

УДК 517.95

## Особенности построения семейства атомарных радиальных базисных функций $P_{\text{lor},a}(x_1, x_2)$

В.М. Колодяжный, В.С. Селищев, О.Ю. Лисина

- Колодяжный Владимир Максимович** д. ф.-м. н., профессор;  
Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, ул. Ярослава Мудрого 25, г. Харьков, 61002, Украина  
e-mail: [vladmax1949@ukr.net](mailto:vladmax1949@ukr.net)  
<https://orcid.org/0000-0001-0000-0000>
- Селищев Владимир Сергеевич** ст. преподаватель;  
Национальный аэрокосмический университет имени Н. Е. Жуковского «ХАИ», ул. Чкалова 27, г. Харьков, 61070, Украина  
e-mail: [sel\\_vol@ukr.net](mailto:sel_vol@ukr.net)  
<https://orcid.org/0000-0001-6537-7763>
- Лисина Ольга Юлиевна** к. ф.-м. н., доцент;  
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы 4, г. Харьков, 61022, Украина  
e-mail: [lisina\\_korovina@ukr.net](mailto:lisina_korovina@ukr.net)  
<https://orcid.org/0000-0001-0000-0000>

Представлены результаты унифицированных алгоритмов вычисления атомарных (финитных) радиальных базисных функций семейства  $P_{\text{lor},a}(x_1, x_2)$ , которые являются бесконечно дифференцируемыми с конечным носителем в виде диска, решениями функционально-дифференциальных уравнений специального вида с двумя параметрами –  $r$  и  $a$ . Функции  $P_{\text{lor},a}(x_1, x_2)$  используются при реализации бессеточных (со свободной сеткой) методов (в конкретном случае – метод коллокации) решения 2D-краевых задач математической физики.

**Ключевые слова:** функции с компактным носителем, финитные функции, атомарные функции, методы решения краевых задач со свободной сеткой (mesh-free), атомарные функции многих переменных, базисные функции.

## Особливості побудови сімейства атомарних радіальних базисних функцій $P_{\text{lor},a}(x_1, x_2)$

- Колодяжний Володимир Максимович** д. ф.-м. н., професор;  
Харківський національний автомобільно-дорожній університет, вул. Ярослава Мудрого 25, м. Харків, 61002, Україна  
e-mail: [vladmax1949@ukr.net](mailto:vladmax1949@ukr.net)  
<https://orcid.org/0000-0001-0000-0000>
- Селищев Володимир Сергійович** ст. викладач;  
Національний аерокосмічний університет імені М. Е. Жуковського «ХАІ», вул. Чкалова 27, м. Харків, 61070, Україна  
e-mail: [sel\\_vol@ukr.net](mailto:sel_vol@ukr.net)  
<https://orcid.org/0000-0001-6537-7763>
- Лісіна Ольга Юліївна** к. ф.-м. н., доцент;  
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна  
e-mail: [lisina\\_korovina@ukr.net](mailto:lisina_korovina@ukr.net)  
<https://orcid.org/0000-0001-0000-0000>

У багатьох методах вирішення крайових проблем за допомогою довільної сітки, таких як SDI (scattered data interpolation) та SPH (smoothed particle hydrodynamics), задля поліпшення точності розрахунків використовуються сімейства атомарних радіальних базисних функцій, що залежать від параметрів. Функції такого роду мають загальну назву «функції форми». При використанні у якості таких функцій поліномів або поліноміальних сплайнів вони мають назву

«базисні функції». Термін «радіальна» означає, що носієм функції є диск або шар. Термін «атомарна» означає, що носій функції обмежений, тобто функція є фінітною. У більшості випадків у англомовних публікаціях застосовують термін «фінітна». У статті наводиться алгоритм побудови такої функції, що є рішенням функціонально-диференційного рівняння

$$\Delta u(x_1, x_2) = \lambda \int_{\partial\Omega} u[a(x_1 - \xi_1), a(x_2 - \xi_2)] d\omega + \mu u(ax_1, ax_2)$$

де  $\partial\Omega$  – коло радіуса  $r$ :  $\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2$ , а  $a > 1$ . Породжена цим рівнянням функція  $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$  має два параметри:  $r$  та  $a$ . Варіювання цими параметрами дозволяє зменшити похибку у розрахунках крайової задачі Пуассона у кілька разів. У статті доказується теорема про існування такої однозначної функції. Доказ теореми дозволяє побудувати одновимірне перетворення Фур'є цієї функції у вигляді  $Pl\tilde{p}_{a,r}(l) = \prod_{h=0}^{\infty} K_2[z(r, l, a, h)]$ , де

$$K_2[z(r, l, a, h)] = \frac{4 \cdot \{1 - J_0[z(r, l, a, h)]\}}{[z(r, l, a, h)]^2}$$

наближення Тейлора (при  $z \in [0; 8]$ ), а при  $z > 8$  – за допомогою асимптотичного наближення Ганкеля функції  $J_0(z)$ . При цьому у колі точки  $z = 8$  було виявлено досить велику похибку. Тому обчислення функції  $K_2(z)$  у діапазоні  $z \in [5, 288; 17, 004]$  проводилося за допомогою наближення Чебишова цієї функції у діапазоні  $z \in [4, 6; 17, 2]$ . Коефіцієнти Чебишова  $A_k$  (розраховувалися у системі Maple 18 з точністю 26 десяткових цифр) та діапазон було обрано за допомогою експерименту, ціллю якого було мінімізувати загальну похибку обчислення функції  $Pl\tilde{p}_{a,r}(l)$ . Завдяки використанню наближення Чебишова одержана функція  $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$  має більш ніж у два рази меншу похибку, ніж за обчисленням за попереднім алгоритмом. Довільне значення функції  $Plop_{a,r}(l)$  обраховується за допомогою шеститочкової схеми Ейткена, яку можна вважати (деякою мірою) згладжувальним фільтром. Застосування шеститочкової схеми Ейткена вносить похибку, яка дорівнює 6% від загальної похибки обчислення функції  $Plop_{a,r}(l)$ , але допомагає значно зекономити час при формуванні АРБФ при вирішенні крайових проблем за допомогою методу колокації.

**Ключові слова:** функції з компактним носієм, атомарні функції, алгоритми обчислення функцій з компактним носієм, методи рішення крайових проблем з довільною сіткою (mesh-free), методи вирішення крайових проблем, атомарні функції багатьох змінних.

## Some Features of the construction of a family of atomic radial basis functions $Plop_{r,a}(x_1, x_2)$

**Kolodyazhny  
Vladimir**

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor;  
Kharkiv National Automobile and Highway University,  
st. Yaroslava Mudrogo 25, Kharkiv, 61002, Ukraine  
e-mail: [vladmax1949@ukr.net](mailto:vladmax1949@ukr.net)  
<https://orcid.org/0000-0001-0000-0000>*

**Selischev  
Vladimir**

*Senior Lecturer;  
National Aerospace University M.E. Zhukovsky "KHAI",  
street Chkalova 27, Kharkiv, 61070, Ukraine  
e-mail: [sel\\_vol@ukr.net](mailto:sel_vol@ukr.net);  
<https://orcid.org/0000-0001-6537-7763>*

**Lisina  
Olga**

*PhD of Physical and Mathematical Sciences, docent;  
V.N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Square 4, Kharkiv, 61022,  
Ukraine  
e-mail: [lisina\\_korovina@ukr.net](mailto:lisina_korovina@ukr.net);  
<https://orcid.org/0000-0001-0000-0000>*

A lot of methods for solving boundary value problems with the help of arbitrary grids, such as SDI (scattered data interpolation) and SPH (smoothed particle hydrodynamics), use families of atomic radial basis functions that depend on parameters to improve the accuracy of calculations. Those functions are commonly called "shape functions". When polynomials or polynomial splines are used as such functions, they are called "basis functions". The term "radial" means that the carrier of the function is a disk or a layer. The term "atomic" means that the support of the function is limited, i.e. the function is finite. The article presents an algorithm for constructing such a function, which is the solution of the functional-differential equation

$$\Delta u(x_1, x_2) = \lambda \iint_{\partial\Omega} u[a(x_1 - \xi_1), a(x_2 - \xi_2)] d\omega + \mu u(ax_1, ax_2)$$

where  $\partial\Omega$  is the circle of radius  $r$ :  $\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2$ , and  $a > 1$ . The function generated by this equation  $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$  has two parameters:  $r$  and  $a$ . Variation of these parameters allows reducing the error in the calculations of the Poisson boundary value problem by several times. The theorem of the existence of such an unambiguous function is proved in the article. The proof of the theorem allows us to construct one-dimensional Fourier transform of this function in the form  $Pl\tilde{p}_{a,r}(l) = \prod_{h=0}^{\infty} K_2[z(r, l, a, h)]$ , where  $K_2[z(r, l, a, h)] = \frac{4 \cdot \{1 - J_0[z(r, l, a, h)]\}}{[z(r, l, a, h)]^2}$ . Previously, function  $K_2(z)$  has been calculated by using its Taylor approximation at  $z \in [0; 8]$ , and by using the asymptotic Hankel approximation of the function  $J_0(z)$  at  $z > 8$ . Thus in a circle of a point  $z = 8$  a fairly large error was found. Therefore, the calculation of the function  $K_2(z)$  in the range  $z \in [5, 288; 17, 004]$  has been carried out by Chebyshev approximation of this function in the range  $z \in [4, 6; 17, 2]$ . Chebyshev coefficients  $A_k$  (calculated in the Maple 18 system with an accuracy of 26 decimal digits) and the range have been chosen by the experiment aimed to minimize the overall error in calculating the function  $Pl\tilde{p}_{a,r}(l)$ . Due to using the Chebyshev approximation, the obtained function  $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$  has more than half as many errors as calculated by the previous algorithm. Arbitrary value of the function  $Plop_{a,r}(l)$  is calculated by using a six-point Aitken scheme, which can be considered as a smoothing filter. The use of Aitken's six-point scheme introduces an error equal to 6% of the total function calculation error  $Plop_{a,r}(l)$ , but helps to save a lot of time in the formation of ARBF in solving boundary value problems using the method of collocation.

