

УДК 519.71:534.1

Дослідження хаотичної динаміки вертикальної стійки тіла людини на моделі переверненого маятника

П.С. Гриневіч¹, Н.М. Кізілова¹

¹Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
e-mail: grinevich.fb@gmail.com

Досліджуються функції управління вертикальною стійкою людини з урахуванням нелінійної динаміки коливань центру маси (ЦМ) (X_C, Y_C) тіла. Часові ряди $X_C(t), Y_C(t)$ вимірювалися за допомогою стабілографічної платформи у 28 молодих здорових волонтерів; три види стійки на двох ногах з відкритими та заплющеними очима і балансування на одній нозі були досліджені. Для кожного випадку на основі математичної моделі переверненого маятника обчислені функції керування його вертикальним положенням $u(t)$ у вигляді $u(t) = k_1(r(t) - r_0) + k_2(\dot{r}(t) - \dot{r}_0)$, де $r(t)$ – радіус-вектор ЦМ, r_0 – його середнє за час випробувань значення, $(\dot{})$ означає похідну за часом. За допомогою статистичного аналізу показана відсутність кореляцій між функціями керування як для різних випробуваних, так і для різних положень тіла одного випробуваного. Грунтуючись на обчисленнях експоненти Ляпунова, проведена класифікація випробуваних на групи з стійким, слабко та сильно нестійким керуванням вертикальним положенням тіла. Обговорюється моделювання таких динамічних систем в рамках моделей недетермінованого хаосу з нелінійним керуванням.

Ключові слова: математичне моделювання, перевернений маятник, функція керування, експонента Ляпунова, хаотична динамка, опорно-рухова система, медична діагностика.

Исследуются функции управления вертикальной стойкой человека с учетом нелинейной динамики колебаний центра массы (ЦМ) (X_C, Y_C) тела. Временные ряды $X_C(t), Y_C(t)$ измерялись с помощью стабилиграфической платформы у 28 молодых здоровых волонтеров; три вида стойки на двух ногах с открытыми и закрытыми глазами и балансирование на одной ноге были исследованы. Для каждого случая на основе математической модели перевернутого маятника вычисленные функции управления его вертикальным положением $u(t)$ в виде $u(t) = k_1(r(t) - r_0) + k_2(\dot{r}(t) - \dot{r}_0)$, где $r(t)$ – радиус-вектор ЦМ, r_0 – его среднее за время испытаний значение, $(\dot{})$ означает производную по времени. С помощью статистического анализа показано отсутствие корреляций между функциями управления как для разных испытуемых, так и для различных положений тела одного волонтера. Основываясь на вычислениях экспоненты Ляпунова, проведена классификация испытуемых на группы с устойчивым, слабо и сильно неустойчивым управлением вертикальным положением тела. Обсуждается моделирование таких динамических систем в рамках моделей недетерминированного хаоса с нелинейным управлением.

Ключевые слова: математическое моделирование, перевернутый маятник, функция управления, экспонента Ляпунова, хаотичная динамка, опорно-двигательная система, медицинская диагностика.

Different stances of human body are studied in medicine and biology for quantitative estimation and clinical diagnostics of impairments and diseases of the musculoskeletal, nervous, vestibular systems and functions. Human body is composed of ~200 bones and ~600 muscles, and its upright position is unstable due to high complexity of the system and its control mechanisms. Among different techniques of the body sway recording the stabilography is one of the most simple and cheap unit. It is composed by a force platform that can measure the reaction forces over the contact areas between two feet and the platform. The former is portable and can be connected to any laptop via USB port. In this study the functions controlling the vertical stance of a person are studied accounting for the nonlinear dynamics of oscillations of the projection (X_C, Y_C) of center of mass (CM) of the body on the horizontal plane. The time series $\{X_C(t), Y_C(t)\}$ have been measured on 28 healthy volunteers (age 21-42, height 156-182 cm, body mass 48-84.8 kg). The volunteers were asked to keep a quiet stance on two feet, similar stances with body mass shifted onto the left and then onto the right leg. Each stance has been repeated during 30 s with open and then with closed eyes. After a short break a test with balancing on the left and then on the right leg has been performed. For each case, based on the mathematical model of the inverted pendulum, the calculated control functions $u(t)$ in the form $u(t) = k_1(r(t) - r_0) + k_2(\dot{r}(t) - \dot{r}_0)$, where $r(t)$ is the radius-vector of the CM, r_0 is its averaged value over time, $(\dot{})$ means the time derivative. Using statistical analysis, the absence of correlations between the control functions for both different subjects and for different positions of the body of the same volunteer was shown. Based on the calculations of the Lyapunov exponent, the individuals have been classified into groups with stable, weakly and highly unstable control of the vertical position of the body. The modeling of such systems in the framework of nondeterministic chaos models with nonlinear control is discussed.

