DOI: 10.26565/2304-6201-2020-45-02

УДК 519.63

Безсітковий метод для числового вирішення рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку

І.В. Гарячевська, Д.О. Протектор
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна
e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua

У даній статті описується безсітковий метод, який призначений для числового вирішення нелінійного одновимірного нестаціонарного рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку. Безсіткова схема реалізується на основі методу колокації та радіальних базисних функцій. У цьому підході розв'язок диференціального рівняння Кортевега-де Фріза апроксимується радіальними базисними функціями, а метод колокації використовується для знаходження невідомих коефіцієнтів. В якості радіальних базисних функцій в статті використовуються Гаусова, зворотна квадратична, мультиквадратична, зворотна мультиквадратична функції, а також функція Ву з компактним носієм. Дискретизація за часом нелінійного одновимірного нестаціонарного рівняння Кортевега-де Фріза здійснюється з використанням θ-схеми. Даний метод має перевагу перед традиційними числовими методами, такими як метод скінченних різниць і метод скінченних елементів, так як не потребує побудови інтерполяційної сітки всередині області крайової задачі. У безсітковій схемі що розглядається, область розв'язку крайової задачі являє собою набір рівномірно або довільно розподілених вузлів, до яких «прив'язуються» базисні функції. В роботі представлені результати числових вирішень двох тестових задач, які отримані з використанням даного методу. Для оцінки точності апроксимації отриманих розв'язків в статті використовуються середня відносна похибка, середня абсолютна похибка та максимальна похибка. Числові експерименти демонструють високу точність і надійність даного методу вирішення нелінійного одновимірного нестаціонарного рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку.

Ключові слова: *нелінійне одновимірне рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку, нестаціонарна крайова задача, безсітковий метод, радіальні базисні функції з компактним носієм, метод колокацій.*

В данной статье описывается бессеточный метод, предназначенный для численного решения нелинейного одномерного нестационарного уравнения Кортевега-де Фриза седьмого порядка. Бессеточная схема реализуется на основе метода коллокации и радиальных базисных функций. В этом подходе решение дифференциального уравнения Кортевега-де Фриза аппроксимируется радиальными базисными функциями, а метод коллокации используется для нахождения неизвестных коэффициентов. В качестве радиальных базисных функций в статье используются Гауссиан, обратная квадратичная, мультиквадратичная, обратная мультиквадратичная функции, а также функция Ву с компактным носителем. Дискретизация по времени нелинейного одномерного нестационарного уравнения Кортевега-де Фриза осуществляется с использованием θ-схемы. Данный метод имеет преимущество перед традиционными численными методами, такими как метод конечных разностей и метод конечных элементов, так как не требует построения интерполяционной сетки внутри области краевой задачи. В рассматриваемой бессеточной схеме область решения краевой задачи представляет собой набор равномерно или произвольно распределенных узлов, к которым «привязываются» базисные функции. В работе представлены результаты численных решений двух тестовых задач, полученные с использованием данного метода. Для оценки точности аппроксимации полученных решений в статье используются средняя относительная погрешность, средняя абсолютная погрешность и максимальная погрешность. Численные эксперименты демонстрируют высокую точность и надежность описываемого метода решения нелинейного одномерного нестационарного уравнения Кортевега-де Фриза седьмого порядка.

Ключевые слова: *нелинейное одномерное уравнение Кортевега-де Фриза седьмого порядка, нестационарная краевая задача, бессеточный метод, радиальные базисные функции с компактным носителем, метод коллокации.*

This article describes a meshless method for the numerical solution of the seventh-order nonlinear one-dimensional non-stationary Korteweg-de Vries equation. The meshless scheme is based on the use of the collocation method and radial basis functions. In this approach, the solution is approximated by radial basis functions, and the collocation method is used to compute the unknown coefficients. The meshless method uses the following radial basis functions: Gaussian, inverse quadratic, multiquadric, inverse multiquadric and Wu's compactly supported radial basis function. Time discretization of the nonlinear one-dimensional non-stationary Korteweg-de Vries equation is obtained using the θ-scheme. This meshless method has an advantage over traditional numerical methods, such as the finite difference method and the finite element method, because it doesn't require constructing an interpolation grid inside the domain of the boundary-value problem. In this meshless scheme the domain of a boundary-value problem is a set of uniformly or arbitrarily distributed nodes to which the basic functions are "tied". The paper presents the results of the numerical solutions of two benchmark problems which were obtained using this meshless approach. The graphs of the analytical and numerical solutions for benchmark problems were obtained. Accuracy of the method is assessed in terms of the average relative error, the average absolute error, and the maximum error. Numerical experiments demonstrate high accuracy and robustness of the method for solving the seventh-order nonlinear one-dimensional non-stationary Korteweg-de Vries equation.

Keywords: *seventh-order nonlinear one-dimensional Korteweg-de Vries equation, non-stationary boundary-value problem, meshless method, compactly supported radial basis functions, collocation method.*

© Гарячевська І.В., Протектор Д.О., 2020

1 Вступ

У даній статті розглядається нелінійне одновимірне нестаціонарне рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\beta_1 u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\beta_2\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}+\beta_3\frac{\partial^5 u(x,t)}{\partial x^5}+\beta_4\frac{\partial^7 u(x,t)}{\partial x^7}=0 \tag{1.1}$$

де $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4$ – відомі постійні коефіцієнти, $x\in[a,b],\ t\in[0,T]$.

Узагальнене рівняння Кортевега-де Фріза (1.1) широко використовується в прикладних науках і техніці. Рівняння Кортевега-де Фріза вперше було отримано в 1877 році французьким вченим Жозефом Бусінеском, і знову відкрито в 1895 році нідерландськими математиками Дідеріком Кортевегом і Густавом де Фрізом, які використовували його в якості нелінійної моделі для вивчення зміни форми довгих хвиль, що рухалися в прямокутному каналі. У випадку, коли $\beta_3=\beta_4=0$ отримуємо найбільш відоме рівняння Кортевега-де Фріза [1], що описує поширення хвиль на мілководді та іонно-звукові хвилі в плазмі. Випадок $\beta_3\neq 0,\ \beta_4=0$ досліджувався Хасімото [2] для хвиль на мілководді поблизу деякого критичного значення поверхневого натягу, а також був розглянутий чисельно при дослідженнях магнітоакустики та гідродинамічних хвиль в холодній беззіткневій плазмі Кавахарой [3], Какутані та Оно [4], відповідно. У статті основна увага приділяється випадку, коли в рівнянні (1.1) присутні обидва дисперсійних члена вищого порядку $(\beta_3\neq 0,\ \beta_4\neq 0)$.

