, K., Glushich, P., Gnitko, V., Strelnikova, E. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells. // *International Journal of Modern Physics and Applications*. Vol. 1, No. 4, pp. 159-168, 2015. DOI: 10.13140/RG.2.1.1857.5209

<https://www.researchgate.net/publication/280728146>

16. Місюра С. Ю., Сметанкіна Н. В., Місюра Є. Ю. Раціональне моделювання кришки гідротурбіни для аналізу міцності. *Вісн. Нац. техн. ун-ту «ХПИ»*. Сер. Динаміка і міцність машин. 2019. № 1. С. 34–39. <http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/44370>

17. Дегтярев К.Г., Стрельникова Е.А., Шелудько Г.А. Компьютерное моделирование лопастей ветроустановок с оптимальными параметрами / *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Мат. моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*, No 19, 2012, С.81-86 <http://mia.univer.kharkov.ua/19/30251.pdf>

18. Medvedovskaya T. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers / T. Medvedovskaya, E. Strelnikova, K. Medvedyeva // *Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART)*. – 2015. – Vol. 1, No 1. – P. 45–50. – DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961

<https://www.researchgate.net/publication/282868308>

19. Еселева Е.В. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью / Е.В. Еселева, В.И. Гнидько, Е.А. Стрельникова // *Пробл. машиностроения*. –2006. Т. 9. – №1, – С.105 - 118. <http://journals.uran.ua/jme/issue/archive>

20. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L., Strelnikova, E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, 17(1), pp.75-87, 2016. <https://www.researchgate.net/publication/301655238>

REFERENCES

1. Mossakovsky V.I., Gudramovich V.S., Makeev E.M. Contact interactions of elements of shell structures / ed. V. L. Rvachev. Kiev, 1988. 288 p. URL: <http://www.pmi.lv/libdb/authors/view/2239>

2. Hudramovych V. S. Contact mechanics of shell structures under local loading. *Int. Appl. Mech.* 2009. V. 45, No 7. P. 708 – 729. URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10778-009-0224-5>

3. Ilyushin A.A. Proc. in 4 volumes. M., 2009. V. 4. Modeling of dynamic processes in solids and engineering applications. 526 p. URL: <https://www.livelib.ru/book/1000815977>

4. Hudramovich V. S., Sirenko V. N., Klimenko D. V., Daniev Ju. F., Hart E. L. Development of the normative framework methodology for justifying the launcher structures resource of launch vehicles. *Strength of Materials*. 2019. Vol. 51, No 3. P. 333 – 340. URL: <https://doi.org/10.33136/stma2020.01.044>

5. Hudramovich V. S., Hart E. L., Strunin K. A. Numerical simulation of behavior of elastic structures with local stiffening. *Kosm. teh. Raket. vooruz.* 2019, (2); 25-34 URL:

<https://doi.org/10.33136/stma2019.02.025>

6. Hudramovych V. S. Features of nonlinear deformation of shell systems with geometrical imperfections. *Int. Appl. Mech.* 2006. Vol. 42, No 7. P. 3 – 37 URL: <https://doi.org/10.33136/stma2020.01.044>

7. Gudramovich V.S., Skalskiy V.R., Selivanov Yu.M. Holographic and acousto-efficient diagnostics of heterogeneous designs and materials / reports. ed. Z. T. Nazarchuk. Lviv URL:

<http://www.nas.gov.ua/EN/Book/Pages/default.aspx?BookID=0000010420>

8. Gudramovich V.S., Klimenko D.V., Gart E.L. Influence of cutouts on the strength of cylindrical compartments of launch vehicles under inelastic deformation of the material. *Space science and technology*. 2017. Vol. 23, No. 6. P. 12 – 20 URL: <https://doi.org/10.15407/knit2017.06.012>

9. Degtyarev K.G., Gnitko V.I., Tonkonozhenko A.M. Computer simulation of the destructive load on the fuel tank. Bulletin of Kharkiv National University for the Name of VN Karazin, series “Mathematical Model. Information technologies. Automated control systems” N 1105, 2014, pp.51-59 URL:

http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKhIMAM_2014_1105_24_7

10. Three-dimensional problems of mathematical theory of elasticity / V.D. Kupradze, T.G. Hegelia, M.O. Bashaileshvili, T.V. Burchuladze - Moscow: Nauka, 1976. - 664 p. URL:

<https://www.twirpx.com/file/507934>

11. Ilyushin, A.A. Plasticity. Part 1. Elastic - plastic deformation / A. A. Ilyushin. - M.; L.: Gostekhizdat, 1948. - 376 p. URL: <http://openarchive.nure.ua/handle/document/1342>

12. Mozharovsky M.S. The theory of springiness, plasticity and increased sensitivity. К.: Vischa school, 2002. - 308 p. URL:
<http://www.library.univ.kiev.ua/ukr/elcat/new/detail.php3915952>
13. Cowper G., Symonds P. Strain hardening and strain-rate effects in the impact loading of cantilever beams. *Tech. Rep. Brown University: Division of Applied Math.*, 1957. 28 p. URL:
<https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/144762.pdf>
14. J.C.Simo, R.L. Teylor. Consistent tangent operator for rate-independent elastoplasticity. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. Vol.48, pp.101-118, 1985. URL:
[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90070-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90070-2)
15. Degtyarev, K., Glushich, P., Gnitko, V., Strelnikova, E. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells. // *International Journal of Modern Physics and Applications*. Vol. 1, No. 4, pp. 159-168, 2015. DOI: 10.13140/RG.2.1.1857.5209 URL:
https://www.researchgate.net/publication/280728146_Numerical_Simulation_of_Free_Liquid-Induced_Vibrations_in_Elastic_Shells
16. Misyura S., Smetankina N., Misyura U. Rational modeling of a hydroturbine cover for strength analysis. *Bulletin of Kharkiv Polytechnic Institute, Dynamics and strength of machines*, no. 1, pp.34 –39, 2019. URL:
<http://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/44370> [in Ukrainian]
17. Degtyarev K. Strelnikova E. Sheludko G. Computer modeling of wind turbine blades with optimal parameters. *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series: Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems*, no. 19, pp.81 – 86, 2012. URL:
<http://mia.univer.kharkov.ua/19/30251.pdf> [in Russian]
18. Medvedovskaya T. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers / T. Medvedovskaya, E. Strelnikova, K. Medvedyeva // *Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART)*. 2015. Vol. 1, No 1. – P. 45–50. – DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961 URL:
https://www.researchgate.net/publication/282868308_Free_Hydroelastic_Vibrations_of_Hydroturbine_Head
19. Eseleva E.V., Gnitko V.I., Strelnikova E.A. Natural vibrations of pressure vessels when interacting with liquid. *Problems of Mechanical Engineering*, vol. 9, no 1, pp.105 – 118, 2006.URL:
<http://journals.uran.ua/jme/issue/archive> [in Ukrainian]
20. Gnitko, V., Naumenko, V., Rozova, L., Strelnikova, E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, 17(1), pp.75-87, 2016. <https://www.researchgate.net/publication/301655238>