Keywords: mathematical modeling, inverted pendulum, control function, Lyapunov exponent, chaotic dynamics, musculoskeletal system, medical diagnostics.

1 Вступ

Дослідження динамічних параметрів вертикальної стійки людини є важливою складовою компонентою медичної діагностики захворювань як опорно-рухової (ОРС), так і нервової, вестибулярної та ряду інших систем людини [1]. За допомогою спектрального та вейвліт-аналізу була показана наявність як квазі-регулярних, так і хаотичних режимів коливань центру мас (ЦМ) проекції тіла людини на горизонтальну поверхню стабілографічної платформи [2], в залежності від її віку та наявності захворювань. Останнім часом посилилася зацікавленість до вивчення особливостей хаотичної динаміки, розробки відповідних математичних моделей та індексів, що

могли б використатися в клінічній діагностиці. Одним з таких важливих параметрів є максимальна експонента Ляпунова (largest Lyapunov exponent, LLE).

Експонента Ляпунова характеризує швидкість сепарації $\delta\vec{r}(t) = |\vec{r}_0(t) - \vec{r}(t)|$ в фазовому просторі траєкторій динамічної системи $\vec{r}_0(t)$ і $\vec{r}(t)$, які в початковий момент часу $t=0$ знаходилися нескінченно близько одна від одної $\delta\vec{r}_0 = |\vec{r}_0(0) - \vec{r}(0)| < \varepsilon$. Якщо $|\vec{r}_0(t) - \vec{r}(t)| = \delta\vec{r}_0 \cdot \exp(\lambda t)$, то $\lambda_L = \text{Re}(\lambda)$ називається експонентою Ляпунова. Якщо система нестійка, $\text{Re}(\lambda) > 0$. У випадку, коли траєкторії описуються системою n лінійних звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку з постійними коефіцієнтами

$$\vec{r}'(t) = A \cdot \vec{r}(t) + \vec{f}(t) + \vec{u}(t), \quad (1)$$

де A - матриця коефіцієнтів системи, $\vec{f}(t)$ - зовнішні сили, $\vec{u}(t)$ - функція керування, то дійсні частини власних чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ є експонентами Ляпунова. Якщо $\text{Re}\{\lambda_j\}_{j=1}^n \equiv \lambda_{Lj} > 0$, всі траєкторії сходяться в одній точці. Значення $(\lambda_{Lj})^{-1}$ називаються часом Ляпунова. Це є час, за який відстань між сусідніми траєкторіями системи зростає в e разів. В консервативній системі $\sum_j \lambda_j = 0$, а в дисипативній системі $\sum_j \lambda_j < 0$.

Особливий інтерес представляє максимальна експонента Ляпунова LLE

$$\lambda_{\max} = \limlim_{t \rightarrow \infty, \delta r_0 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} \ln \left(\frac{|\delta\vec{r}(t)|}{|\delta\vec{r}_0|} \right) \right). \quad (2)$$