В останнє десятиліття широке застосування отримали безсіткові методи, які засновані на використанні радіальних базисних функцій. Дані методи є альтернативними по відношенню до традиційних числових методів, таких як метод скінченних різниць і метод скінченних елементів. Безсіткові методи дозволяють уникнути побудови інтерполяційної сітки всередині області крайової задачі, що робить їх обчислювально ефективними, оскільки генерація сітки, як і раніше, залишається найбільш трудомісткою частиною будь-якого числового моделювання, заснованого на використанні сіткових методів. Дослідження, що присвячені безсітковим методам, представлені в роботах [5, 10]. У 1990 році Едвард Канса [11] ввів схему вирішення диференціальних рівнянь з частинними похідними на основі методу колокації та радіальних базисних функцій. У цьому підході розв'язок диференціального рівняння апроксимується радіальними базисними функціями, а метод колокації використовується для знаходження невідомих коефіцієнтів. Гаусова, мультиквадратична, зворотна мультиквадратична та зворотна квадратична – це глобальні радіальні базисні функції, які широко використовуються для вирішення диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Метою даного дослідження є числове вирішення нелінійного одновимірного нестаціонарного рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку за безсітковою схемою з використанням радіальних базисних функцій.

2 Ітераційний метод

Розглянемо нелінійне одновимірне нестаціонарне рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку (1.1) з наступними початковими

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in[a,b] \tag{2.1}$$

та граничними умовами Діріхле

$$\begin{cases}u(a,t)=g_1(t)\\ u(b,t)=g_2(t)\end{cases},\ t\in[0,T] \tag{2.2}$$

Здійснивши дискретизацію за часом на основі θ-схеми, отримаємо:

$$u(x,t)\approx\theta u^{n+1}+(1-\theta)u^n \tag{2.3}$$

$$\nabla u(x,t)\approx\theta\nabla u^{n+1}+(1-\theta)\nabla u^n \tag{2.4}$$

$$\nabla^3 u(x,t)\approx\theta\nabla^3 u^{n+1}+(1-\theta)\nabla^3 u^n \tag{2.5}$$

$$\nabla^5 u(x,t)\approx\theta\nabla^5 u^{n+1}+(1-\theta)\nabla^5 u^n \tag{2.6}$$

$$\nabla^7 u(x,t)\approx\theta\nabla^7 u^{n+1}+(1-\theta)\nabla^7 u^n \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} \tag{2.8}$$

де $u^n = u\left(x,t^n\right)$, $t^n = n\tau$, n – крок ітерації, τ – крок за часом, $0 \le \theta \le 1$ – ваговий коефіцієнт, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$, $\nabla^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3}$, $\nabla^5 = \frac{\partial^5}{\partial x^5}$, $\nabla^7 = \frac{\partial^7}{\partial x^7}$.

Підставимо рівняння (2.3) - (2.8) в рівняння (1.1):

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} + \beta_1\left(\theta u^{n+1}\nabla u^{n+1} + (1-\theta)u^n\nabla u^n\right) + \beta_2\left(\theta\nabla^3 u^{n+1} + (1-\theta)\nabla^3 u^n\right) + \\ + \beta_3\left(\theta\nabla^5 u^{n+1} + (1-\theta)\nabla^5 u^n\right) + \beta_4\left(\theta\nabla^7 u^{n+1} + (1-\theta)\nabla^7 u^n\right) = 0\end{aligned} \tag{2.9}$$

Нелінійний член в рівнянні (2.9) лінеаризується наступним чином [12]:

$$u^{n+1}\nabla u^{n+1} = u^{n+1}\nabla u^n + u^n\nabla u^{n+1} - u^n\nabla u^n \tag{2.10}$$

Підставимо рівняння (2.10) в рівняння (2.9):

$$\begin{aligned}\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} + \beta_1\left(\theta\left(u^{n+1}\nabla u^n + u^n\nabla u^{n+1}\right) + (1-2\theta)u^n\nabla u^n\right) + \\ + \beta_2\left(\theta\nabla^3 u^{n+1} + (1-\theta)\nabla^3 u^n\right) + \beta_3\left(\theta\nabla^5 u^{n+1} + (1-\theta)\nabla^5 u^n\right) + \\ + \beta_4\left(\theta\nabla^7 u^{n+1} + (1-\theta)\nabla^7 u^n\right) = 0\end{aligned} \tag{2.11}$$

Вважаючи $\theta = 1$, запишемо рівняння (2.11) в наступному вигляді:

$$u^{n+1} + \tau\left[\beta_1\left(u^{n+1}\nabla u^n + u^n\nabla u^{n+1}\right) + \beta_2\nabla^3 u^{n+1} + \beta_3\nabla^5 u^{n+1} + \beta_4\nabla^7 u^{n+1}\right] = u^n + \tau\beta_1 u^n\nabla u^n \tag{2.12}$$

Рівномірно оберемо $N-2$ точки колокації $\{x_i\}_2^{N-1}$ всередині області (a,b) та дві точки на границі області $x_1 = a$ та $x_N = b$. Наближений розв'язок рівняння (1.1) може бути сконструйований за допомогою радіальних базисних функцій $\varphi\left(r_{ij}\right)$:

$$u^n(x_i) \approx \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^n \varphi\left(r_{ij}\right) \tag{2.13}$$

де $r_j = \left\|x - x_j\right\|$ – евклідова відстань між вузлами, α_j^n – невідомі коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Підставивши рівняння (2.13) в рівняння (2.12), отримаємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для точок всередині області

