DOI: 10.26565/2304-6201-2020-46-05

УДК 593.3

Гибридный адаптивный метод поиска корней негладкой функции в задаче определения собственных частот колебаний жидкости в резервуарах

Д.В. Листрова, Т.В. Мединцева, Г.А. Шелудько

Листрова Дарья Вадимовна *студентка 5 курса учебно-научного института компьютерной физики и энергетики университета им. В.Н. Каразина*
Площаць Свободы , Харьков, 61022, Украина
e-mail: dasha14.152@gmail.com
https://orcid.org/000-0002-3202-8150

Мединцева Татьяна Владимировна *студентка 5 курса учебно-научного института компьютерной физики и энергетики университета им. В.Н. Каразина*
Плошадь Свободы , Харьков, 61022, Украина
e-mail: medintan@gmail.com
https://orcid.org/000-0003-1037-3858

Шелудько Гелій Артемович *научный сотрудник*
Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского, 2/10,Харьков, 61046, Украина
https://orcid.org/0000-0003-4171-9591

Разработан гибридный адаптивный метод поиска корней негладкой функции одной переменной. Метод применен к решению характеристического уравнения в задаче определения собственных частот колебаний жидкости в резервуаре, имеющем форму оболочки вращения. Приведена формулировка указанной задачи, и разработан метод сведения этой задачи к решению нелинейного уравнения, которое является характеристическим для соответствующей проблемы собственных значений. Описан алгоритм адаптивного метода поиска корней негладкой функции, который основан на гибридизации известных методов. Проведено сравнение результатов вычислений корней функций, которые проводились с помощью метода дихотомии, метода «3/5» и разработанного метода. Установлено, что эффективность предложенного метода превышает эффективность обоих методов - гибридиентов. Рассмотрена задача о колебаниях жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре. Проведено сравнение результатов расчета частот колебаний жидкости с помощью различных методов.

Ключевые слова: *гибридный адаптивный метод, корни негладких функций, колебания жидкости в жестких резервуарах, характеристическое уравнение*

Hybrid adaptive method for finding the roots of a non-smooth function in the problem of determining the natural frequencies of fluid vibrations in reservoirs

D.V. Listrtova, T.V.Medintseva, G.A. Sheludko

Listrova Daria *Student*
V. N. Karazin Kharkiv National University,6 Peremohy place, Kharkiv, Ukraine,61022

Medintseva Tatyana *Student*
V. N. Karazin Kharkiv National University,6 Peremohy place, Kharkiv, Ukraine,61022

Sheludko Geliy *Researcher*
Institute of Mechanical Engineering Problems A. N. Podgorny NASU, st. Pozharsky, 2/10, Kharkiv, 61046, Ukraine

The article proposes a hybrid adaptive method for finding the roots of a non-smooth function of a single variable. The algorithm of adaptive root search method for non-smooth functions is presented. It assumes both adaptive reduction of a search step, and changing the search direction. It is found that the proposed approach allows us to detect the root even in the presence of a point of inflection. That is, for example, impossible for the Newton method. The accuracy of finding the root by using the

proposed algorithm does not depend on the type of functions, the choice of the initial approximation; the method allows finding the root with the given accuracy in any case. The comparison of the results of the root calculations is performed by using the dichotomy method, the "3/5" method and the proposed algorithm. It is established that the effectiveness of the developed method exceeds the efficiency of both hybrid methods when they are applied separately. The developed method is applied to the solution of the characteristic equation in the problem of determining the natural frequencies of oscillations of a liquid in a rigid tank having the form of a shell of revolution. The fluid in the tank is assumed to be perfect and incompressible, and its motion caused by the action of external loads is eddy. Under these assumptions, there exists a velocity potential to describe the fluid motion. The formulation of the problem is given and the method of its reducing to the solution of a nonlinear equation is presented. This equation is a characteristic one for the corresponding problem of eigenvalues. The methods of integral singular equations and the boundary element method for their numerical solution have been applied. The problem of fluid oscillation in a rigid cylindrical tank is considered. The results of numerical simulation of the fluid oscillation frequencies obtained by different methods for different number of nodal diameters are compared. It is noted that if the root of the characteristic equation is localized by using approximate methods, then its refinement can be carried out by using the proposed approach.
Key words: *hybrid adaptive method, roots of non-smooth functions, fluid oscillations in rigid reservoirs, characteristic equation.*