Максимальний час Ляпунова LLE^{-1} – це інтервал часу, протягом якого можливо передбачати еволюцію системи, тому що зміни її начального стану при $t < (\lambda_{\max})^{-1}$ не ведуть до суттєвої зміни її поведінки, але при $t \gg (\lambda_{\max})^{-1}$ «пам'ять» о параметрах початкового стану втрачається. Максимальний час Ляпунова задає міру для передбачуваності системи, але часто становлять інтерес оцінки локальної передбачуваності навколо деякої точки в фазовому просторі – так званої короткочасної (short-time) експоненти Ляпунова (STEL). Якщо динаміка системи визначається нелінійною системою ЗДУ, для обчислення значень λ_j використовують інші методи і чисельні алгоритми (лінеаризації та послідовних наближень). А.М. Ляпунов показав, що якщо система першого наближення регулярна, а її $LLE < 0$, то рішення вихідної системи асимптотично стійко. Пізніше О. Перон продемонстрував, що вимога регулярності першого наближення є істотною, і є приклади, коли $LLE < 0$ вздовж нульового рішення першого наближення, але це рішення є нестійким за Ляпуновим. Крім того, значення $LLE > 0$ можуть не означати перехід системи до хаосу.

Наявність хаотичної динаміки у вигляді випадкових змін знаків STEL електроенцефалограм, електроміограм, мовних сигналів та стабілограм була показана в ряді публікацій [1-6]. Було виявлено, що функції керування осциляціями во фронтальній (вліво-вправо) та сагітальній (вперед-назад) площинах мають різні властивості. Осциляції ЦМ можна представити у вигляді суми квазіперіодичної та стохастичної компонент, причому друга компонента не має само подібності і тому не є детермінованим хаосом [5]. Показники LLE і STEL можуть вказувати на вікові порушення OPC [6], але у здорових випробуваних потрібно вживати синтетичні коефіцієнти LLE і STEL для ускладнених сигналів, наприклад, у вигляді амплітуд осциляцій між різними сегментами тіла або з додаванням додаткового руху верхніми кінцівками, несподіваним рухом стабілографічної платформи та інших [4]. В даній роботі вивчається хаотична динаміка осциляцій тіла здорових волонтерів з виключенням зорового контролю для різних станів тіла.

2 Матеріали та методи

Координати $(X_C(t), Y_C(t))$ проекції ЦМ тіла волонтерів на горизонтальну поверхню вимірювалися за допомогою стабілографічної платформи лабораторії біомеханіки Інституту патології хребта і суглобів ім. М.І. Ситенко [1,2] (12 юнаків та 16 дівчат віком 31 ± 11 і 33.5 ± 16.5 , масою 71.4 ± 13.4 кг і 64.4 ± 16.4 кг та зростом 182 ± 8 кг і 169 ± 13 см відповідно). Процедура вимірювання складалася з (i) утримання спокійної двоногостійкої в положенні «смирно» (Рис.1а), потім «вільно» з переносом маси тіла на (ii) праву та (iii) ліву ноги, балансування на (iv)

правій та (v) лівій ногах, по 30 с кожний тест. Після три перші тести повторювалися з заплющеними очима (vi), (vii), (viii). Набори часових рядів $(X_C(t), Y_C(t))$ для восьми тестів зберігалися в базі даних. Після згладжування кривих методом зваженого середнього, який дозволяє зберігати значення локальних максимумів і мінімумів функції, шляхом виключення з залежностей часу, будувалися траєкторії $Y_C(X_C)$ (Рис.1б).