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n+1}\varphi\left(r_{ij}\right) + \tau\left[\beta_1\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n+1}\varphi\left(r_{ij}\right)\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^n\varphi^{(1)}\left(r_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{N}\alpha_j^n\varphi\left(r_{ij}\right)\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n+1}\varphi^{(1)}\left(r_{ij}\right)\right) + \right. \\ \left. + \beta_2\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n+1}\varphi^{(3)}\left(r_{ij}\right) + \beta_3\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n+1}\varphi^{(5)}\left(r_{ij}\right) + \beta_4\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{n+1}\varphi^{(7)}\left(r_{ij}\right)\right] = \\ = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j^n\varphi\left(r_{ij}\right) + \tau\beta_1\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^n\varphi\left(r_{ij}\right)\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^n\varphi^{(1)}\left(r_{ij}\right)\end{aligned} \tag{2.14}$$

та для точок на границі області $x_1 = a$ та $x_N = b$:

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^{n+1} \varphi\left(r_{1j}\right) = g_1(t) \tag{2.15}$$

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^{n+1} \varphi\left(r_{Nj}\right) = g_2(t) \tag{2.16}$$

У даній роботі, в якості радіальних базисних функцій, використовуються наступні функції:

$$\varphi\left(r_{ij}\right) = e^{-\left(cr_{ij}\right)^2} \text{ – Гаусова} \tag{2.17}$$

$$\varphi\left(r_{ij}\right) = \sqrt{r_{ij}^2 + c^2} \text{ – мультиквадратична функція} \tag{2.18}$$

$$\varphi\left(r_{ij}\right) = \frac{1}{r_{ij}^2 + c^2} \text{ – зворотна квадратична функція} \tag{2.19}$$

$$\varphi\left(r_{ij}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(r_{ij}^2 + c^2\right)^3}} \text{ – зворотна мультиквадратична функція} \tag{2.20}$$

$$\varphi\left(r_{ij}\right) = \left(1 - cr_{ij}\right)_+^7 \left(5 + 35cr_{ij} + 101c^2 r_{ij}^2 + 147c^3 r_{ij}^3 + 101c^4 r_{ij}^4 + 35c^5 r_{ij}^5 + 5c^6 r_{ij}^6\right) \text{ – функція} \tag{2.21}$$

Ву з компактним носієм

де $c \neq 0$ – параметр форми, що обирається довільно, $\left(1 - cr_{ij}\right)_+^7$ – функція відсічення, що визначається як

$$\left(1 - cr_{ij}\right)_+^7 = \begin{cases} \left(1 - cr_{ij}\right)^7, \text{ якщо } 1 - cr_{ij} \geq 0 \\ 0, \text{ інакше} \end{cases} \tag{2.22}$$

Рівняння (2.12) являє собою рекурсивну формулу. Отже, дане диференціальне рівняння можна вирішувати крок за кроком, починаючи з початкових умов (2.1). Запишемо рівняння (2.13) разом з граничними умовами (2.2) в матричній формі:

$$[u]^n = A[\alpha]^n \tag{2.23}$$

де $[u]^n = \left[u_1^n, u_2^n, ..., u_N^n\right]^T$, $[\alpha]^n = \left[\alpha_1^n, \alpha_2^n, ..., \alpha_N^n\right]^T$ та $A = \left[\varphi\left(r_{ij}\right)\right]$, $1 \leq i, j \leq N$.

Матриця A може бути розділена на дві матриці A_d та A_b, що відповідають $N-2$ точкам всередині області та двом точкам на границі області, наступним чином:

$$A = A_d + A_b \tag{2.24}$$

де

$$\begin{aligned} A_d &= \begin{cases} \varphi\left(r_{ij}\right), \text{ якщо } 2 \leq i \leq N-1, \ 1 \leq j \leq N \\ 0, \text{ інакше} \end{cases} \\ A_b &= \begin{cases} \varphi\left(r_{ij}\right), \text{ якщо } i = 1, N, \ 1 \leq j \leq N \\ 0, \text{ інакше} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Об’єднавши рівняння (2.14) - (2.16) з урахуванням рівняння (2.24), отримаємо наступне матричне рівняння:

$$\begin{aligned} &\left\{A_d + \tau\left[\beta_1\left(\text{diag}\left(B_d[\alpha]^n\right)A_d + \text{diag}\left(A_d[\alpha]^n\right)B_d\right) + \beta_2 C_d + \beta_3 D_d + \beta_4 E_d\right] + A_b\right\}[\alpha]^{n+1} = \\ &= A_d[\alpha]^n + \tau\beta_1\left(A_d[\alpha]^n\right).*\left(B_d[\alpha]^n\right) + [G]^{n+1} \end{aligned} \tag{2.26}$$

де

$$
\begin{aligned}
B_d &= \begin{cases} \varphi^{(1)}\left(r_{ij}\right), \text{ якщо } 2 \le i \le N-1,\ 1 \le j \le N \\ 0, \text{ інакше} \end{cases} \\
C_d &= \begin{cases} \varphi^{(3)}\left(r_{ij}\right), \text{ якщо } 2 \le i \le N-1,\ 1 \le j \le N \\ 0, \text{ інакше} \end{cases} \\
D_d &= \begin{cases} \varphi^{(5)}\left(r_{ij}\right), \text{ якщо } 2 \le i \le N-1,\ 1 \le j \le N \\ 0, \text{ інакше} \end{cases} \\
E_d &= \begin{cases} \varphi^{(7)}\left(r_{ij}\right), \text{ якщо } 2 \le i \le N-1,\ 1 \le j \le N \\ 0, \text{ інакше} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

$\mathrm{diag}\left(A_d\left[\alpha\right]^n\right)$ – діагональна матриця з елементами $A_d\left[\alpha\right]^n$ на головній діагоналі, $\left[G\right]^{n+1} = \left[g_1^{n+1}, \underbrace{0,0,...,0,0}_{N-2}, g_2^{n+1} \right]^T$, " .* " означає покомпонентний добуток двох векторів.

Рівняння (2.26) може бути вирішено відносно невідомих коефіцієнтів $\left[\alpha\right]^n$ методом Гаусса. Підставляючи значення коефіцієнтів $\left[\alpha\right]^n$ в рівняння (2.13), отримуємо наближений розв'язок рівняння (1.1) на *n*-му кроці.