Гібридний адаптивний метод пошуку коренів негладкої функції в задачі визначення власних частот коливань рідини в резервуарах

Д.В. Лістрова, Т.В. Медінцева, Г.А. Шелудько

Лістрова Дар'я Вадимівна — *Студентка навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики університету ім.. В.Н. Каразіна*
Площа Свободи 6, м.Харків, Україна, 61022

Медінцева Тетяна Володимирівна — *Студентка навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики університету ім.. В.Н. Каразіна*
Площа Свободи 6, м.Харків, Україна, 61022

Шелудько Гелій Артемович — *Науковий співробітник*
Інститут проблем машинбудування ім. А. Н. Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10,Харьків, Україна, 61046

В статті запропоновано гібридний адаптивний метод пошуку коренів негладкої функції однієї змінної. Наведено алгоритм адаптивного методу пошуку коренів негладкої функції, який засновано на гібридизації деяких відомих методів визначення коренів функцій однієї змінної довільного вигляду. Запропоновано засоби як адаптивного зменшення шагу пошуку, так і зміни напрямку. Встановлено, що запропонований підхід дозволяє виявляти корінь навіть при наявності точки перегину, що, наприклад, неможливо для методу Ньютона. Тобто, точність знаходження кореня за допомогою запропонованого алгоритму не залежить від виду функції, вибору початкового наближення; метод в будь-якому випадку знайде корінь з заданою точністю. Проведено порівняння результатів обчислень коренів функцій, які проводилися за допомогою методу дихотомії, методу «3/5» і розробленого алгоритму. Встановлено, що ефективність запропонованого методу перевищує ефективність обох методів – гібрідієнтов, коли вони застосовуються окремо. Розроблений метод застосований до розв'язання характеристичного рівняння в задачі визначення власних частот коливань рідини в жорсткому резервуарі, що має форму оболонки обертання. Вважалось, що рідина в резервуарі є ідеальною та нестисливою, а її рух, викликаний дією зовнішніх навантажень, є безвихровим. В цих умовах існує потенціал швидкостей для опису руху рідини. Наведено формулювання зазначеної задачі та вказано метод зведення цієї здачі до розв'язання нелінійного рівняння, що є характеристичним рівнянням для відповідної проблеми власних значень. При цьому застосовувались методи інтегральних сингулярних рівнянь та метод граничних елементів для їх числового розв'язання. Розглянуто задачу про коливання рідини в жорсткому циліндричному резервуарі. Проведено порівняння результатів розрахунку частот коливань рідини, отриманих різними методами, для різної кількості вузлових діаметрів. Відзначено, що якщо локалізовано корінь характеристичного рівняння за допомогою наближених методик, то його уточнення може бути здійснено з використанням запропонованого підходу.

Ключові слова: *гібридний адаптивний метод, корені негладких функцій, коливання рідини в жорстких резервуарах, характеристичне рівняння*

1 Введение

Задачи поиска корней функций произвольного вида возникают во многих инженерных приложениях, при решении экстремальных задач. В задачах поиска оптимальных параметров элементов конструкций процедура нахождения корней и экстремумов негладких функций является одной из составляющих метода оптимизации. Так, в работе [1] подобные процедуры использованы при решении задачи об определении оптимальных параметров летательного аппарата, которые регулируют динамику полета. В [2] с помощью методов локализации корней и экстремумов получены оптимальные параметры крупногабаритных ветроустановок. Задачи отстройки аппаратуры от нежелательных резонансных частот приводят к необходимости нахождения корней характеристических уравнений. В [3] рассмотрена задача об определении собственных частот сосудов высокого давления, частично заполненных жидкостью, в [4,5] определены собственные частоты колебаний жидкости в цилиндрических оболочках при наличии кольцевых и конических перегородок. Данная статья посвящена построению нового эффективного варианта поиска корня функции одной переменной. На сегодняшний день существует довольно много методов нахождения корня функции одной переменной, которые обладают разной эффективностью, а также имеют свои преимущества и недостатки: одни требуют большего времени для расчетов, но взамен дают более точный результат, другие расходуют меньше ресурсов в ущерб точности [6,7]. Поскольку человечество продолжает развиваться и стремиться к совершенству по мере своего развития, до сих пор разрабатываются новые методы, которые давали бы наиболее точный результат с наименьшей ресурсозатратностью [8,9]. В этой статье предложен новый метод, который удалось разработать, опираясь на уже существующие алгоритмы поиска корня нелинейной функции одной переменной [10], путем комбинирования различных методик с целью достижения наилучшего результата. Метод применен к уточненному расчету частот колебаний жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре.