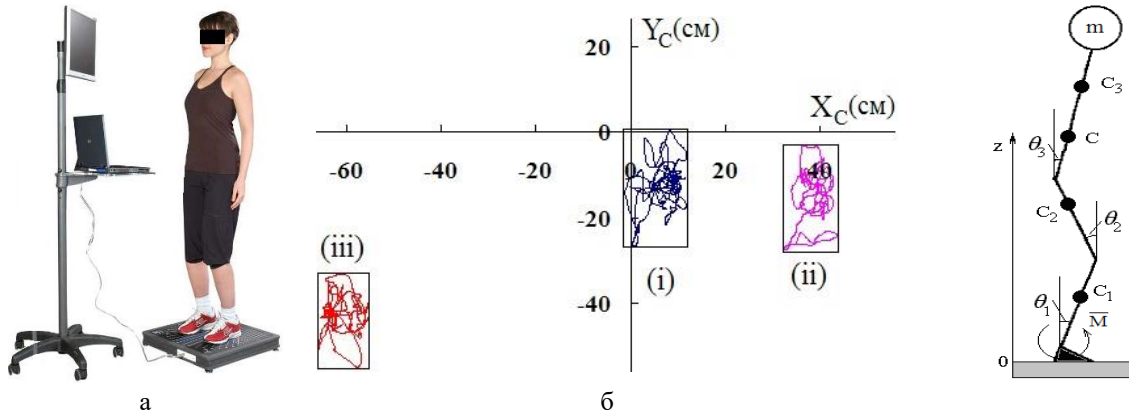


Рис.1 Платформа стабілографа разом з комп'ютерною системою (а), вигляд траєкторій $(X_C(t), Y_C(t))$ для тестів (i), (ii) та (iii) (б) і три ланкова модель тіла людини (в).

Прямокутники на Рис.1б показують амплітуди коливань ЦМ у фронтальній (вдвож OY) та сагітальній (вдвож OX) площинах. Асиметрія розташування ЦМ та хаотична динаміка властиві кожному з тестів. При балансуванні з заплющеними очима амплітуда коливань зростає в середньому в 2 рази, тоді як при балансі на одній нозі спостерігається парадоксальна стабілізація коливань за рахунок більш чіткого керування [1,2]. Далі проводилося чисельне диференціювання кривих $X_C(t), Y_C(t)$ і будувалися фазові криві $f(f), f'(f), f''(f)$, де $f=\{X_C, Y_C\}$. Далі проводилися обчислення експоненти Ляпунова з використанням алгоритму Вольфа [7]:

- 1) Фіксуємо деякий малий зсув τ кривих $X_C(t), Y_C(t)$ за часом;
- 2) Визначаємо початкове положення $X_C(0), Y_C(0)$ кривих;
- 3) Знаходимо таке значення t_1 , щоб $|X(t_1) - X(0)| < \varepsilon$, де ε - задане мале значення, яке перевищує частоту дискретизації кривих $X_C(t), Y_C(t)$;
- 4) Якщо такого значення t_1 не існує, обираємо t_1 таке, щоб $|X(t_1) - X(0)| = \min_k |X(t_k) - X(0)|$;
- 5) Обчислюємо перше наближення експоненти Ляпунова $\lambda_1(0) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{|X(t_1 + \tau) - X(\tau)|}{|X(t_1) - X(0)|}$;
- 6) Знаходимо t_2 так само як в 3)-4);
- 7) Обчислюємо друге наближення експоненти Ляпунова $\lambda_1(\tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{|X(t_2 + \tau) - X(2\tau)|}{|X(t_2) - X(\tau)|}$;
- 8) Повторюємо 6)-7) і обчислюємо наближення $\lambda_1(2\tau), \lambda_1(3\tau), \dots$ до досягнення потрібного часу t , після чого повертаємося до 1), трохи збільшуємо значення τ та знаходимо наближення $\lambda_2(0), \lambda_2(\tau), \lambda_2(2\tau), \lambda_2(3\tau), \dots$;
- 9) Після кількох ітерацій алгоритму 1)-8) остаточно обчислюємо експоненту Ляпунова як

$$\lambda = \left(\frac{m+2}{2}\right)^{-1} \sum_{k=m/2}^m \left(\frac{n_k+2}{2}\right)^{-1} \sum_{j=n_k/2}^{n_k} \lambda_k(j\tau). \quad (3)$$

3 Математична модель

Найбільш поширеною моделлю ОРС людини є багатоланковий перевернутий маятник [1,2]. В одноланковій моделі управління вертикальним положенням тіла здійснюється за допомогою моменту сил, які прикладені в точці «підвісу» маятника (тобто в гомілковостопному суглобі) за рахунок напруження-розслаблення всіх м'язів ніг. Найпростіше рівняння коливань такого маятника без урахування тертя в точці підвісу та ін. чинників) має вигляд:

$$\left(m + \frac{J_x}{L^2}\right)\ddot{x}(t) - mgx(t) = u_x(t), \quad \left(m + \frac{J_y}{L^2}\right)\ddot{y}(t) - mgy(t) = u_y(t), \quad (4)$$

де m – маса тіла, $J_{x,y}$ – моменти інерції відносно осей OX, OY , $g=9.81$ м/с² – прискорення вільного падіння $\ddot{u}(t)=(u_x(t), u_y(t))$ – управління коливаннями у фронтальній та сагітальній площинах. Система (4) може бути зведена до системи вигляду (1) з $n=4$. Після підстановки в (4) вимірних кривих $X_C(t), Y_C(t)$, функції керування $u_x(t), u_y(t)$ можуть бути безпосередньо обчислені.