3 Числові результати

В цьому розділі демонструється застосування безсіткового методу для числового вирішення рівняння Кортевега-де Фріза на прикладі двох тестових задач та оцінюється точність отриманих розв'язків.

Для оцінки точності апроксимації в роботі використовуються середня відносна похибка $\mathrm{rerr}(u)$, середня абсолютна похибка $\mathrm{aerr}(u)$ і максимальна похибка $\mathrm{merr}(u)$, які обчислюються за формулами:

$$\mathrm{rerr}(u) = \sqrt{\frac{1}{N} \frac{\sum_{j=1}^{N} \left(u_j - \tilde{u}_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{N} u_j^2}} \tag{3.1}$$

$$\mathrm{aerr}(u) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(u_j - \tilde{u}_j\right)^2} \tag{3.2}$$

$$\mathrm{merr}(u) = \max_j \left|u_j - \tilde{u}_j\right| \tag{3.3}$$

де u_j та $\tilde{u}_j$ є відповідно аналітичними та числовими розв'язками в вузлах $x_j \in \left[a, b\right]$, а N – загальна кількість інтерполяційних вузлів.

Задача № 1

Розглянемо нелінійне рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \beta_1 u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} + \beta_3 \frac{\partial^5 u(x,t)}{\partial x^5} + \beta_4 \frac{\partial^7 u(x,t)}{\partial x^7} = 0 \tag{3.4}$$

де $x \in \left[-20, 20\right]$, $d_x = 0.1$, $t \in \left[0, 10\right]$, $\tau = 0.01$, $\beta_1 = 6$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = -1$, $\beta_4 = \frac{769}{2500}$, $c = 0.1$.

Початкові умови задані у вигляді:

$$u(x,0)=\frac{86625}{591361}\operatorname{sech}^6\left(\frac{5x}{\sqrt{1538}}\right) \tag{3.5}$$

Граничні умови мають вигляд:

$$u(a,t)=\frac{86625}{591361}\operatorname{sech}^6\left[\frac{5}{\sqrt{1538}}\left(a-\frac{180000}{591361}t\right)\right] \tag{3.6}$$

$$u(b,t)=\frac{86625}{591361}\operatorname{sech}^6\left[\frac{5}{\sqrt{1538}}\left(b-\frac{180000}{591361}t\right)\right] \tag{3.7}$$

Аналітичний розв’язок задано рівнянням [13]:

$$u(x,t)=\frac{86625}{591361}\operatorname{sech}^6\left[\frac{5}{\sqrt{1538}}\left(x-\frac{180000}{591361}t\right)\right] \tag{3.8}$$

На рис. 1 представлена візуалізація наближеного розв’язку Задачі № 1.

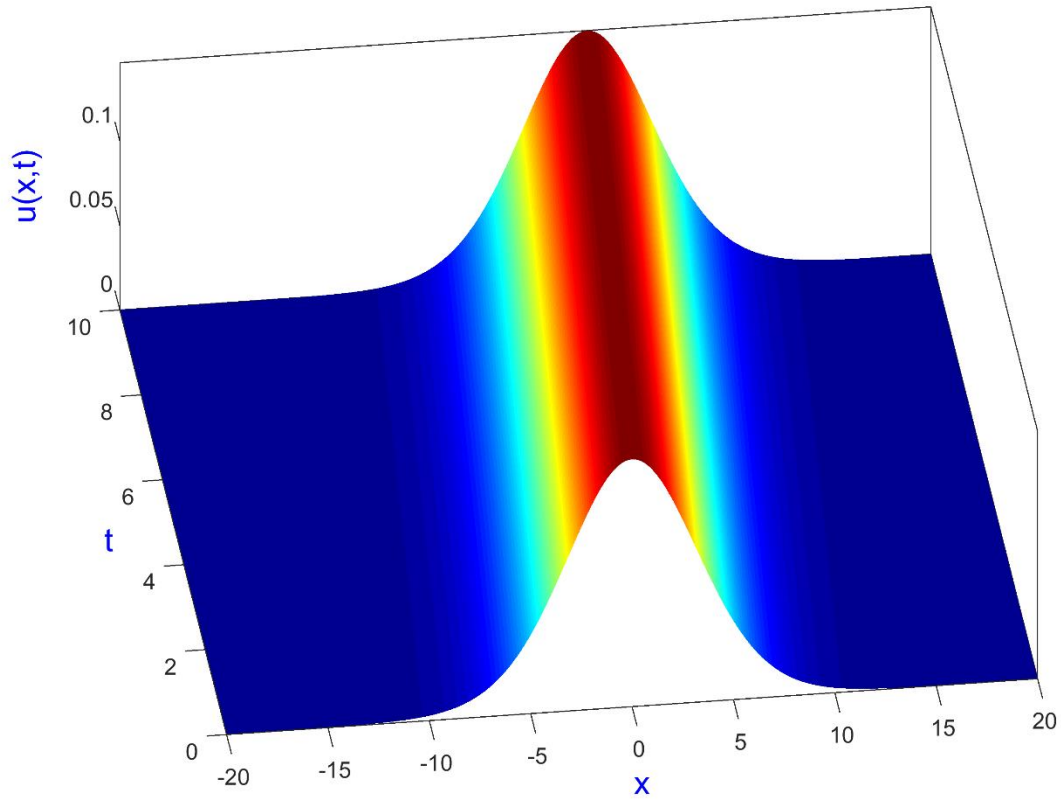

Рис. 1 Візуалізація наближеного розв’язку

В Таблиці 1 наведені похибки наближеного розв’язку Задачі № 1 в різні проміжки часу.