**Keywords:** functions with a compact support, atomic functions, algorithms for calculating functions with a compact support, shape functions, methods for solving boundary value problems with an arbitrary grid (mesh-free), methods of solving boundary value problems, atomic functions of many variables.

## 1 Вступление

Практическое применение атомарных радиальных базисных функций (АРБФ) многих переменных [1, 2] при реализации методов решения краевых задач математической физики со свободной сеткой вынудило авторов унифицировать алгоритмы вычисления указанных функций. Необходимость предлагаемого подхода связана с краевой проблемой (скачок решения на границе области) и некоторой нестабильности решения внутри области. Для улучшения качества приближенного решения краевой задачи обычно используются семейства радиальных базисных функций, зависящих от параметров. В частности, при использовании мультиквадратической функции вида  $\sqrt{1 + \|x - x_j\|^2 / \alpha_j^2}$ , применяемой в методах SDI (scattered data interpolation) и SPH (smoothed particle hydrodynamics), при решении задач гидродинамики [1, 2], таким параметрами являются величины  $\alpha_j$ . При применении АРБФ варьируемыми параметрами могут быть коэффициент  $\alpha$  и радиус  $r$ , которые присутствуют в порождающей функцию  $Plop(x_1, x_2)$  функционально-дифференциальном уравнении [3]

$$\Delta u(x_1, x_2) = \lambda \iint_{\partial\Omega} u[a(x_1 - \xi_1), a(x_2 - \xi_2)] d\omega + \mu u(ax_1, ax_2), \quad (1)$$

где  $\partial\Omega$  – окружность радиуса  $r$ :  $\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2$ , а параметр  $a \geq 2$ . Наличие этих параметров позволяет обозначать данную функцию  $Plop(x_1, x_2)$  в виде  $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$ .

## 2. Построение АРБФ $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$

Рассмотрим процедуру построения функции  $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$ , которая определяется следующей теоремой.

**Теорема.** Для уравнения (1) существует и единственно бесконечно дифференцируемое решение с компактным носителем в виде круга радиуса  $R = \frac{ra}{a-1}$  нормированное условием

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Plop_{a,r}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$  только при следующих значениях коэффициентов:  
 $\mu = -2\pi \cdot r \cdot \lambda$  и  $\lambda = \frac{2 \cdot a^2}{\pi \cdot r^3}$ ; АРБФ  $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$  является инвариантной относительно операции вращения:

$$Plop_{a,r}(x_1, x_2) \equiv f\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right); \quad (2)$$

преобразование Фурье функции  $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$  имеет вид

$$Pl\tilde{o}p_{a,r}(t_1, t_2) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{4 \cdot \left[1 - J_0\left(r \cdot a^{-h} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)\right]}{\left(r \cdot a^{-h} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)^2} \quad (3)$$

и является быстро убывающей при  $t_1^2 + t_2^2 \rightarrow \infty$  функцией экспоненциального типа 1; функция  $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$  в квадрате  $\left[-\frac{ra}{a-1}, \frac{ra}{a-1}\right] \times \left[-\frac{ra}{a-1}, \frac{ra}{a-1}\right]$ , представляется в виде ряда Фурье [3]:

$$Plop_{a,r}(x_1, x_2) = \left(\frac{a-1}{a}\right)^2 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} U_{pq} \cos\left(\frac{a-1}{a} p\pi x_1\right) \cos\left(\frac{a-1}{a} q\pi x_2\right), \quad (4)$$

где коэффициенты Фурье имеют вид  $U_{00} = \frac{1}{4}$ ;  $U_{p0} = \frac{1}{2} Pl\tilde{o}p_{a,r}\left(\frac{(a-1)}{a} \pi p, 0\right)$ ;

$$U_{0q} = \frac{1}{2} Pl\tilde{o}p_{a,r}\left(0, \frac{(a-1)}{a} \pi q\right); U_{pq} = Pl\tilde{o}p_{a,r}\left(\frac{(a-1)}{a} p\pi, \frac{(a-1)}{a} q\pi\right), p, q = 1, 2, \dots$$

*Доказательство.* Будем обозначать через  $U(t_1, t_2)$  двойное преобразование Фурье функции  $u(x_1, x_2)$ :  $U(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2) e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dx_1 dx_2$ . Применим к функционально-дифференциальному уравнению (1) двойное преобразование Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta u(x_1, x_2) e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lambda \int_{\partial\Omega} u[a(x_1 - \xi_1), a(x_2 - \xi_2)] d\omega + \mu u(ax_1, ax_2) \right\} e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dx_1 dx_2. \quad (5)$$

В соответствии со следствием из теоремы 5.4 из [5] имеем, что  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} f(x) \cdot e^{-i\xi x} dx = (i\xi)^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\xi x} dx = -\xi^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\xi x} dx$ .

Исходя из этого, для данного двумерного случая получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta u(x_1, x_2) e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dx_1 dx_2 = -\left(t_1^2 + t_2^2\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2) e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dx_1 dx_2 = -\left(t_1^2 + t_2^2\right) \cdot U(t_1, t_2).$$

Введение вспомогательных переменных  $ax_1 - a\xi_1 = \eta_1$ ,  $ax_2 - a\xi_2 = \eta_2$  позволяет переписать уравнение (5) в виде:

$$-\left(t_1^2 + t_2^2\right) \cdot U(t_1, t_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \oint_{\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2} \lambda u \left( \frac{a\eta_1}{a}, \frac{a\eta_2}{a} \right) e^{-\frac{1}{a}(t_1\eta_1 + t_2\eta_2)} e^{-i(t_1\xi_1 + t_2\xi_2)} d\omega d\frac{\eta_1}{a} d\frac{\eta_2}{a} + \frac{\mu}{a^2} U \left( \frac{t_1}{a}, \frac{t_2}{a} \right).$$

Изменив в правой части уравнения последовательность выполнения операций преобразования Фурье и интегрирования по контуру, получим [4, 7]:

$$-(t_1^2 + t_2^2) \cdot \tilde{u}(t_1, t_2) = \frac{1}{a^2} \tilde{u} \left( \frac{t_1}{a}, \frac{t_2}{a} \right) \cdot \left[ \lambda \oint_{\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2} e^{-i(t_1\xi_1 + t_2\xi_2)} d\omega + \mu \right]. \quad (6)$$

Интегрирование вдоль окружности  $\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2$  дает возможность представить интеграл в правой части соотношения (6) в следующем виде [6]:

$$\begin{aligned} \oint_{\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2} e^{-i(t_1\xi_1 + t_2\xi_2)} d\omega &= \begin{cases} \xi_1 = r \cos(\varphi); \\ \frac{t_1}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} = \sin(\theta); \\ \xi_2 = r \sin(\varphi); \\ \frac{t_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} = \cos(\theta); \\ d\omega = r d\varphi \end{cases} = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \cos \left[ \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \cdot \left( \frac{t_1}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \cdot r \cos(\varphi) + \frac{t_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \cdot r \sin(\varphi) \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + i \sin \left[ \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \cdot \left( \frac{t_1}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \cdot r \cos(\varphi) + \frac{t_2}{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}} \cdot r \sin(\varphi) \right) \right] \right\} r d\varphi = \\ &= r \int_{-\pi+\theta}^{\pi+\theta} \left\{ \cos \left[ r \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \sin(\varphi + \theta) \right] + i \cdot \sin \left[ r \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \sin(\varphi + \theta) \right] \right\} d(\varphi + \theta) = \\ &= r \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \cos \left[ r \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \sin(\varphi) \right] + i \cdot \sin \left[ r \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \sin(\varphi) \right] \right\} d\varphi = \\ &= 2r \int_0^{\pi} \left\{ \cos \left[ r \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \sin(\varphi) \right] + i \cdot \sin \left[ r \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \sin(\varphi) \right] \right\} d\varphi = \\ &= 2\pi \cdot r \cdot \left[ J_0 \left( r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \right) + i \cdot 0 \right] = 2\pi \cdot r \cdot J_0 \left( r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \right). \end{aligned}$$

То есть,  $\oint_{\xi_1^2 + \xi_2^2 = r^2} e^{-i(t_1\xi_1 + t_2\xi_2)} d\omega = 2\pi r \cdot J_0 \left( r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \right)$ , где  $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi) d\varphi$  – функция Бесселя с нулевым индексом.

Таким образом, уравнение (6) может быть записано в следующем виде:

$$\tilde{u}(t_1, t_2) = -\frac{1}{a^2} \tilde{u} \left( \frac{t_1}{a}, \frac{t_2}{a} \right) \frac{\lambda \cdot 2\pi r \cdot J_0 \left( r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \right) + \mu}{(t_1^2 + t_2^2)}. \quad (7)$$

Выбираем коэффициент  $\mu = -2\pi \cdot r \cdot \lambda$ , что обусловлено необходимостью иметь дробь  $\frac{\lambda \cdot 2\pi \cdot r \cdot J_0 \left( r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \right) + \mu}{(t_1^2 + t_2^2)}$  целой функцией (при  $t_1^2 + t_2^2 \rightarrow 0$ ) [5].