2 Общая постановка задачи о колебаниях жидкости в жестком резервуаре и сведение ее к решению нелинейного уравнения

Рассматривается жесткая оболочка вращения, частично заполненная идеальной несжимаемой жидкостью, рис.2.1.

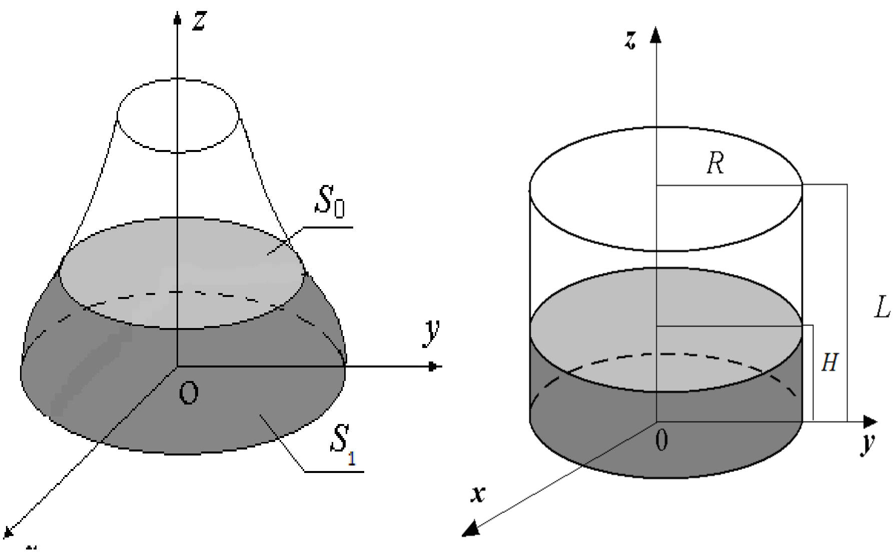

Рис. 2.1. Оболочки вращения, содержащие жидкость

Здесь S_0, S_1 - свободная поверхность жидкости и смоченная поверхность оболочки. Предположим, что с оболочкой связана декартова система координат Оxyz, при этом свободная поверхность жидкости в состоянии покоя совпадает с плоскостью $z = H$, H – уровень заполнения оболочки жидкостью.

Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее движение, индуцированное внешними воздействиями, является безвихревым. При этом можно ввести потенциал скоростей Φ, удовлетворяющий уравнению Лапласа [4]. Тогда проблема определения собственных частот жидкости в оболочке сводится к следующей краевой задаче для этого уравнения [5]:

$$\Delta\Phi = 0, \quad \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right|_{S_0} + g\left.\frac{\partial\Phi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_1} = 0\,. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{n}$ - внешняя единичная нормаль к рассматриваемой поверхности, g - ускорение свободного падения, t - время.

Для однозначной разрешимости указанной краевой задачи необходимо выполнение условия Неймана в виде

$$\int_{S_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0 \,. \tag{2.2}$$

Требуется найти частоты и формы колебаний жидкости, заполняющей оболочку.

