

УДК 539.3

Метод обчислення сингулярних інтегралів в задачах аксіально-симетричних течій Стокса

¹Р.Г.Пальчиков, ^{1,2}О.О.Стрельнікова, ¹О.О. Усатова

¹ Інститут проблем машинобудування НАН України ім. А.М. Підгорного
вулиця Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна

² Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
майдан Свободи 4, Харків, 61022, Україна,
elena15@gmx.com

Досліджено течії в'язкої рідини з невеликими числами Рейнольдса (течії Стокса) у тривимірному формулюванні. В цьому випадку можливо нехтувати інерційними членами в рівняннях руху. Такі течії можуть відбуватися в нанотрубках, що є включеннями в репрезентативних об'ємах наноматеріалів. З використання фундаментального розв'язку Осена побудовано інтегральне зображення швидкості. Це зображення використовується для побудови інтегрального рівняння відносно невідомої густини. Розв'язок цього рівняння дає змогу обчислити тиск рідини на стінки оболонки. Досліджено випадок аксіально-симетричних течій. Для цього отримано інтегральне подання невідомої швидкості в циліндричних координатах. Шляхом інтегрування за окружною координатою здійснено зведення двовимірного сингулярного інтегрального рівняння до одновимірного. При цьому виявлено, що компоненти ядер сингулярного оператора виражаються через еліптичні інтеграли першого та другого роду. Доведено, що особливості ядер одновимірних сингулярних інтегральних рівнянь мають логарифмічний характер. Для обчислення еліптичних інтегралів запропоновано використовувати алгоритм Гауса, заснований на використанні середнього арифметико-геометричного значення. Ця процедура дає змогу отримати логарифмічні сингулярні компоненти із високою точністю. Це дає змогу використовувати спеціальні квадратурні формули для обчислення інтегралів з такою особливістю. Побудовано алгоритм, заснований на використанні методу граничних елементів для числового розв'язання отриманих сингулярних інтегральних рівнянь. Проведено тестування запропонованого метода розв'язання одновимірних сингулярних рівнянь, які в ядрах містять еліптичні інтеграли з логарифмічними особливостями, тобто логарифмічна особливість не виражена в явному вигляді. Зроблено порівняння з відомими аналітичними розв'язками. Отримані дані свідчать про високу ефективність запропонованого числового методу.

Ключові слова: течія Стокса, аксіально-симетричне формулювання, сингулярні інтегральні рівняння, середнє арифметико-геометричне значення.

Исследовано течение вязкой жидкости при небольших числах Рейнольдса (течения Стокса) в трехмерной формулировке. В этом случае можно пренебречь инерционными членами в уравнениях движения. Такие течения могут происходить в нанотрубках, которые можно рассматривать как включения в репрезентативных объемах наноматериалов. С использованием фундаментального решения Осена построено интегральное представление скорости. Это представление используется для построения интегрального уравнения относительно неизвестной плотности. Решение полученного уравнения дает возможность вычислить давление жидкости на стенки оболочки. Исследован случай аксиально-симметричных течений. Для этого получено интегральное представление неизвестной скорости в цилиндрических координатах. Путем интегрирования по окружной координате осуществлено сведение двумерного сингулярного интегрального уравнения к одномерному. При этом установлено, что компоненты ядер сингулярного оператора выражаются через эллиптические интегралы первого и второго рода. Доказано, что особенности ядер одномерных сингулярных интегральных уравнений имеют логарифмический характер. Для вычисления эллиптических интегралов предложено использовать алгоритм Гаусса, основанный на использовании среднего арифметико-геометрического значения. Эта процедура позволяет получить логарифмические сингулярные компоненты с высокой точностью, что дает возможность использовать специальные квадратурные формулы для вычисления интегралов с такой особенностью. Построен алгоритм, основанный на использовании метода граничных элементов для численного решения полученных сингулярных интегральных уравнений. Проведено тестирование предложенного метода решения одномерных сингулярных уравнений, ядра которых содержат эллиптические интегралы с логарифмическими особенностями, то есть логарифмическая особенность не выражена в явном виде. Проведено сравнение полученных численных результатов с известными аналитическими решениями. Полученные данные свидетельствуют о высокой эффективности предложенного численного метода.