В результате уравнение (7) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}\tilde{u}(t_1, t_2) &= \tilde{u}\left(\frac{t_1}{a}, \frac{t_2}{a}\right) \frac{2\pi \cdot r \cdot \lambda \cdot \left[1 - J_0\left(r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)\right]}{a^2 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left(r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)^2} = \\ &= \tilde{u}\left(\frac{t_1}{a}, \frac{t_2}{a}\right) \frac{2\pi r^3 \cdot \lambda \cdot \left[1 - J_0\left(r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)\right]}{\left(r \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)^2}\end{aligned}\quad (8)$$

Уравнение (8), согласно [3, 5, 8], может быть представлено в виде бесконечного произведения:

$$\tilde{u}(t_1, t_2) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{\lambda \cdot \frac{2\pi r^3}{a^2} \cdot \left[1 - J_0\left(r \cdot a^{-h} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)\right]}{\left(r \cdot a^{-h} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)^2}.\quad (9)$$

Сходимость произведения (9) гарантируется выбором коэффициента  $\lambda = \frac{2a^2}{\pi r^3}$ . Данное значение  $\lambda$  отвечает требованию, что выражение по знаменателю бесконечного произведения (9), должно стремиться к единице при  $t_1^2 + t_2^2 \rightarrow 0$  [5].

После такого выбора  $\lambda$  выражение (9) преобразуется к виду, который является представлением обратного преобразования Фурье АРБФ  $Pl\tilde{op}_{a,r}(x_1, x_2)$ :

$$Pl\tilde{op}_{a,r}(t_1, t_2) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{4 \cdot \left[1 - J_0\left(r \cdot a^{-h} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)\right]}{\left(r \cdot a^{-h} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)^2}.\quad (10)$$

Если  $\tilde{u}(t_1, t_2)$  рассматривать как функцию комплексных переменных, то она будет целой функцией экспоненциального типа 1.

Из теоремы Винера-Пэли [5, 6] вытекает, что обратное преобразование Фурье функции  $\tilde{u}(t_1, t_2)$ :

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{h=0}^{\infty} \frac{4 \cdot \left[1 - J_0\left(r \cdot a^{-h} \cdot \sqrt{t_1^2 + t_2^2}\right)\right]}{r^2 \cdot a^{-2h} \cdot (t_1^2 + t_2^2)} e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dt_1 dt_2,$$

будет функцией класса  $C^\infty$  с компактным носителем в виде круга с радиусом  $R = \frac{ra}{a-1}$ , вписанном в квадрат  $[-R, R] \times [-R, R]$ .

Искомая функция  $u(x_1, x_2)$  будет четной относительно каждого своего переменного. Её представление в виде двойного ряда Фурье в действительной форме в квадрате может быть вычислено по формуле [2]:

$$u(x_1, x_2) = \left(\frac{a-1}{a}\right)^2 \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} U_{pq} \cos\left(\frac{a-1}{a} \cdot p\pi x_1\right) \cdot \cos\left(\frac{a-1}{a} \cdot q\pi x_2\right),\quad (11)$$

коэффициенты Фурье которого имеют следующей вид:

$$\begin{aligned}
 U_{00} &= 1/4; \quad U_{p0} = \frac{1}{2} \int_{-a/(a-1)}^{a/(a-1)} u(\xi_1, 0) \cos \left[ \frac{(a-1)}{a} \cdot p\pi\xi_1 \right] d\xi_1; \\
 U_{0q} &= \frac{1}{2} \int_{-a/(a-1)}^{a/(a-1)} u(0, \xi_2) \cos \left[ \frac{(a-1)}{a} \cdot q\pi\xi_2 \right] d\xi_2; \\
 U_{pq} &= \int_{-a/(a-1)}^{a/(a-1)} \int_{-\sqrt{a^2/(a-1)^2 - \xi_1^2}}^{\sqrt{a^2/(a-1)^2 - \xi_1^2}} u(\xi_1, \xi_2) \cos \left[ \frac{(a-1)}{a} \cdot p\pi\xi_1 \right] \cos \left[ \frac{(a-1)}{a} \cdot q\pi\xi_2 \right] d\xi_1 d\xi_2. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Так как функция  $u(x_1, x_2)$  является финитной относительно переменных  $x_1$  и  $x_2$ , это позволяет заменить интегралы в (12) на несобственные. А так как функция  $u(x_1, x_2)$  является четной относительно переменных  $x_1$  и  $x_2$ , можно заменить тригонометрические функции  $\cos \frac{(a-1)p\pi\xi}{a}$  и  $\cos \frac{(a-1)q\pi\eta}{a}$  на экспоненциальные  $\exp \left[ -i \frac{(a-1)p\pi\xi}{a} \right]$  и  $\exp \left[ -i \frac{(a-1)q\pi\eta}{a} \right]$ . В результате получаем следующие представления для коэффициентов Фурье ряда (12):

$$\begin{aligned}
 U_{00} &= 1/4; \quad U_{p0} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi_1, 0) \exp \left[ -i \frac{(a-1)p\pi\xi_1}{a} \right] d\xi_1 = \frac{1}{2} \tilde{u} \left[ \frac{(a-1)p\pi}{a}, 0 \right]; \\
 U_{0q} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(0, \xi_2) \exp \left[ -i \frac{(a-1)q\pi\xi_2}{a} \right] d\xi_2 = \frac{1}{2} \tilde{u} \left( 0, \frac{(a-1)q\pi}{a} \right); \\
 U_{pq} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi_1, \xi_2) \exp \left[ -i \frac{(a-1)p\pi\xi_1}{a} \right] \exp \left[ -i \frac{(a-1)q\pi\xi_2}{a} \right] d\xi_1 d\xi_2 = \\
 &= \tilde{u} \left[ \frac{(a-1)p\pi}{a}, \frac{(a-1)q\pi}{a} \right], \quad p, q = 1, 2, \dots \quad (13)
 \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что приведенное в формулах (11) и (12) решение  $u(x_1, x_2)$  функционально-дифференциального уравнения (1), при заданном значении параметра  $a$ , является искомой АРБФ  $Plor_{a,r}(x_1, x_2)$ .

### 3. Оценка точности вычисления обратного преобразования Фурье $Pl\tilde{op}_{a,r}(t_1, t_2)$ АРБФ $Plor_{a,r}(x_1, x_2)$

Отметим, что функция  $Pl\tilde{op}_{a,r}(t_1, t_2)$  (см. представление (10)) также, как и функция  $Plor(x_1, x_2)$  [3, 8] инвариантна относительно операции вращения (2), то при выборе  $l = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$

$$\text{имеем } Pl\tilde{op}_{a,r}(t_1, t_2) = Pl\tilde{op}_{a,r}(l) = \prod_{h=0}^{\infty} \frac{4 \cdot \left[ 1 - J_0 \left( \frac{r \cdot l}{a^h} \right) \right]}{\left( \frac{r \cdot l}{a^h} \right)^2}.$$

Введем вспомогательную функцию

$$z(r, l, a, h) = \frac{r \cdot l}{a^h}. \quad (14)$$

Тогда функцию  $Pl\tilde{op}_{a,r}(l)$  можно представить в виде

$$Pl\tilde{op}_{a,r}(l) = \prod_{h=0}^{\infty} K_2 \left[ z(r, l, a, h) \right], \quad (15)$$

где

$$K_2[z(r,l,a,h)] = \frac{4 \cdot \{1 - J_0[z(r,l,a,h)]\}}{[z(r,l,a,h)]^2}. \quad (16)$$

Оценим поведение функции  $K_2[z(r,l,a,h)]$  при  $h \rightarrow \infty$ . При этом очевидно, что для любых аргументов  $r, l$  и  $a > 1$   $z(r,l,a,h) = \frac{r \cdot l}{a^h} \rightarrow 0$ . В окрестности нуля функцию Бесселя  $J_0(z)$  можно

представить в виде разложения в ряд Тейлора,  $J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z/2)^{2n}}{(n!)^2}$  [7, 10].

Ряд Тейлора функции  $K_2[z(r,l,a,h)]$  в окрестности нуля получает представление:

$$K_2[z(r,l,a,h)] = 1 - \frac{z^2(r,l,a,h)}{2^2 \cdot (2!)^2} + \frac{z^4(r,l,a,h)}{2^4 \cdot (3!)^2} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}(r,l,a,h)}{2^{2n-2} \cdot (n!)^2} + \dots \quad (17)$$

График функции  $K_2(z)$  в диапазоне изменения величины  $z, z \in [0; 8]$  в декартовой системе координат приведен на рис. 1.

Оценим погрешность метода вычисления функции  $K_2(z)$  по ее разложению в ряд Тейлора в окрестности нуля (в диапазоне значений величины  $z, z \in [0; 8]$ ). Известно, что минимальная относительная погрешность вычисления (округления) при помощи чисел с плавающей запятой равна половине младшего разряда мантиссы числа. Для 80-разрядных чисел с плавающей запятой длина мантиссы равна 64 разряда и, соответственно, минимальная относительная погрешность вычислений будет равна  $\varepsilon_0 = 2^{-64} \approx 5,42 \cdot 10^{-20}$  [5]. Минимальную абсолютную погрешность при

значениях  $z, z \in [0; 8]$  вычисляем как  $\varepsilon_0 \cdot \left[ K_2(z) + \max_n \frac{z^{2n}(r,l,a,h)}{2^{2n-2} \cdot (n!)^2} \right]$ , т.е. сумма величин

функции и максимального абсолютного значения вычисляемых членов ряда Тейлора данной функции, умноженная на  $\varepsilon_0$ . График минимальной абсолютной погрешности вычисления функции  $K_2(z)$  с помощью ее ряда Тейлора в окрестности точки 0 приведен на рис. 2. Обозначим эту функцию через  $MErK(z)$  и назовем ее методической погрешностью вычислений функции  $K_2(z)$ , т.к. изменения функции  $K_2(z)$ , вызванные значениями членов ряда, по абсолютной величине меньших  $MErK(z)$  являются недостоверными. Другими словами, процесс вычисления

ряда (6) можно прекратить при выполнении неравенства  $MErK(z) > \frac{z^{2n}}{2^{2n-2} \cdot (n!)^2}$ .