Поскольку рассматривается задача о колебаниях жидкости, неизвестный потенциал скоростей Ф можно представить следующим образом:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \varphi(\mathbf{r})e^{i\omega t}, \quad i^2 = -1, \quad \mathbf{r} = (x, y, z). \tag{2.3}$$

Тогда краевая задача (2.1)-(2.2) сводится к проблеме собственных значений

$$\Delta\varphi = 0, \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_0} = \frac{\omega^2}{g}\varphi\big|_{S_0}, \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{S_1} = 0, \ \iint_{S_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS_0 = 0. \tag{2.4}$$

относительно собственных частот ω. Для определения функции φ использован метод граничных элементов в прямой формулировке, разработанный C. Brebbia в [11]. При этом используется интегральное представление

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{r(P,P_0)} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{r(P,P_0)} dS, \quad S = S_0 \cup S_1 \,, \tag{2.5}$$

в котором точки P и P_0 находятся на поверхности интегрирования и представляют собой текущую точку на поверхности и точку коллокации [11], $r(P,P_0)$ – декартово расстояние между указанными точками. С использованием (2.5) и введением интегральных операторов **A**, **B**, **C**, **D**, **F** аналогично [5]

$$\mathbf{A}\varphi = 2\pi\mathbf{I}\varphi + \iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{r(P,P_0)} dS \,, \mathbf{B}\varphi_0 = \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS, \ \mathbf{C}\varphi_0 = \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dS \,,$$

$$\mathbf{D}\varphi = -\iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|P-P_0|} dS \,, \ \mathbf{F}\varphi_0 = \iint_{S_0} \varphi_0 \frac{1}{r} dS \,. \tag{2.6}$$

приводим краевую задачу (2.4) к следующей операторной форме:

$$\mathbf{A}\varphi = \frac{\omega^2}{g}\mathbf{B}\varphi_0 - \mathbf{C}\varphi_0, \qquad P_0 \in S_1, \mathbf{D}\varphi = 2\pi\mathbf{I}\varphi_0 - \frac{\omega^2}{g}\mathbf{F}\varphi_0, \qquad P_0 \in S_0 \,. \tag{2.7}$$

В формулах (2.6) и (2.7) функции φ_0 и φ представляют собой неизвестные значения потенциала скоростей на свободной и смоченной поверхностях, ограничивающих объем жидкости, соответственно. Исключив из уравнений (2.7) функцию φ, приходим к проблеме собственных значений в операторной форме относительно неизвестных значений потенциала φ_0 на свободной поверхности

$$(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{C} + 2\pi\mathbf{I})\varphi_0 - \lambda(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{F})\varphi_0 = 0, \quad \lambda = \omega^2 / g. \tag{2.8}$$

Матричный вид операторов **A**, **B**, **C**, **D**, **F** с использованием метода граничных элементов [11] получен в [5].

Собственные значения и собственные векторы проблемы собственных значений (2.8) являются частотами и формами свободных колебаний жидкости в рассматриваемой оболочке вращения. Уравнение (2.8) далее используем как характеристическое уравнение для определения собственных значений в виде

$$\det[(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{C} + 2\pi\mathbf{I}) - \lambda(\mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{F})] = 0. \tag{2.9}$$

Отметим, что уравнение (2.9) является нелинейным, представляет собой характеристический многочлен, степень которого зависит от количества граничных элементов на свободной поверхности.

3. Адаптивный метод нахождения корней негладкой функции

Рассмотрим произвольную нелинейную функцию $f(x)$ на интервале $[a; b]$ (рис.3.1). Пусть известно, что корень находится в этом интервале, и требуется уточнить его местоположение.