Таблиця 1. Похибки наближеного розв’язку Задачі № 1

t	$\mathrm{rerr}(u)$	$\mathrm{aerr}(u)$	$\mathrm{merr}(u)$
1	$7.98361413468731 \times 10^{-6}$	$8.90251166252210 \times 10^{-6}$	$2.73967997293928 \times 10^{-5}$
2	$1.30365699236829 \times 10^{-5}$	$1.45370522455223 \times 10^{-5}$	$4.08782804435931 \times 10^{-5}$
3	$1.64791284183743 \times 10^{-5}$	$1.83758421254748 \times 10^{-5}$	$4.98815848004597 \times 10^{-5}$
4	$1.89100266827542 \times 10^{-5}$	$2.10865317679884 \times 10^{-5}$	$5.53044721944423 \times 10^{-5}$
5	$2.08159518270299 \times 10^{-5}$	$2.32118249661440 \times 10^{-5}$	$5.77566265959756 \times 10^{-5}$
6	$2.23502675472742 \times 10^{-5}$	$2.49227372610114 \times 10^{-5}$	$6.15998871260765 \times 10^{-5}$
7	$2.36322270572377 \times 10^{-5}$	$2.63522476649887 \times 10^{-5}$	$6.45459904157625 \times 10^{-5}$
8	$2.47455738168823 \times 10^{-5}$	$2.75937383369796 \times 10^{-5}$	$6.74311969199454 \times 10^{-5}$
9	$2.57901867466870 \times 10^{-5}$	$2.87585840542116 \times 10^{-5}$	$6.78026595746228 \times 10^{-5}$
10	$2.73336652606637 \times 10^{-5}$	$3.04797137507376 \times 10^{-5}$	$7.30919652554840 \times 10^{-5}$

На рис. 2 представлений графік аналітичного та наближеного розв'язків Задачі № 1 в момент часу $t = 10$.

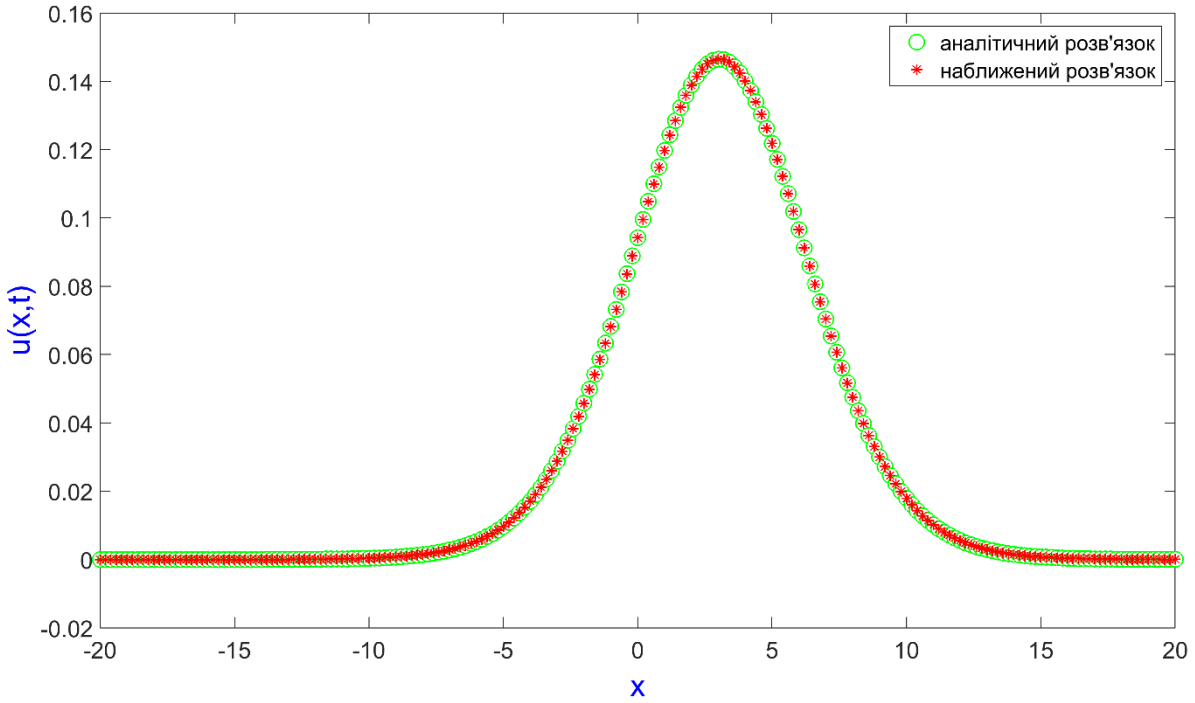

Рис. 2 Графік аналітичного та наближеного розв'язків в фіксований момент часу

Задача № 2

Якщо в рівнянні (1.1) коефіцієнти $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\beta_3 = -1$ та $\beta_4 = 0$, то дане диференціальне рівняння перетворюється в рівняння Кавахари. Розглянемо нелінійне рівняння Кавахари

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} - \frac{\partial^5 u(x,t)}{\partial x^5} = 0 \tag{3.9}$$

де $x \in [-20, 20]$, $d_x = 0.1$, $t \in [0, 10]$, $\tau = 0.01$, $c = 0.1$,

з наступними початковими

$$u(x,0) = \frac{105}{169}\operatorname{sech}^4\left(\frac{x}{2\sqrt{13}}\right) \tag{3.10}$$

та граничними умовами

$$u(a,t) = \frac{105}{169}\operatorname{sech}^4\left[\frac{1}{2\sqrt{13}}\left(a - \frac{36}{169}t\right)\right] \tag{3.11}$$

$$u(b,t) = \frac{105}{169}\operatorname{sech}^4\left[\frac{1}{2\sqrt{13}}\left(b - \frac{36}{169}t\right)\right] \tag{3.12}$$

Аналітичний розв'язок має вигляд [14]:

$$u(x,t) = \frac{105}{169}\operatorname{sech}^4\left[\frac{1}{2\sqrt{13}}\left(x - \frac{36}{169}t\right)\right] \tag{3.13}$$

На рис. 3 представлена візуалізація наближеного розв'язку Задачі № 2.