Оценим абсолютную погрешность вычисления функции  $K_2(z)$  в диапазоне изменения величины  $z, z \in [0; 8]$ . Алгоритм, составленный для оценки абсолютной погрешности функции  $K_2(z)$  с помощью ее ряда Тейлора, привел к результатам, показанным на рис. 2.

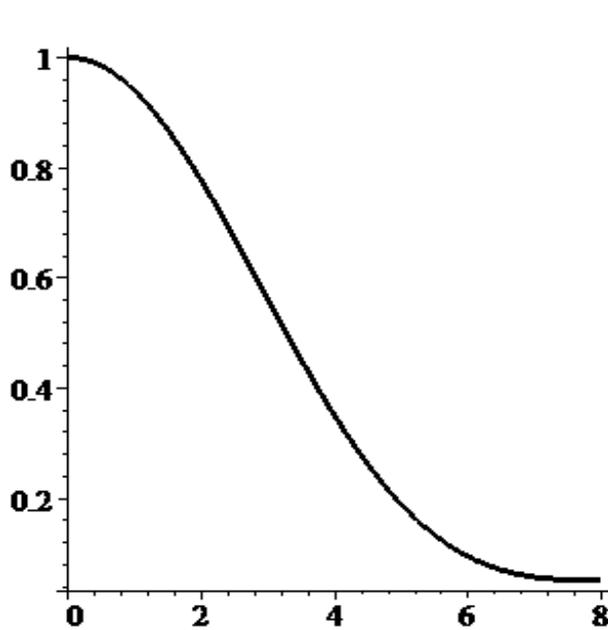


Рисунок 1 – График функции  $K_2(z)$  в декартовой системе координат при  $z \in [0; 8]$

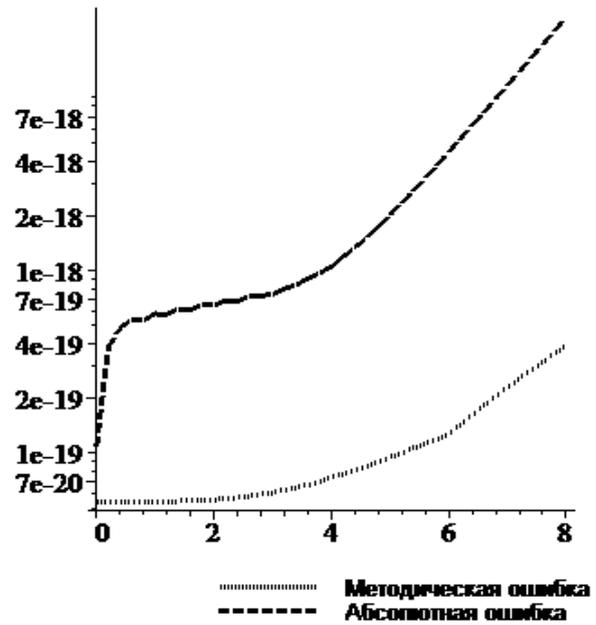


Рисунок 2 – Методическая и абсолютная погрешности вычисления функции  $K_2(z)$  с помощью разложения Тейлора при  $z \in [0; 8]$

Еще один алгоритм вычисления функции  $K_2(z)$  применяется при больших значениях аргумента. Следуя представлению (16), видим, что можно записать

$$K_2(z) = \frac{4 \cdot [1 - J_0(z)]}{z^2}. \quad (18)$$

Обычно принято рассчитывать значения функции Бесселя  $J_0(z)$  при значениях аргумента больших 8 с помощью асимптотического приближения Ханкеля [7, 10]:  $J_0^H(z) = \sqrt{2/(\pi \cdot z)} \cdot [P(z) \cdot \cos(\zeta) - Q(z) \cdot \sin(\zeta)]$ , где  $\zeta = z - \frac{\pi}{4}$ .

Согласно справочнику Абрамовитца и Стиган [10] полином  $P(z)$  имеет представление:

$$P(z) = 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2! \cdot (8z)^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4! \cdot (8z)^4} + \dots + (-1)^k \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (4k-3)^2 \cdot (4k-1)^2}{(2k)! \cdot (8z)^{2k}} + \dots$$

Полином  $Q(z)$  согласно [10] имеет следующее представление

$$Q(z) = -\frac{1}{8z} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3! \cdot (8z)^3} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2}{5! \cdot (8z)^5} + \dots + (-1)^{k+1} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (4k-1)^2 \cdot (4k+1)^2}{(2k+1)! \cdot (8z)^{2k+1}} + \dots$$

Проведем оценку методической погрешности при вычислении  $J_0(z)$  с помощью асимптотического приближения Ханкеля. Так как ряды  $P(z)$  и  $Q(z)$  знакопеременные, то если рассмотреть в приближении Ханкеля функции  $J_0(z)$  для  $n$  членов ряда  $P(z)$  и  $m$  членов ряда  $Q(z)$ , то можно считать, что методическая погрешность для  $P(z)$  представима как

$\left| P(z) - \sum_{i=1}^n P_i(z) \right| \leq |P_{n+1}(z)|$  и, соответственно, для  $Q(z) - \sum_{i=1}^m Q_i(z) \leq |Q_{m+1}(z)|$ . Здесь  $P_{n+1}(z)$  –  $n+1$ -й член ряда  $P(z)$ , а  $Q_{m+1}(z)$  –  $m+1$  член ряда  $Q(z)$ .

Если обозначить частное приближение Ханкеля функции  $J_0^H(z)$  как  $H_{n,m}(z)$ , то

$$\begin{aligned} |J_0^H(z) - H_{n,m}(z)| &= \left| \sqrt{2/(\pi \cdot z)} \cdot [P(z) \cdot \cos(\varphi) - Q(z) \cdot \sin(\varphi)] - \right. \\ &\left. - \sqrt{2/(\pi \cdot z)} \cdot \left[ \sum_{i=1}^n P_i(z) \cdot \cos(\varphi) - \sum_{i=1}^m Q_i(z) \cdot \sin(\varphi) \right] \right| \leq \\ &\leq \left| \sqrt{2/(\pi \cdot z)} \cdot [P_{n+1}(z) \cdot \cos(\varphi) - Q_{m+1}(z) \cdot \sin(\varphi)] \right| \leq \sqrt{2/(\pi \cdot z)} \cdot R(z), \end{aligned}$$

где  $R(z) = \sqrt{P_{n+1}^2(z) + Q_{m+1}^2(z)}$ . Это и будет максимальной погрешностью метода асимптотического приближения Ханкеля функции  $J_0(z)$ .

Вычислять значения функции  $J_0(z)$  планируется с помощью асимптотического приближения Ханкеля при  $z \geq 14,5$ , то оценим абсолютную погрешность для функции  $J_0^H(z)$  в диапазоне изменения величины  $z$ ,  $z \in [14,5; 19,0]$  для следующих вариантов  $n$  и  $m$ : (14; 13), (14; 14), (15; 14), (15; 15), (16; 15). Значения членов ряда  $P(z)$  ( $P_i(z)$ ) и членов ряда  $Q(z)$  ( $Q_i(z)$ ), предназначенных для оценки методической погрешности асимптотического приближения Ханкеля функции  $J_0(z)$  приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1 – Значения членов ряда  $P(z)$  ( $P_i(z)$ ) при  $z \in [14,5; 19,0]$

$P_i \setminus z$	14,5	15,25	16,0	16,75	17,5	18,25	19,0
$P_{14}$	3,880E-14	9,453E-15	2,465E-15	6,834E-16	2,005E-16	6,191E-17	2,005E-17
$P_{15}$	3,748E-14	8,256E-15	1,956E-15	4,948E-16	1,330E-16	3,776E-17	1,128E-17
$P_{16}$	4,147E-14	8,258E-15	1,777E-16	4,102E-16	1,010E-16	2,637E-17	7,268E-18
$P_{17}$	5,210E-14	9,379E-15	1,833E-16	3,862E-16	8,710E-17	2,091E-17	5,317E-18
$P_{18}$	7,375E-14	1,200E-14	2,131E-16	4,097E-16	8,465E-17	1,869E-17	4,384E-18

Исходя из данных табл. 1 при значениях  $z \leq 15$  целесообразно взять для вычисления функции  $P(z)$  14 членов ряда; при  $z \in (15,0; 16,25]$  – 15 членов ряда, при  $z \in (16,25; 17,5]$  – 16 членов ряда и при  $z \geq 17,5$  – 17 членов ряда.

Таблица 2 – Значения членов ряда  $Q(z)$  ( $Q_i(z)$ ) при  $z \in [14,5; 19,0]$

$Q_i \setminus z$	14,5	15,25	16,0	16,75	17,5	18,25	19,0
$Q_{13}$	4,166E-14	1,067E-14	2,920E-15	8,477E-16	2,598E-16	8,366E-17	2,820E-17
$Q_{14}$	3,747E-14	8,681E-15	2,157E-15	5,714E-16	1,604E-16	4,751E-17	1,477E-17
$Q_{15}$	3,879E-14	8,123E-15	1,834E-15	4,432E-16	1,140E-16	3,104E-17	8,907E-18
$Q_{16}$	4,577E-14	8,666E-15	1,777E-15	3,920E-16	9,236E-17	2,312E-17	6,122E-18
$Q_{17}$	6,109E-14	1,046E-14	1,948E-15	3,921E-16	8,463E-17	1,948E-17	4,759E-18

Исходя из данных табл. 2 при значениях  $z \leq 16$  целесообразно взять для вычисления функции  $Q(z)$  14 членов ряда, при  $z \in (16,0; 17,5]$  – 15 членов ряда, при  $z > 17,5$  – 16 членов ряда.