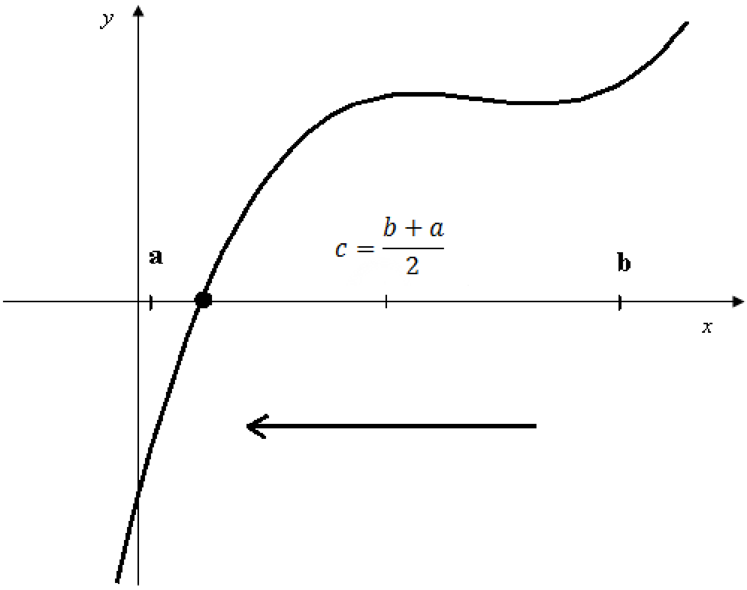

Рис. 3.1. Общий вид нелинейной функции

Метод, с помощью которого мы будем искать корень, является адаптивным и основан на гибридизации нескольких уже существующих алгоритмов [10].

Осуществляем первый шаг поиска с помощью деления интервала пополам. Полученную точку объявляем стартовой, и выполняем из нее «шаги» в сторону искомого корня. Определив среднюю точку на интервале, сравниваем знаки функции на границах интервала и в этой точке. Здесь взята идея метода дихотомии: отсекается тот участок, знаки у которого на конце участка и в точке совпадают [6]. Таким образом, интервал, в котором разыскивается корень, сразу сокращается вдвое. На рис.2 стрелка указывает направление, в котором будут производиться дальнейшие «шаги».

Далее нам нужно попасть в следующую точку, где может оказаться предполагаемый корень. Чтобы это осуществить, мы рассчитываем «шаг» с помощью «метода 3/5» [6]. Получаем следующую точку (рис.3.2).

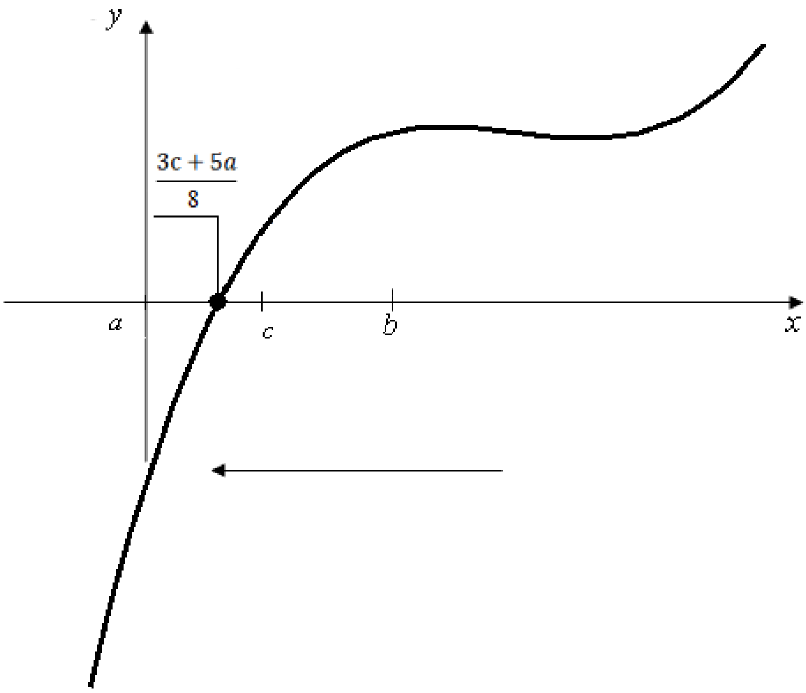

Рис. 3.2.Локализация корня

Далее вычисления происходит согласно методу дихотомии: сравниваются знаки, и отсекается участок, в котором корень не лоцируется. Однако, если продолжать поиск таким образом, есть вероятность выйти за границы интервала или «переступить» корень. Для этого были введены дополнительные условия: на каждом шаге проверялось условие попадания полученной точки в заданный интервал. Направление поиска также меняется в зависимости от результата сравнения знаков. Также, результат применения формулы «3/5» изменялся путем деления пополам, если выяснялось, что шаг поиска слишком большой, а, если наблюдался выход за границы интервала, шаг делается в обратном направлении. Таким образом, мы видим, что гибридизация нескольких методов приближённого вычисления корня нелинейной функции одной переменной, даёт адаптивный алгоритм поиска.