Для р-ланкового маятника положення j -го ланцюга визначається кутом $\theta_j(t)$ його нахилу до вертикалі, а система (4) набуває вигляд [8] (приклад для $p=3$ наведений на Рис.1в):

$$M \cdot \frac{d^2}{dt^2} \bar{\theta} + C(\dot{\bar{\theta}})^2 + N \cdot \bar{\theta} = 0, \quad (5)$$

де $\bar{\theta}^T = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$, T - транспозиція, M , C і N – матриці мас-інерційних, Кориолісових і гравітаційних коефіцієнтів. Для звичкої спокійної стойки кути відхилення та їх похідні за часом малі, і (5) зводиться до лінійної системи, або до системи вигляду (1) з $n=4p$. Методи розв'язання нелінійних систем (5) для ОРС людини широко обговорюються в літературі [1,2,8].

4 Результати та обговорення

Типовий приклад функцій керування $(u_x(t), u_y(t))$, обчислений з (4) для двоногій стойки одного з досліджуваних, наведений при наявності (Рис.2а) та відсутності (Рис.2б) додаткового зорового контролю за підтриманням пози. Самокореляції для кожної з залежностей, а також кореляції між $u_x(t)$ і $u_y(t)$ відсутні, що вказує на незв'язаний характер обробки сигналів, які виходять з кожного з півкруглих каналів органу рівноваги, нервовою системою. Можливі взаємозв'язки такими сигналами поки що недостатньо вивчені [8]. Найпростіший підхід, який розглядає окремо керування за кутом відхилення тіла від вертикалі та за швидкістю відхилення у вигляді $u_x(t)=k_{x1}(X(t)-X_0) + k_{x2}(X'(t)-X'_0)$, $u_y(t)=k_{y1}(Y(t)-Y_0)+ k_{y2}(Y'(t)- Y'_0)$, показує, що не існує постійних коефіцієнтів k_{x1} , k_{x2} , k_{y1} , k_{y2} . Амплітуди керування вищі, а спектр більш складніший під час заплющених очей, що відповідає майже подвійному зростанню амплітуди самих коливань, що було виявлено в [1,2].

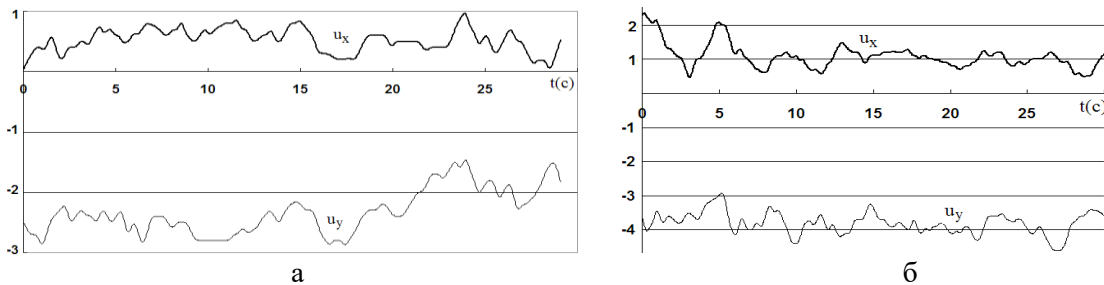


Рис.2 Керування $u_x(t), u_y(t)$ для 30 с двоногій стойки з розплющеними (а) та заплющеними (б) очима для одного з випробуваних.