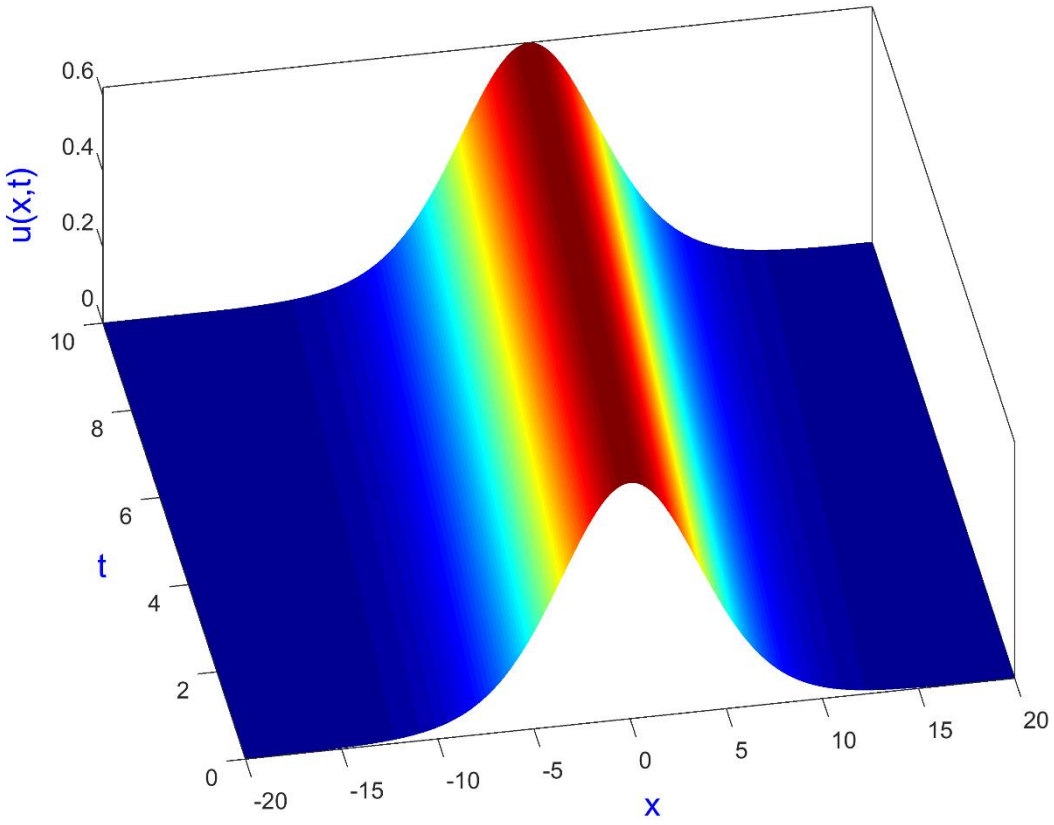

Рис. 3 Візуалізація наближеного розв'язку

В Таблиці 2 наведені похибки наближеного розв'язку Задачі № 2 в різні проміжки часу.

Таблиця 2. Похибки наближеного розв'язку Задачі № 2

t	$\mathrm{rerr}(u)$	$\mathrm{aerr}(u)$	$\mathrm{merr}(u)$
1	$1.01845654833457 \times 10^{-5}$	$5.13791480772239 \times 10^{-5}$	$1.48729866269164 \times 10^{-4}$
2	$1.31931024613584 \times 10^{-5}$	$6.65566307802692 \times 10^{-5}$	$1.78449611171396 \times 10^{-4}$
3	$1.66445839390280 \times 10^{-5}$	$8.39686821017665 \times 10^{-5}$	$2.10307912127064 \times 10^{-4}$
4	$1.77826695990643 \times 10^{-5}$	$8.97101023103128 \times 10^{-5}$	$2.06880668735390 \times 10^{-4}$
5	$1.96234919736284 \times 10^{-5}$	$9.89966921970141 \times 10^{-5}$	$2.54983134358699 \times 10^{-4}$
6	$2.11327850898946 \times 10^{-5}$	$1.06610781478807 \times 10^{-4}$	$2.87461533342600 \times 10^{-4}$
7	$2.30503736222738 \times 10^{-5}$	$1.16284641393765 \times 10^{-4}$	$3.03083215576009 \times 10^{-4}$
8	$2.53819247640622 \times 10^{-5}$	$1.28046861750834 \times 10^{-4}$	$3.38620132809713 \times 10^{-4}$
9	$2.89427881906362 \times 10^{-5}$	$1.46010722560749 \times 10^{-4}$	$3.77481923822717 \times 10^{-4}$
10	$3.33752388589199 \times 10^{-5}$	$1.68371570502904 \times 10^{-4}$	$4.43853647666853 \times 10^{-4}$

На рис. 4 представлений графік аналітичного та наближеного розв'язків Задачі № 2 в момент часу $t = 10$.