График методической и абсолютной погрешностей вычислений функции  $K_2(z)$  с помощью асимптотического приближения Ханкеля при изменении величины  $z$ ,  $z \in [15; 19]$  представлен на рис. 3.

Для уменьшения погрешности вычислений функции  $K_2(z)$  в диапазоне изменения величины  $z$ ,  $z \in [4,6; 17,2]$  используются многочлены Чебышева. Интерполирование функции  $f(x) \in C[a, b]$  с использованием многочленов Чебышева базируется на минимизации выражения

$\omega_n(x) = \max \prod_{k=0}^n (x - x_k)$  путем соответствующего выбора узлов интерполяции.

Интерполяционный многочлен имеет вид:  $P_n(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^n A_k T_k\left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right)$ , где

$$A_k = \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \frac{\cos(2i+1)k\pi}{2n+2}, \quad k = \overline{0, n}, \quad T_k(x) - k\text{-й многочлен Чебышева.}$$

При  $f(x) \in C^{(n+1)}[a, b]$  оценка погрешности приближения Чебышева имеет вид

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} \max |f^{(n+1)}(x)| \quad [10, 11].$$

При этом возникает проблема подбора количества коэффициентов  $n$  и диапазона  $[a, b]$ . Предполагая, что  $|b-a|=12,6$ ,  $n$  выбрано равным 30, с учетом того, что последний член ряда  $A_{29} < \varepsilon_0$  (где  $\varepsilon_0$  – машинное эpsilon при расчетах с типами данных long double языка C++ и Extended языка Pascal). Расчеты коэффициентов  $A_k$  и  $T_k$  производились в среде Maple 18 с параметром количества десятичных цифр, равным  $Digits=32$ . Поэтому примерная точность вычислений – не менее 26 десятичных цифр. При этом,  $|K_2(z) - P_{31}(z)| \leq \frac{(b-a)^{31}}{2^{63}(32)!} \max |K_2^{31}(z)| = \frac{0,1401 \cdot 12,6^{31}}{2^{63}(32)!} \approx 2,3878857 \cdot 10^{-20}$ . В

качестве значений  $a$  и  $b$  выбраны  $a = 4,6$  и  $b = 17,2$ .

Рассчитанная одновременно сумма абсолютной и методической погрешностей вычислений в диапазоне значений величины  $z$ ,  $z \in [4,6; 17,2]$  весьма мала (смотри рис. 4) и соответствует теоретическим сведениям об аппроксимации Чебышева [11].

Совмещенные оценки точности вычисления функции  $K_2(z)$  различными методами показаны на рис. 5 и 6. На рис. 5 показано сравнение ошибок вычисления функции  $K_2(z)$  с помощью разложения Тейлора и аппроксимации Чебышева при  $z \in [5,15; 5,4]$ . Очевидно, что при  $z \leq 5,288$  декомпозиция Тейлора имеет меньшую погрешность вычислений, то есть  $K_2(z)$  при  $z \leq 5,288$  лучше вычислять с помощью декомпозиции Тейлора. А при  $z > 5,288$  меньшая погрешность вычислений у аппроксимации Чебышева, то есть  $K_2(z)$  при  $z > 5,288$  лучше вычислять с помощью аппроксимации Чебышева. Таким образом, лучше всего в качестве точки перехода с вычисления  $K_2(z)$  методом декомпозиции Тейлора на метод вычисления  $K_2(z)$  с помощью аппроксимации Чебышева следует выбрать  $z = 5,288$ . При этом максимальная погрешность приближенно равна  $2,63 \cdot 10^{-18}$ .

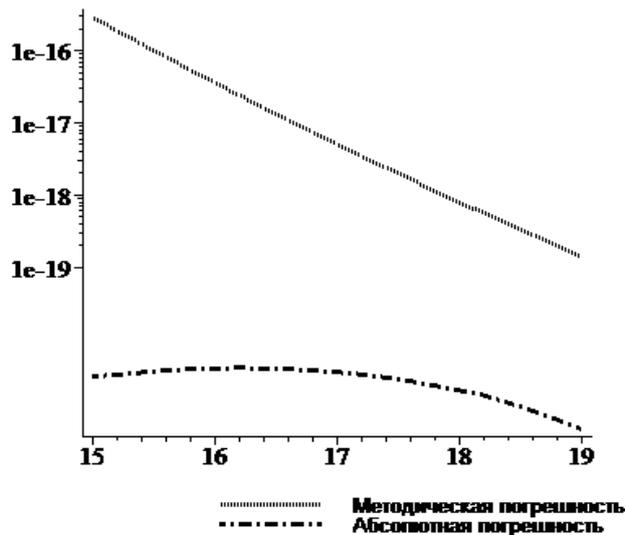


Рисунок 3 – Методическая и абсолютная погрешности вычисления функции  $K_2(z)$  с помощью приближения Ханкеля при  $z \in [15; 19]$

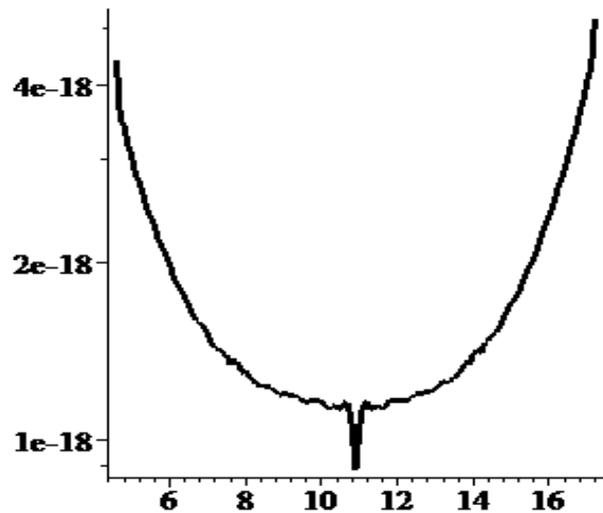


Рисунок 4 – Полная погрешность вычисления функции  $K_2(z)$  с помощью аппроксимации Чебышева при  $z \in [4,6; 17,2]$

На рис. 6 показано сравнение ошибок вычисления функции  $K_2(z)$  с помощью аппроксимации Чебышева и приближения Ханкеля при  $z \in [16,85; 17,15]$ . Очевидно, что при  $z \leq 17,004$  аппроксимация Чебышева имеет меньшую погрешность вычислений, то есть  $K_2(z)$  при  $z \leq 17,004$  лучше вычислять с помощью аппроксимации Чебышева. А при  $z > 17,004$  меньшая погрешность вычислений функции  $K_2(z)$  с помощью асимптотического приближения Ханкеля функции  $J_0(z)$ , то есть  $K_2(z)$  при  $z > 17,004$  лучше вычислять функцию  $K_2(z)$  в помощью асимптотического приближения Ханкеля функции  $J_0(z)$ . Таким образом, лучше всего в качестве точки перехода с вычисления  $K_2(z)$  методом аппроксимации Чебышева на метод вычисления функции  $K_2(z)$  с помощью асимптотического приближения Ханкеля функции  $J_0(z)$  следует выбрать  $z = 17,004$ . При этом максимальная погрешность приближенно равна  $3,97 \cdot 10^{-18}$ .

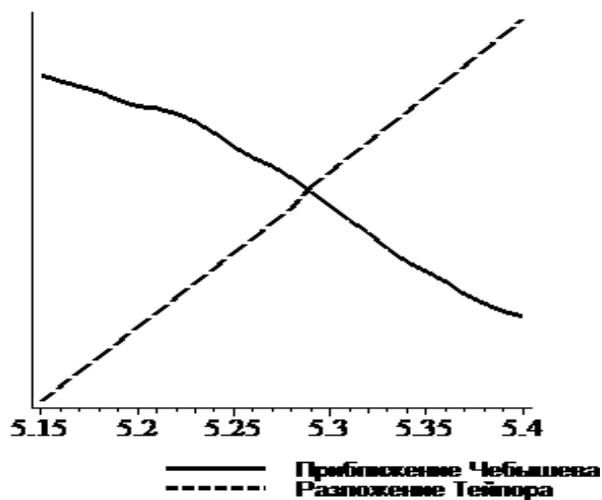


Рисунок 5 – Сравнение ошибок вычисления функции  $K_2(z)$  с помощью разложения Тейлора и аппроксимации Чебышева при  $z \in [5,15; 5,4]$

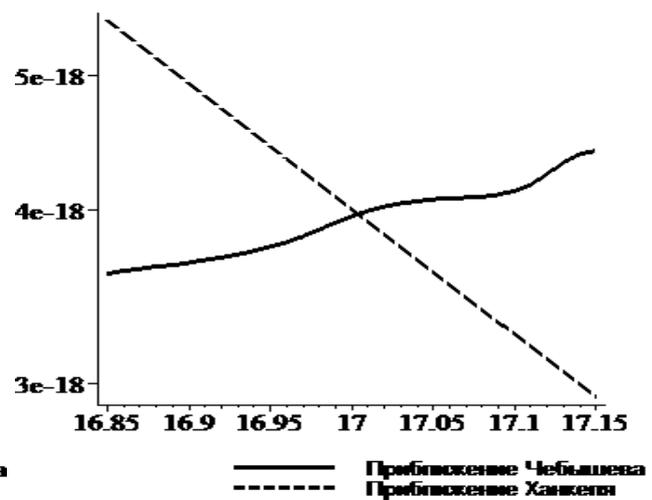


Рисунок 6 – Сравнение ошибок вычисления функции  $K_2(z)$  с помощью аппроксимации Чебышева и с помощью асимптотического приближения Ханкеля при  $z \in [16,85; 17,15]$

Из представления (16) следует, что при  $h \rightarrow \infty$  функция  $z(r, l, a, h) \rightarrow 0$  и  $K_2[z(r, l, a, h)] \rightarrow 1$ . При таком значении  $K_2(z)$  минимальная абсолютная погрешность вычисления равна машинному эпсилон применяемого для расчетов типа данных Extended языка Pascal. Применяя для расчетов 80-разрядные числа с плавающей запятой, имеем значение машинного эпсилон равное  $\varepsilon_0 = 2^{-64} = 5,4210 \cdot 10^{-20}$  [10, 11].