Эффективность полученного метода оказалась выше, чем у методов дихотомии и «3/5» при их применении по отдельности. Об этом свидетельствуют данные, приведенные ниже.

Рассматривались функции $f_1(x) = e^x - e^{-x} - 2$ и $f_2(x) = 3x - 4\ln x - 5 = 0$. В таблице 3.1 приведено сравнение результатов, полученных тремя методами: дихотомии, «3/5» и разработанного адаптивного метода. Сравнивались точность вычисления и количество сделанных шагов.

В таблице 3.1 приведено сравнение результатов, полученных тремя методами: дихотомии, «3/5» и разработанного адаптивного метода. С помощью каждого метода выполнялось 10 шагов.

Таблица 3.1. Сравнение эффективности методов поиска корней

Метод	$f_1(x)$, $x^* = 0{,}8800$	$f_2(x)$, $x^* = 0{,}3800$
Дихотомия	10 шагов и значение 0,8818	10 шагов и значение 0,3821
«3/5»	13 шагов и значение 0,8815	11 шагов и значение 0,3818
Гибридный	8 шагов и значение 0,8811	7 шагов и значение 0,3800

Результаты вычислений свидетельствуют об эффективности разработанного алгоритма для выбранных функций.

4 Расчет собственных колебаний жидкости в цилиндрическом резервуаре

Рассмотрим цилиндрическую оболочку с плоским дном, частично заполненную жидкостью.

Параметры резервуара следующие: радиус R = 1м, длина L = 2м. Уровень заполнения оболочки H = 1.0м, рис.2.1.

В таблице 4.1 приведены частоты колебаний жидкости в жестком цилиндрическом резервуаре, поученные различными методами. Аналитическое решение приведено в [12], значения частот в [13] получены с помощью QZ - алгоритма в обобщенной проблеме собственных значений.

Таблица 4.1. Сравнение частот колебаний жидкости, полученных разными методами

α	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Аналитическое решение	3.828108	1.7507975	3.0406821
Метод [13]	3.829121	1.7508223	3.0412861
Гибридный метод	3.828110	1.7507984	3.0406886

Результаты расчетов свидетельствуют о том, что применение гибридного адаптивного метода приводит к уточненным значениям частот в сравнении с результатами, полученными по методике, приведенной в работах [4,13]. Отметим, что если локализован корень характеристического уравнения с помощью приближенных методик, то его уточнение может быть осуществлено с использованием предложенного подхода.

5 Выводы

Рассматривая преимущества и недостатки разработанного метода поиска корней функций произвольного вида, можно отметить, что такой подход позволяет обнаруживать корень даже при наличии точки перегиба, что, например, невозможно для метода Ньютона. То есть, точность нахождения корня с помощью предложенного алгоритма не зависит от вида функции, метод в любом случае найдет корень с заданной точностью. К недостаткам метода следует отнести необходимость предварительного отделения корней. В дальнейшем предполагается разработка гибридных адаптивных методов решения систем нелинейных уравнений и применение разработанных подходов к решению практических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Makeev V. I., Strelnikova E. A., *Trofimenko* P. E., Bondar A. V. On Choice of Design Parameters for an Aircraft. *Int. Appl. Mech*, 2013. 49, N 5. P. 588 – 596.
2. Дегтярев К. Г., Стрельникова Е. А., Шелудько Г. А. Компьютерное моделирование лопастей ветроустановок с оптимальными *параметрами. Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*. № 19. 2012. С. 81-86.
3. Еселева Е.В, Гнитько В.И., Стрельникова Е.А., *Собственные* колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью, *Проблемы машиностроения.* 2006. №1. С.105-118.
4. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles. *Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences.* 2016. Vol. 1. no. 1., P.14-27.
5. Gnitko, V., Naumemko, Y., Strelnikova E. Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering, 22 (4), pp.867-881, 2017.*
6. Haeussler E.F., Paul R.S., Wood R.J. Introductory Mathematical analysis for Business, Economics, and Life and Social Sciences. *Printice Hall. Boston. 2011.*
7. Ugboh U.A., Esuabanna I.M. A new Numerical Method for finding Roots of Algebraic and Transcendental Equations. *American Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2019. 9(1). p. 6-11.
8. Victor Y. Pan et al. “Real root-finding”. In:SNC: International workshop on Symbolic-numeric computation (London, Ontario, Canada, 2007). *New York, NY, USA: Association for Computing Machinery.* 2007, pp. 161–169.
9. Fabrice Rouillier and Paul Zimmermann. Efficient isolation of polynomial’s real roots. Journal of Computational and Applied Mathematics. *162.1 (Proceedings of the interna-tional conference on linear algebra and arithmetic 2004), pp. 33–50.*
10. Шелудько, Г. А. Гибридные методы в задачах оптимального проектирования. 1. Поисковые методы / *Г. А. Шелудько, Е. А. Стрельникова, Б. Я. Кантор. Харьков : Новое слово, 2008. 188 с.*
11. Brebbia, C.A, Telles, J.C.F & Wrobel, L.C., Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag*: Berlin and New York*, 1984.
12. R.A. Ibrahim. Liquid Sloshing Dynamics. *Cambridge University Press, New York, 2005.*
13. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D. , Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles. *J. Modern Technology & Engineering.* Vol.3. No.1. pp.15-52. 2018.