Середні значення $\langle LLE \rangle$ для групи досліджених випробуваних для кожного з виконаних тестів наведені на Рис.3а. Загальні значення для здорових випробуваних ($LLE < 0.2$) значно менші ніж аналогічні коефіцієнти, обчислені для груп літніх випробуваних та пацієнтів з патологіями ОРС ($0.4 < LLE < 0.6$) [4-6]. При переході від двоногій (i) до переносу маси тіла на одну ногу (ii), (iii), невизначеність коливань в середньому підвищується, хоча для окремих випробуваних спостерігалася і протилежна динаміка. При переході до тестів із заплющеними очима хаотичність коливань різко зростала (iv), але з часом при переході до (v) і (vi) поступово зменшувалась, можливо, за рахунок звикання системи контролю до тестів такого вигляду. Балансування на одній нозі характеризувався меншими значеннями $\langle LLE \rangle$, можливо, за рахунок додаткового напруження системи керування, що відповідає попереднім даним [1,2]. Індивідуальний розкид значень LLE також дуже значний, за виключенням балансу на одній нозі (Рис.3б). Для додаткової перевірки даних Рис.3а,б треба провести тести i-viii в іншому порядку, для виключення адаптації системи контролю (нервової, візуальної, слухової, тактильної), що буде зроблено в подальших експериментальних дослідженнях.

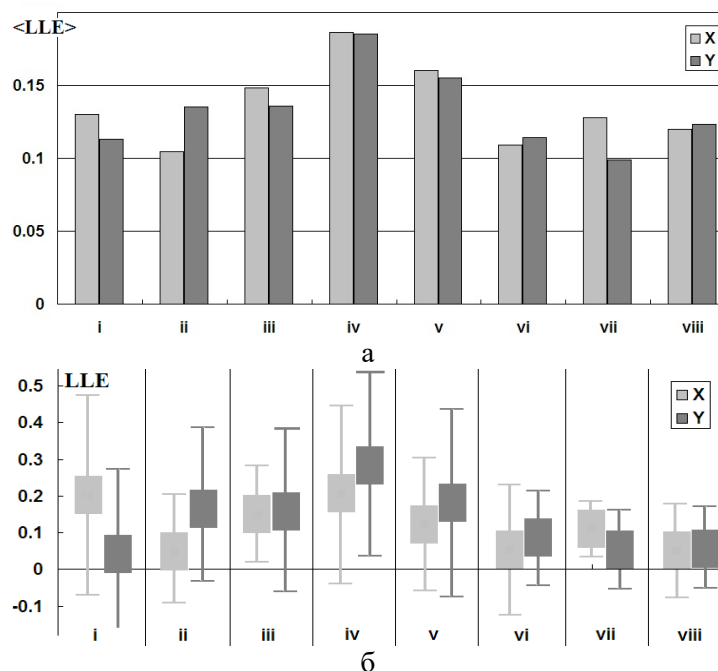


Рис.3 Осереднені за групою значення $\langle LLE \rangle$ для координат $X(t)$, $Y(t)$ (а) та значення з дисперсією (б) для тестів i-viii.

5 Висновки

Таким чином, підтвердилися висновки попередніх досліджень о наявності позитивних значень LLE стабілограм як на всьому часі вимірювань, так і короткочасних (STLE) навіть для комфортних двоопорних положень тіла (i)-(iii). Середні за групою молодих здорових випробуваних значення $LLE < 0.2$ значно нижче, чем значення, які були раніше обчислені для літніх випробуваних та пацієнтів з порушеннями OPC та нервової системи.