Отметим, что среди значений  $z$ , находящихся в окрестности нуля, важны только те, для которых величина  $K_2(z)$  отличается от 1 на величину, большую  $\varepsilon_0$ . Отсюда минимальное значение  $z$ , при котором величина  $K_2(z)$  отлична от единицы, определяется неравенством

$$|K_2(z) - 1| \geq \varepsilon_0. \quad (19)$$

Подставляя выражение (17) в (19), получаем,  $\left| -\frac{z_{\min}^2}{2^2 \cdot (2!)^2} + o(z_{\min}^2) \right| \approx \varepsilon_0$ , откуда  $z_{\min}^2 \approx 2^4 \cdot \varepsilon_0$  и

$$z_{\min} \approx 2^2 \cdot \sqrt{\varepsilon_0} = 9,3132 \cdot 10^{-10}, \quad (20)$$

где величина  $z_{\min}$  является нижней границей изменения  $z$  при вычислении коэффициентов обратного преобразования Фурье функции  $Pl\tilde{o}\tilde{p}_{a,r}(l)$  в представлении (15).

Для более точного вычисления функции  $Pl\tilde{o}p_{a,r}(x_1, x_2)$  следует выбирать большее количество расчетных точек по сравнению с формулой (4), а именно

$$Pl\tilde{o}p_{a,r}(x_1, x_2) = \frac{1}{k^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{pq} \cos\left(\frac{\pi}{k} \cdot px_1\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{k} \cdot qx_2\right), \quad (21)$$

где  $k$  можно принять равным 4, 8 или 16.

С целью определения значения  $z(r, l, a, h)$  (при  $h=0$ ), с которого начнем выполнение приближенных вычислений функции (15), оценим величину функции  $K_2[z(r, l, a, h)]$  при  $z \rightarrow +\infty$ . При больших значениях  $z$  функцию Бесселя  $J_0(z)$  можно заменить асимптотическим приближением Ханкеля [10]  $J_0(z) \approx \sqrt{2/(\pi z)} \cdot \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$ . Отсюда, при  $z \rightarrow +\infty$  получаем

следующую оценку для  $K_2[z(r, l, a, h)]$ :  $K_2[z(r, l, a, h)] \approx \frac{1 - 2\sqrt{1/\pi z(r, l, a, h)}}{z(r, l, a, h)^2} \leq \frac{1}{z(r, l, a, h)^2}$ .

Таким образом,  $K_2[z(r, l, a, h)] \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow +\infty$ .

Расчеты показывают, что  $Pl\tilde{o}\tilde{p}_{a,r}(z) \leq \varepsilon_0$  уже при значениях  $z$ , больших, чем  $628 \cdot \pi$ .

Таким образом, в качестве максимального значения для  $z(r, l, a, 0)$  можно принять величину  $z_{\max} = 628 \cdot \pi$  (как для случая обычной функции  $Pl\tilde{o}\tilde{p}(z)$ ).

Для того, чтобы оценить максимальное количество элементов произведения (15) функции  $Pl\tilde{o}\tilde{p}_{a,r}(z)$ , вычислим

$$nn = \log_a \left( \frac{z_{\max}}{z_{\min}} \right) = \log_a \left( \frac{628 \cdot \pi}{9,3132 \cdot 10^{-10}} \right) \approx \log_a (2,1184 \cdot 10^{12}).$$

Так, для  $a = 2,0$  величина  $nn \approx 40,946$ , для  $a = 2,5$  –  $nn \approx 30,975$ , для  $a = 3,0$  –  $nn \approx 25,834$ , для  $a = 4,0$  –  $nn \approx 20,473$ , а для  $a = 5,0$  –  $nn \approx 17,635$ .

Отсюда для приближенных расчетов функции  $Pl\tilde{p}_{a,r}(z)$  формулу (15) можно заменить на формулу

$$Pl\tilde{p}_{a,r}(l) \approx \prod_{h=0}^{nn} K_2[z(r,l,a,h)]. \quad (22)$$

Формула (22) дает возможность рассчитать приближенное значение функции  $Pl\tilde{p}_{a,r}(l)$  и построить ее графики для различных значений параметра  $a$ , (см. рис. 7). Графики абсолютных ошибок округления при вычислении функции  $Pl\tilde{p}_{a,r}(l)$  для различных значений параметра  $a$  при  $r=1$  приведены на рис. 8.

После замены формулы (15) приближенной формулой (22) в формуле (21) также можно заменить верхние границы суммирования конечными величинами, по параметру  $p$  это  $m = k \cdot z_{\max} / \pi$ , а по параметру  $q$  это  $\sqrt{m^2 - p^2}$  (все точки преобразования Фурье должны находиться в круге радиуса  $m$ , иначе функция  $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$  не будет радиальной). При  $k=8$  формула (21) приводится к следующему виду:

$$Plop_{a,r}(x_1, x_2) \approx \frac{1}{8^2} \cdot \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{\sqrt{m^2 - p^2}} U_{pq} \cos\left(\frac{\pi}{8} \cdot px_1\right) \cos\left(\frac{\pi}{8} \cdot qx_2\right). \quad (23)$$

Функция  $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$  (23) является радиальной, эквивалентом которой будет одномерная функция  $\hat{P}lop_{a,r}(v)$  (при  $v = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ), построение которой можно осуществить по следующей формуле:

$$\hat{P}lop_{a,r}(v) = \frac{1}{8^2} \cdot \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^{\sqrt{m^2 - p^2}} U_{pq} \cos\left(p \frac{\pi}{8} v\right) \cos\left(q \frac{\pi}{8} \cdot 0\right). \quad (24)$$

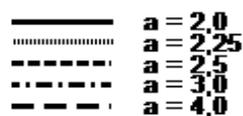
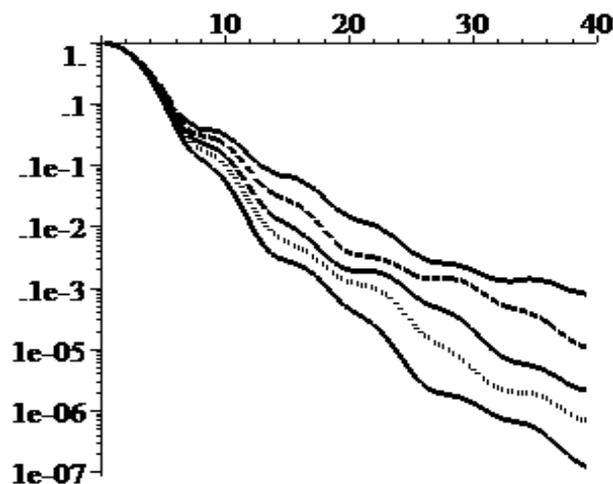


Рисунок 7 – Графики функций  $Pl\tilde{p}_{a,r}(l)$  для различных значений параметра  $a$ , при  $r=1$ ,

$$l \in [0; 40]$$

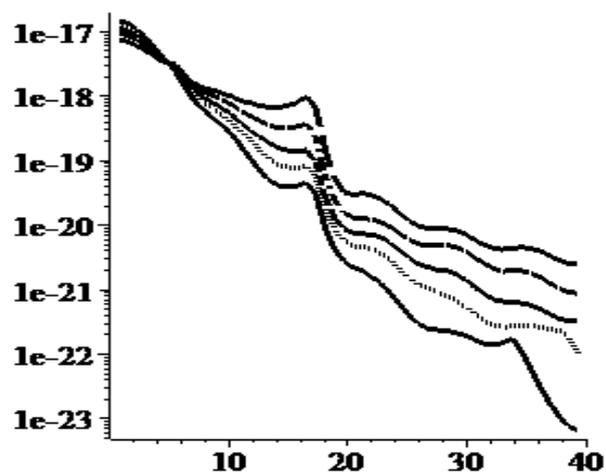


Рисунок 8 – Абсолютная ошибка округления функций  $Pl\tilde{p}_{a,r}(l)$  для различных значений

$$параметра a, при r=1, l \in [0; 40]$$

Таким образом, вычисления функции  $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$  для двух переменных можно свести к вычислению функции  $\hat{Plop}_{a,r}(v)$  для одной переменной  $v$ , где  $v \in \left[0; \frac{3 \cdot r \cdot a}{2 \cdot (a-1)}\right]$ . Алгоритм вычислений будет следующим: разобьем отрезок  $\left[0; \frac{3 \cdot r \cdot a}{2 \cdot (a-1)}\right]$  равномерно распределенными узлами, вычислим в них значения функции и расположим их в виде массива (файла). Произвольное значение функции  $\hat{Plop}_{a,r}(v)$  будем вычислять с помощью интерполяции Лагранжа данной функции по равномерно распределенным узлам [9]. С целью уменьшения погрешностей, возникающих при интерполяции (в операциях деления), задаем количество узлов, равное  $3 \cdot 2^{k-1}$ , где  $k$  можно принять равным 15 или 16.