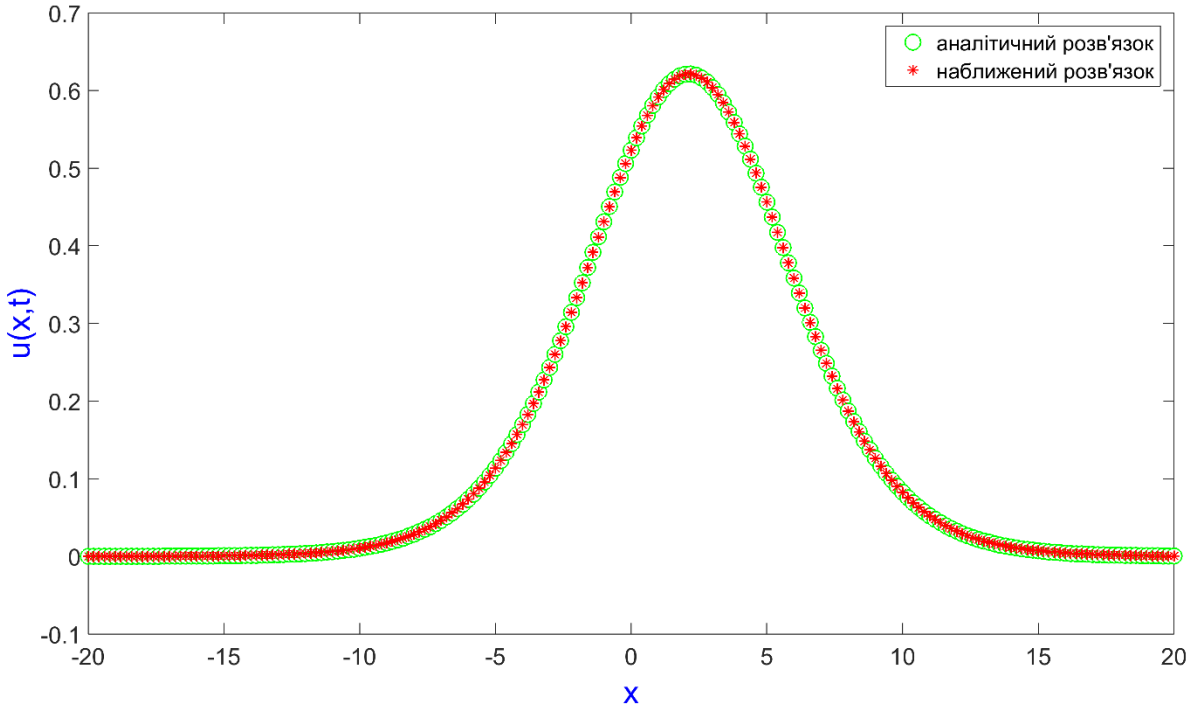

Рис. 4 Графік аналітичного та наближеного розв'язків в фіксований момент часу

На рис. 5 наведена візуалізація порівняння наближених розв'язків Задачі № 1 та Задачі № 2.

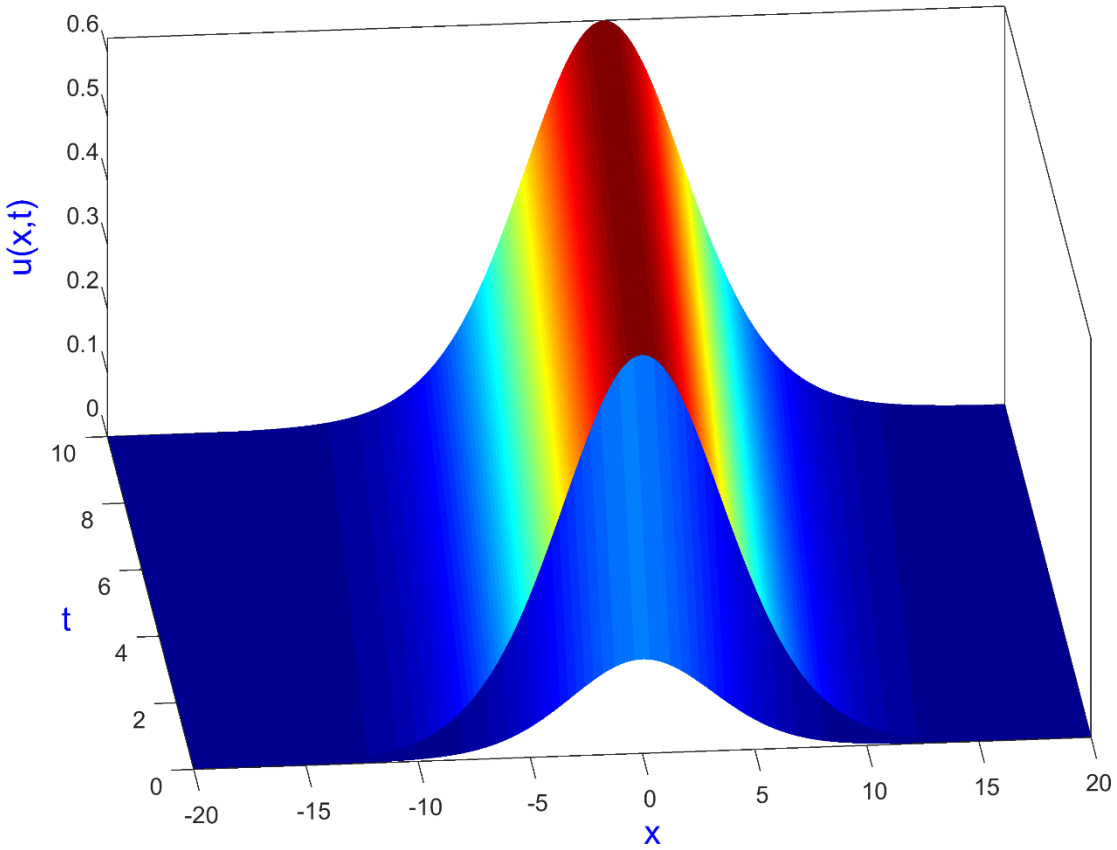

Рис. 5 Порівняння наближених розв'язків

4 Висновки

У статті описується безсітковий метод для числового вирішення нелінійного одновимірного нестаціонарного рівняння Кортевега-де Фріза сьомого порядку. Безсіткова схема реалізується на основі методу колокації та радіальних базисних функцій.