Функції керування вертикальним положенням тіла були обчислені для кожного вимірювання у вигляді лінійної комбінації контролю за відхиленням ЦМ та швидкістю відхилення згідно [8]. Показана відсутність кореляцій між функціями керування як для різних випробуваних, так і для різних положень тіла одного випробуваного, що вказує на складний стохастичний характер процесу керування. На основі середніх значень LLE, STLE та індивідуальних відхилень можна провести класифікацію функцій керування випробуваних на групи з стійким ($LLE < 0.1$), слабко ($LLE < 0.15$) та сильно ($LLE > 0.15$) нестійким керуванням вертикальним положенням тіла. Таким чином, результати дослідження вказують, що значення LLE, STLE можуть використовуватися як прогностичні індекси системи контролю OPC індивіда навіть у молодих потенційно здорових досліджених. Крім того, необхідні більш детальні дослідження OPC як динамічної системи в рамках моделей недетермінованого хаосу з нелінійним керуванням.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kizilova N., Karpinsky M., Griškevičius J., Daunoravičienė K. Posturographic study of the human body vibrations for clinical diagnostics of the spine and joint pathology. *Mechanika*. 2009. N6(80). P.37-41.
2. Kizilova N., Karpinsky M., Karpinska E. Quasi-regular and chaotic dynamics of postural sway in human. *Applied Non-Linear Dynamical Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Vol. 93. 2014. P.103-114.
3. Kumar A., Mullick S.K. Nonlinear dynamical analysis of speech. *JASA*. 1996. 100. P. 615-629.
4. Liu K., Wang H., Xiao J., Taha Z. Analysis of human standing balance by largest Lyapunov exponent. *Computational Intelligence and Neuroscience*. 2015. Vol. 2015. 158478.
5. Tokita T., Ito Y., Mizuta K. Analysis of standing posture regulation from the viewpoint of complex systems. *Equilibrium Research*. 2007. Vol. 66 (1). P. 17-25.

6. Khayat O., Nowshiravan-Rahatabad F. Complex feature analysis of center of pressure signal for age-related subject classification. *Annals of Military & Health Sciences Research*. 2014. Vol. 12(1). P. 2-7.
7. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*. 1985. Vol. 16. P. 285–317.
8. Latash M.L., Zatsiorsky V.M. *Classics in Movement Sciences*. Human Kinetics. 2001. 452p.

REFERENCES

1. Kizilova, N., Karpinsky, M., Griškevičius, J., Daunoravičienė, K. “Posturographic study of the human body vibrations for clinical diagnostics of the spine and joint pathology.” *Mechanika*. 2009. N6(80). P.37-41.
2. Kizilova, N., Karpinsky, M., Karpinska, E. “Quasi-regular and chaotic dynamics of postural sway in human.” *Applied Non-Linear Dynamical Systems. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, Vol. 93. 2014. P.103-114.
3. Kumar, A., Mullick, S.K. “Nonlinear dynamical analysis of speech.” *JASA*. 1996. 100. P. 615-629.
4. Liu, K., Wang, H., Xiao, J., Taha, Z. “Analysis of human standing balance by largest Lyapunov exponent.” *Computational Intelligence and Neuroscience*. 2015. Vol. 2015. 158478.
5. Tokita, T., Ito, Y., Mizuta, K. “Analysis of standing posture regulation from the viewpoint of complex systems.” *Equilibrium Research*. 2007. Vol. 66 (1). P. 17-25.
6. Khayat, O., Nowshiravan-Rahatabad, F. “Complex feature analysis of center of pressure signal for age-related subject classification.” *Annals of Military & Health Sciences Research*. 2014. Vol. 12(1). P. 2-7.
7. Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L., Vastano, J.A. “Determining Lyapunov exponents from a time series.” *Physica D*. 1985. Vol. 16. P. 285–317.
8. Latash, M.L., Zatsiorsky, V.M. *Classics in Movement Sciences*. Human Kinetics. 2001. 452p.

Кізілова Наталія Миколаївна – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної математики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Kizilova Natalya M. - DSc, professor of the Department of Applied Mathematics, V. N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Кизилова Наталья Николаевна - доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: n.kizilova@gmail.com; ORCID: 0000-0001-9981-7616.

Гриневич Павло Сергійович – студент факультету математики і інформатики, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 6, Харків 22, Україна, 61022; e-mail: grinevich.fb@gmail.com; ORCID: 0000-0002-8671-4164.

Grynievich Pavlo Sergijovych – student, Faculty of Mathematica and Informatics, V.N. Karazin Kharkiv National University, 4 Svobody Sq., Kharkiv, 61022, Ukraine; ; e-mail: grinevich.fb@gmail.com; ORCID: 0000-0002-8671-4164.

Гриневич Павел Сергеевич – студент факультета математики и информатики, Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков – 22, Украина, 61022; e-mail: grinevich.fb@gmail.com; ORCID: 0000-0002-8671-4164.