При замене формулы (21) на формулу (24) при вычислении функции  $\hat{Plop}_{a,r}(v)$  точность ее вычисления зависит от параметра  $z_{\max}$ , для более корректного определения значения данной величины можно выяснить, какие максимальные изменения в значение функции  $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$  вносит слой двумерного преобразования Фурье с границами от  $z_{\max}$  до  $z_{\max} + h$ . Иначе говоря, нужно найти максимум выражения

$$\frac{1}{8^2} \left| \sum_{p=0}^{m_2} \sum_{q=0}^{\sqrt{m_2^2 - p^2}} U_{pq} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} px_1\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} qx_2\right) - \sum_{p=0}^{m_1} \sum_{q=0}^{\sqrt{m_1^2 - p^2}} U_{pq} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} px_1\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} qx_2\right) \right|,$$

где  $m_1 = z_{\max} \cdot 8$ ,  $m_2 = (z_{\max} + h) \cdot 8$ . Расчеты данного выражения со значениями  $z_{\max}$  в диапазоне  $[350\pi; 1850\pi]$  и  $h = 50\pi$  для различных значений параметра  $a$  приведены в табл. 3.

Таблица 3 – Максимальное различие значений  $\hat{Plop}_{a,r}(v)$  при изменении  $z_{\max}$  при различных значениях параметра  $a$  и  $r=1$

Границы слоя		$a = 2,0$	$a = 2,25$	$a = 2,5$	$a = 3,0$	$a = 4,0$
$z_{\max}$	$z_{\max} + 50\pi$					
300π	350π	5,421E-20	2,168E-19			
350π	400π	0	1,084E-19	3,036E-18		
400π	450π		1,084E-19	3,253E-19		
450π	500π		2,711E-20	2,168E-19		
500π	550π		0	2,168E-19	3,947E-17	
550π	600π			2,168E-19	1,735E-17	
600π	650π			1,084E-19	6,831E-18	
650π	700π			2,711E-20	2,711E-18	
700π	750π			0	1,518E-18	
750π	800π				7,589E-19	7,137E-15
800π	850π				3,253E-19	4,446E-15
850π	900π				2,168E-19	2,457E-15
900π	950π				2,168E-19	1,132E-15
950π	1000π				2,168E-19	6,786E-16
1000π	1050π				2,168E-19	3,121E-16
1050π	1100π				2,168E-19	1,835E-16
1100π	1150π				2,168E-19	1,239E-16
1150π	1200π				2,711E-20	7,394E-17
1200π	1250π				2,711E-20	6,288E-17
1250π	1300π				1,084E-19	3,979E-17

Продолжение таблицы 3.

1300π	1350π					2,776E-17
1350π	1400π					1,952E-17
1400π	1450π					1,041E-17
1450π	1500π					7,156E-18
1500π	1550π					4,120E-18
1550π	1600π					2,494E-18
1600π	1650π					1,843E-18
1650π	1700π					1,301E-18
1700π	1750π					9,758E-19
1750π	1800π					8,674E-19
1800π	1850π					5,421E-19

Подберем на основании данных табл. 3 значения  $z_{\max}$ , при которых будем производить оценку погрешности вычисления семейства функций  $\hat{Plop}_{a,r}(v)$  (приводятся в табл. 4).

Таблица 4 – Значения  $z_{\max}$ , подобранные для оценки погрешности вычисления функции  $\hat{Plop}_{a,r}(v)$  при различных значениях параметра  $a$  и  $r=1$

Параметр $a$	2,0	2,25	2,5	3,0	4,0
$z_{\max}$	350π	500π	700π	1250π	1800π

Графики абсолютных погрешностей при вычислении семейства функций  $\hat{Plop}_{a,r}(v)$  при указанных в табл. 4 значениях величины  $z_{\max}$  приведены на рис. 9.

Приведенные в табл. 3 и на рис. 9 результаты дают возможность оценить полную погрешность вычисления функции  $\hat{Plop}_{a,r}(v)$  при различных значениях параметра  $a$  (см. табл. 5).

Таблица 5 – Максимальные методическая, абсолютная и полная погрешности вычисления функции  $\hat{Plop}_{a,r}(v)$  при различных значениях параметра  $a$  и  $r=1$

Параметр $a$	2,0	2,25	2,5	3,0	4,0
Методическая погрешность	0	0	0	1,084E-19	5,421E-19
Абсолютная погрешность	2,139E-17	2,237E-17	2,371E-17	2,710E-17	3,424E-17
Полная погрешность	2,139E-17	2,237E-17	2,371E-17	2,721E-17	3,479E-17

Графики функций  $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$  при различных значениях параметра  $a$  приведены на рис. 10.

Как уже указывалось выше, произвольное значение функции  $\hat{Plop}_{a,r}(v)$  получаем с помощью интерполяции Лагранжа по схеме Эйткена [9, 7]. По результатам погрешностей расчетов в качестве наиболее оптимальной для количества узлов, равном  $N=49152$ , выбираем шеститочечную схему Эйткена, или пятиточечную схему Эйткена при значениях параметра  $a \leq 3$  (см. табл. 6).

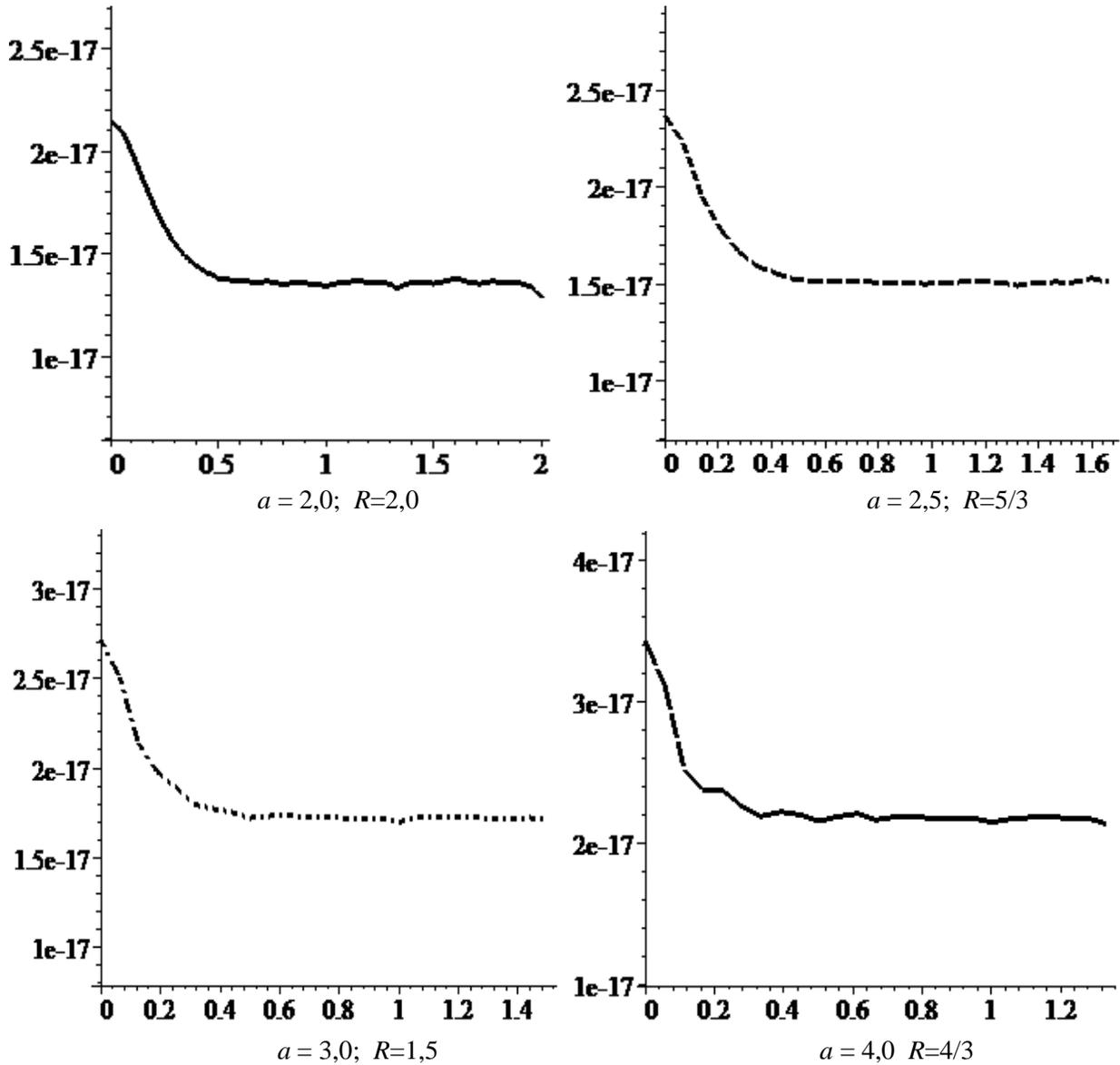


Рисунок 9 – Абсолютные погрешности при вычислении семейства функций  $\hat{P}lor_{a,r}(v)$  при различных значениях параметра  $a$  и  $r=1, R=3a/[2(a-1)]$

Таблица 6 – Максимальные погрешности интерполяционных схем Эйткена при интерполяции функции  $\hat{P}lor_{a,r}(v)$  при различных значениях параметра  $a$  и  $r=1$

значение $a$ и эквивалентное значение $R$	4-х точечная схема Эйткена	5-ти точечная схема Эйткена	6-ти точечная схема Эйткена	7-ти точечная схема Эйткена
2,0 ( $R=2,0$ )	2,4069E-17	3,7947E-19	3,7947E-19	4,3368E-19
2,25 ( $R=1,8$ )	3,5128E-17	5,4210E-19	5,4210E-19	5,4210E-19
2,5 ( $R=5/3$ )	5,2150E-17	7,5894E-19	7,5892E-19	7,5894E-19
3,0 ( $R=1,5$ )	1,1362E-16	1,3010E-18	1,3010E-18	1,4095E-18
4,0 ( $R=4/3$ )	4,6306E-16	2,0600E-18	1,9516E-18	1,9516E-18

При сравнении данных, отображенных на рис. 9 и в табл. 6 видно, что погрешность интерполяционной схемы Эйткена с количеством узлов, равным шести (пяти), примерно в 15-20

раз меньше полной погрешности вычислений функции  $\hat{Plop}_{a,r}(v)$ . Кроме того данную схему приближения в какой-то мере можно считать сглаживающим фильтром [9]. Поэтому предлагается данной погрешностью пренебречь.