REFERENCES

1. Makeev V. I., Strelnikova E. A., Trofimenko P. E., Bondar A. V., “On Choice of Design Parameters for an Aircraft”, *Int. Appl. Mech., 49, N. 5, P. 588 – 596. 2013.*

2. Degtyarev K. G., Strelnikova E. A., Sheludko G. A. “Kompyuternoe modelirovanie lopastey vetroustanovok s optimalnyimi parametrami”, *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems»”*, issue 46, 2020, 2012, N 19, P. 81-86.

3. Eseleva E.V, Gnitko V.I., Strelnikova E.A., *Sobstvennyie kolebaniya sosudov vyisokogo davleniya pri vzaimodeystvii s zhidkostyu, Problemyi mashinostroeniya,* 2006, N 1, S.105-118.

4. Degtyarev K., Gnitko V., Naumenko V., *“*Strelnikova E. Reduced Boundary Element Method for Liquid Sloshing Analysis of Cylindrical and Conical Tanks with Baffles*”. Int. Journal of Electronic Engineering and Computer Sciences.* 2016. Vol. 1, no. 1, P.14-27.

5. Gnitko, V., Naumemko, Y., Strelnikova E. “Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles”, International Journal of Applied Mechanics and Engineering, 22 (4), pp.867-881, 2017.

6. *Haeussler E.F., Paul R.S., Wood R.J. Introductory Mathematical analysis for Business, Economics, and Life and Social Sciences. Printice Hall, Boston, 2011.*

7. Ugboh U.A., Esuabanna I.M. “A new Numerical Method for finding Roots of Algebraic and Transcendental Equations” *American Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 9(1), p. 6-11.*

8. Victor Y. Pan et al. “Real root-finding*”. In:SNC: International workshop on Symbolic-*numeric *computation (London, Ontario, Canada, 2007). New York, NY, USA: Association for Computing Machinery,* 2007, pp. 161–169.

9. Fabrice Rouillier and Paul Zimmermann. *“*Efficient isolation of polynomial’s real roots*”. Journal of Computational and Applied Mathematics, 162.1 (*Proceedings of the international conference on linear algebra and arithmetic 2004), pp. 33–50.

10. Sheludko, G. A. Gibridnyie metodyi v zadachah optimalnogo proektirovaniya. 1. *Poiskovyie metodyi / G. A. Sheludko, E. A. Strelnikova, B. Ya. Kantor,* Harkov: Novoe slovo, 2008. 188 s.

11. Brebbia, C.A, Telles, J.C.F & Wrobel, L.C., *Boundary element techniques: theory and applications in engineering. Springer-Verlag:* Berlin and New York, 1984.

12. R.A. Ibrahim*. Liquid Sloshing Dynamics.* Cambridge University Press, New York, 2005.

13. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko *Y. “*Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles*”, J. Modern Technology & Engineering,* Vol.3, No.1, pp.15-52, 2018.

Надійшла у першій редакції 10.03.2020, в останній – 11.06.2020.