В роботі представлені результати числових вирішень двох тестових задач, які отримані з використанням даного методу. Для розглянутих задач побудовано графіки наближених та аналітичних розв'язків, а також пораховані середня відносна, середня абсолютна та максимальна похибки. Отримані результати свідчать про те, що дана схема є ефективним підходом для вирішення нелінійних рівнянь такого типу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kortewege D. J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1895. Vol. 39, Issue 240. P. 422-443. doi: https://doi.org/10.1080/14786449508620739
2. Hasimoto H. Water waves. *Kagaku*. 1970. Vol. 40. P. 401-408. [in Japanese]
3. Kawahara T. Oscillatory Solitary Waves in Dispersive Media. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1972. Vol. 33. P. 260-264. doi: https://doi.org/10.1143/JPSJ.33.260
4. Kakutani T., Ono H. Weak Non-Linear Hydromagnetic Waves in a Cold Collision-Free Plasma. *Journal of the Physical Society of Japan*. 1969. Vol. 26. P. 1305-1318. doi: https://doi.org/10.1143/JPSJ.26.1305
5. Belytschko T., Lu Y. Y., Gu L. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994. Vol. 37, Issue 2. P. 229-256. doi: https://doi.org/10.1002/nme.1620370205
6. Belytschko T., Rongauz Y., Organ D. Meshless methods: An overview and recently developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996. Vol. 139. P. 3-47. doi: https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01078-X
7. Ingber M. S., Chen C. S., Tanski J. A. A mesh free approach using radial basis functions and parallel domain decomposition for solving three-dimensional diffusion equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2004. Vol. 60, Issue 13. P. 2183-2201. doi: https://doi.org/10.1002/nme.1043
8. Гарячевська І. В., Протектор Д. О. Система комп'ютерного моделювання для числового вирішення одновимірного нестаціонарного рівняння Бюргерса. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління».* 2019. Т. 43. С. 11-19. doi: https://doi.org/10.26565/2304-6201-2019-43-02
9. Протектор Д. О., Лисин Д. А., Лисина О. Ю. Численный анализ решений двумерных задач теплопроводности по бессеточной схеме с использованием фундаментальных и общих решений. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2019. Т. 2, № 1. С. 98-111. doi: https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-8
10. Протектор Д. О., Лісін Д. О., Лісіна О. Ю. Система комп'ютерного моделювання для розв'язку тривимірних задач теплопровідності в анізотропному середовищі. *Радіоелектроніка та інформатика*. 2019. Т. 84, № 1. С. 20-27. doi: https://doi.org/10.30837/1563-0064.1(84).2019.184712
11. Kansa E. J. Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – I surface approximations and partial derivative estimates. *Computers & Mathematics with Applications*. 1990. Vol. 19. P. 127-145. doi: https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90270-T
12. Rubin S. G., Graves R. A. Jr. A Cubic Spline Approximation for Problems in Fluid Mechanics. NASA Technical Reports R-436. Washington, D.C.: NASA, 1975. 93 p.
13. Ma W. X. Travelling wave solutions to a seventh order generalized KdV equation. *Physics Letters A*. 1993. Vol. 180, Issue 3. P. 221-224. doi: https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90699-Z
14. Sirendaoreji. New exact travelling wave solutions for the Kawahara and modified Kawahara equations. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2004. Vol. 19, Issue 1. P. 147-150. doi: https://doi.org/10.1016/S0960-0779(03)00102-4

REFERENCIES

1. D. J. Kortewege, and G. de Vries, “On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves” *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 39, no. 240, pp. 422-443, 1895. doi: https://doi.org/10.1080/14786449508620739
2. H. Hasimoto, “Water waves” *Kagaku*, vol. 40, pp. 401-408, 1970. [in Japanese]
3. T. Kawahara, “Oscillatory Solitary Waves in Dispersive Media” *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 33, pp. 260-264, 1972. doi: https://doi.org/10.1143/JPSJ.33.260
4. T. Kakutani, and H. Ono, “Weak Non-Linear Hydromagnetic Waves in a Cold Collision-Free Plasma” *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 26, pp. 1305-1318, 1969. doi: https://doi.org/10.1143/JPSJ.26.1305
5. T. Belytschko, Y. Y. Lu and L. Gu, “Element-free Galerkin methods” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, no. 2, pp. 229-256, 1994. doi: https://doi.org/10.1002/nme.1620370205
6. T. Belytschko, Y. Rongauz and D. Organ, “Meshless methods: An overview and recently developments” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 3-47, 1996. doi: https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01078-X
7. M. S. Ingber, C. S. Chen, and J. A. Tanski, “A mesh free approach using radial basis functions and parallel domain decomposition for solving three-dimensional diffusion equations” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 60, no. 13, pp. 2183-2201, 2004. doi: https://doi.org/10.1002/nme.1043
8. I. V. Garyachevskaya, and D. O. Protektor, “Computer modeling system for the numerical solution of the one-dimensional non-stationary Burgers’ equation” *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University, series «Mathematical modeling. Information technology. Automated control systems»*, vol. 43, pp. 11-19, 2019. doi: https://doi.org/10.26565/2304-6201-2019-43-02
9. D. O. Protektor, D. A. Lisin and O. Yu. Lisina, “Numerical analysis of solutions of two-dimensional heat conduction problems by meshless approach using fundamental and general solutions” *Applied Questions of Mathematical Modelling*, vol. 2, no. 1, pp. 98-111, 2019. doi: https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-8
10. D. O. Protektor, D. A. Lisin and O. Yu. Lisina, “Computer modeling system for solving three-dimensional heat conduction problems in an anisotropic environment” *Radioelectronics & Informatics*, vol. 84, no. 1, pp. 20-27, 2019. doi: https://doi.org/10.30837/1563-0064.1(84).2019.184712
11. E. J. Kansa, “Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics – I surface approximations and partial derivative estimates” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 19, pp. 127-145, 1990. doi: https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90270-T
12. S. G. Rubin, and R. A. Jr. Graves, “A Cubic Spline Approximation for Problems in Fluid Mechanics”, NASA Technical Reports R-436, Washington, D.C.: NASA, 1975.
13. W. X. Ma, “Travelling wave solutions to a seventh order generalized KdV equation” *Physics Letters A*, vol. 180, no. 3, pp. 221-224, 1993. doi: https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90699-Z
14. Sirendaoreji, “New exact travelling wave solutions for the Kawahara and modified Kawahara equations” *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 19, no. 1, pp. 147-150, 2004. doi: https://doi.org/10.1016/S0960-0779(03)00102-4

Гарячевська Ірина Василівна *– кандидат технічних наук, доцент; директор навчально-наукового інституту комп’ютерної фізики та енергетики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;*

e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-4630-9519.

Протектор Денис Олегович *– аспірант; навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;*

e-mail: d.protector@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3323-7058.

Гарячевская Ирина Васильевна *– кандидат технических наук, доцент; директор учебно-научного института компьютерной физики и энергетики, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022;*

e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-4630-9519.

Протектор Денис Олегович *– аспирант; учебно-научный институт компьютерной физики и энергетики, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022;*

e-mail: d.protector@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3323-7058.

Garyachevskaya Irina V. *PhD, Associate Professor, Director of the Education and Research Institute Computer Physics and Energy V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine;*

e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua; ORCID: 0000-0002-4630-9519.

Protektor Denys O. *Postgraduate student of the Education and Research Institute Computer Physics and Energy V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine;*

e-mail: d.protector@karazin.ua; ORCID: 0000-0003-3323-7058.

Надійшла у першій редакції 03.02.2020, в останній - XX.XX.XXXX.