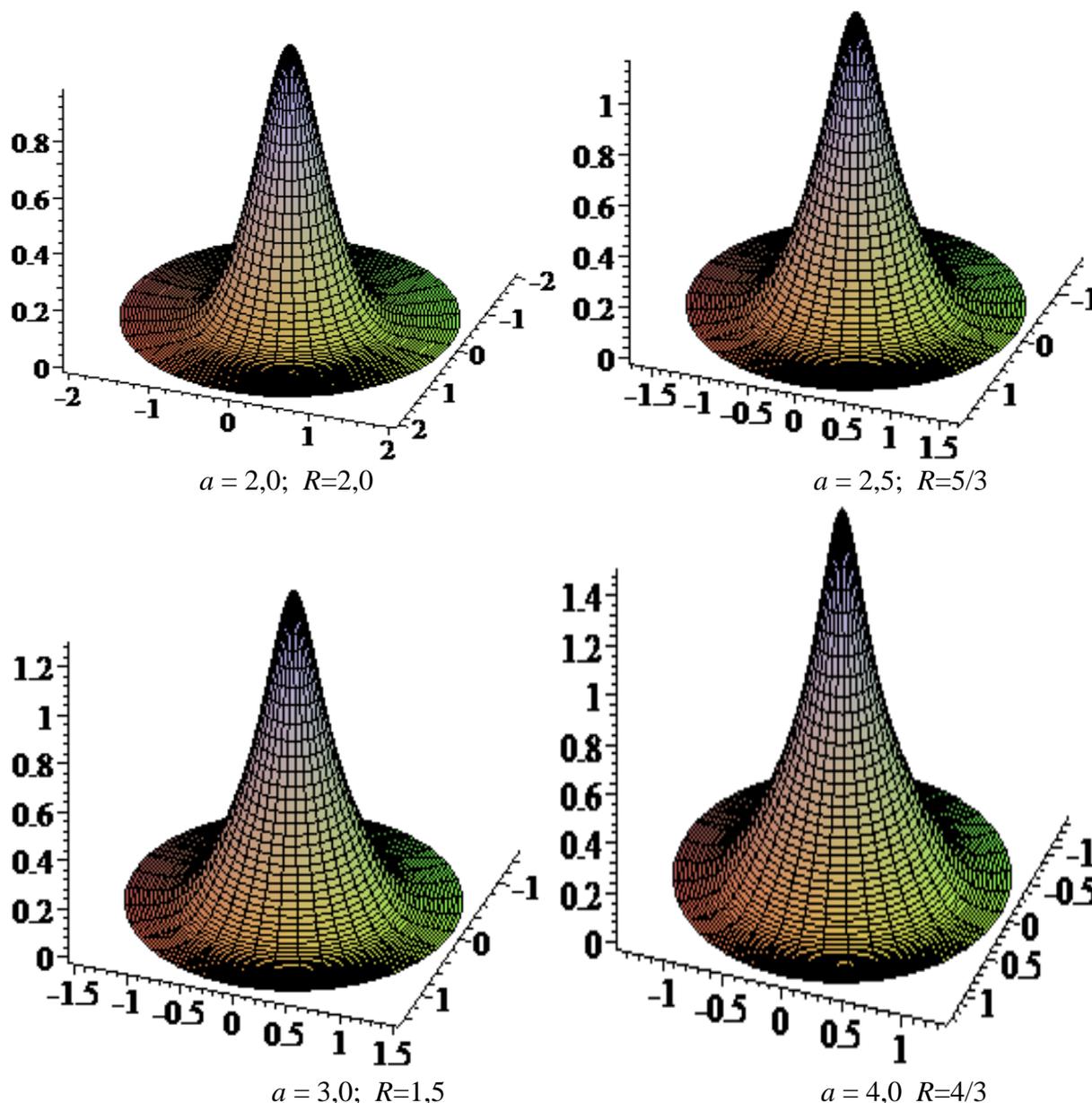


Рисунок 10 – Графики функций  $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$  при различных значениях параметра  $a$  и  $r=1$

#### 4. Выводы

Новизной полученных результатов является то, что модифицируется алгоритм вычисления функции  $K_2(z)$  с помощью аппроксимации Чебышева, более точно найдены абсолютные и полные погрешности вычислений функций  $\hat{Plop}_{a,r}(l)$  при значениях параметра  $a$ , равных 2,0; 2,5; 3,0; 4,0. Приведены графики абсолютных погрешностей вычислений и значений функций при указанных значениях  $a$ . Показано, что применение интерполяционного алгоритма Лагранжа (шеститочечная или пятиточечная схемы Эйткена) для определения произвольного значения функции  $Plop_{a,r}(x_1, x_2)$  практически не влияет на ее погрешность вычисления.

Все эти улучшения алгоритмов привели к уменьшению погрешности вычисления функции  $P_{\text{lop}_{a,r}}(x_1, x_2)$  более чем в два раза по сравнению с алгоритмом вычисления функции  $K_2(z)$  без аппроксимации Чебышева.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kanza E. J., PhD. Motivation for using radial basis functions to solve PDEs // Lawrence Livermore National Laboratory and Embry-Riddle Aeronautical University – August 24, 1999.
2. Liu G. R. Mesh Free Methods. Moving beyond the Finite Element Method. – London: CRC Press. – 2003. – 693 p.
3. Колодяжний В. М., Рвачов В. О. Фінітні функції, що породжені оператором Лапласа // Доповіді НАН України. – № 4. – 2004. – С. 17-22.
4. Будылин А. М. Ряды и интегралы Фурье. – Л.: СПбГУ. – 2002. – 127 с.
5. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. – М.: Наука. – 1983. – 239 с.
6. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных – М.: Наука, 1971. – 430 с.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики: В 4-х томах. Т. 2. – М.: Наука. – 1974. – 655 с.
8. Kolodyazhnyi V. M. and Rvachev V. A. Atomic functions: Generalization to the multivariable case and promising applications // Cybernetics and Systems Analysis. – 43, N 6. – 2007. – С. 893-911.
9. Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробогатько А. А. Методы вычислений (Численный анализ. Методы решения задач математической физики) / – К.: Вища школа, 1977. – 400 с.
10. Абрамовитц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами: пер. с англ. / – М.: Наука, 1979. – 832 с.
11. Попов Б. А., Теслер Г. С. Вычисление функций на ЭВМ. Справочник / – К.: Наукова думка – 1984. – 600 с.

#### REFERENCES

1. Edward J. Kanza, PhD. *Motivation for using radial basis functions to solve PDEs*: Lawrence Livermore National Laboratory and Embry-Riddle Aeronautical University. August 24, 1999. [in English]
2. G. R. Liu *Mesh Free Methods. Moving beyond the Finite Element Method*. London: CRC Press, 2003. 693 p. [in English]
3. V. M. Kolodyazhnyi, V. A. Rvachev, *Finite functions generated by the Laplace operator*. Reports of the NAS of Ukraine, № 4. 2004. P. 17-22. [in Ukrainian]
4. A. M. Budylin *Fourier series and integrals*. L.: SPbSU, 2002, 127 p. [in Russian]
5. A. A. Karatsuba *Fundamentals of Analytical Number Theory*. M.: Nauka, 1983. 239 p. [in Russian]
6. L. I. Ronkin. *Introduction to the theory of entire functions of many variables*, M.: Nauka, 1971, 430 p. [in Russian]
7. V. I. Smirnov *The course of higher mathematics: In 4 volumes. T. 2*. M.: Nauka, 1974, 655 p. [in Russian]
8. V. M. Kolodyazhnyi, V. A. Rvachev “Atomic functions: Generalization to the multivariable case and promising applications”, *Cybernetics and Systems Analysis*, 43, N 6, P. 893-911, 2007. [in English]
9. I. I. Lyashko, V. L. Makarov, A. A. Skorobohat'ko *Методы вычислений (Численный анализ. Методы решения задач математической физики)*. К.: Vyshcha shkola, 1977, 400 p. [in Russian]
10. M. Abramovitz, I. Stegun *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables: per. from English*, M.: Nauka, 1979, 832 p. [in Russian]
11. B. A. Popov, G. C. Tesler *Calculation of functions on a computer. Handbook*. К.: Naukova dumka 1984, 600 p. [in Russian]