Ключевые слова: течение Стокса, аксиально-симметричная формулировка, сингулярные интегральные уравнения, среднее арифметико-геометрическое значение

The flow of a viscous fluid at small Reynolds numbers (Stokes flow) in a three-dimensional formulation is investigated. In this case, the inertial terms in the equations of motion can be neglected. Such flows can occur in nanotubes that can be considered as inclusions in representative volume elements of nanomaterials. By using the fundamental solution of Ossen, an integral representation of the velocity is proposed. This representation is used to receive an integral equation for an unknown density. The solution of the resulting equation makes it possible to calculate the fluid pressure on the walls of the shell. The case of axially symmetric flows is investigated. For this, an integral representation of the unknown velocity in cylindrical coordinates is

obtained. By integrating over the circumferential coordinate, the two-dimensional singular integral equation is reduced to one-dimensional one. It has been proved that the components of the kernels in singular operators are expressed in terms of elliptic integrals of the first and second kind. It has been proved that the singularities of the kernels of one-dimensional singular integral equations have a logarithmic character. To calculate elliptic integrals, the Gaussian algorithm based on the use of the arithmetic-geometric mean value is proposed. This procedure allows us to obtain logarithmic singular components with high accuracy, which makes it possible to use special quadrature formulas to calculate such integrals. An algorithm with usage of the boundary element method for the numerical solution of the obtained singular integral equations is proposed. The method for solving one-dimensional singular equations, where the kernels contain elliptic integrals with logarithmic singularities (i.e. logarithmic singularity is not expressed explicitly) has been tested. The obtained numerical results have been compared with the well-known analytical solutions. The data obtained indicate the high efficiency of the proposed numerical method.

Key words: Stokes flow, axially symmetric formulation, singular integral equations, arithmetic-geometric mean value.

1 Вступ

Вивчення фізичних та механічних властивостей технологічно-інноваційних нанокompatитних матеріалів є однією з актуальних проблем сучасної механіки. Обґрунтованість результатів числового моделювання міцності виробів з наноматеріалів вимагає побудови належних математичних моделей, що адекватно описують структури нанорозмірних включень. На теперішній час існує велика кількість теоретичних та експериментальних досліджень, присвячених нанокompatитам [1-8] та ін. Найбільш ефективними серед числових методів для дослідження властивостей нанокompatитів та наноматеріалів виявились методи скінченних та граничних елементів [5,7,9,10]. Відзначимо, що метод граничних елементів дозволяє враховувати неklasичні граничні умови на поверхнях інтерфейсу [5,11]. В роботі [7] досліджені різні типи представницьких комірок. Такі дослідження дають змогу розроблювати наноматеріали із заданими механічними характеристиками. Зауважимо, що важливо вивчати представницькі комірки саме з довільно розподіленими або упорядкованими системами нанотрубок. Дослідження течії рідини в нанотрубках та інших наноструктурах є важливою проблемою наногідродинаміки [12,13]. Течії такого роду відбуваються при малих числах Рейнольдса [14], тобто в цьому випадку можливо нехтувати інерційними членами в рівняннях руху [15-17]. Аксіально-симетричну течію всередині конуса за умови малих чисел Рейнольдса розглянуто в [18], де знайдено асимптотичний розв'язок рівнянь Нав'є – Стокса.

В даному дослідженні задачі аксіально-симетричної течії при малих числах Рейнольдса вивчаються за допомогою методів граничних елементів при розв'язанні рівнянь руху Стокса.

2 Загальне формулювання проблеми

Рівняння руху в'язкої рідини з невеликими числами Рейнольдса (течії Стокса) у тривимірному формулюванні мають вигляд [19]

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} = 0, \quad (2.1)$$

де \mathbf{u} – вектор швидкості рідини, μ – динамічна в'язкість, p – тиск, ρ – густина рідини, \mathbf{g} – прискорення вільного падіння.

Фундаментальний розв'язок (Stokeslet) рівнянь (2.1), або тензор Озена [20] має такий вигляд

$$u_{ij}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \frac{1}{8\pi\mu R} (\delta_{ij} + r_i r_j), \quad (2.2)$$

де $R = |\mathbf{P} - \mathbf{Q}|$ – декартова відстань між точками $\mathbf{P}(x, y, z)$ та $\mathbf{Q}(x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{r} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$,

$$r = (r_i r_i)^{1/2}, \quad r_i = x_i(\mathbf{P}) - x_i(\mathbf{Q}), \quad r_i = \partial r / \partial x_i(\mathbf{P}) = r_i / r, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

Будемо вивчати течії Стокса в аксіально-симетричному формулюванні.

Припустимо, що область течії S (зовнішня або внутрішня) є оболонкою обертання, рис. 2.1. На поверхні оболонки задаємо граничні умови.

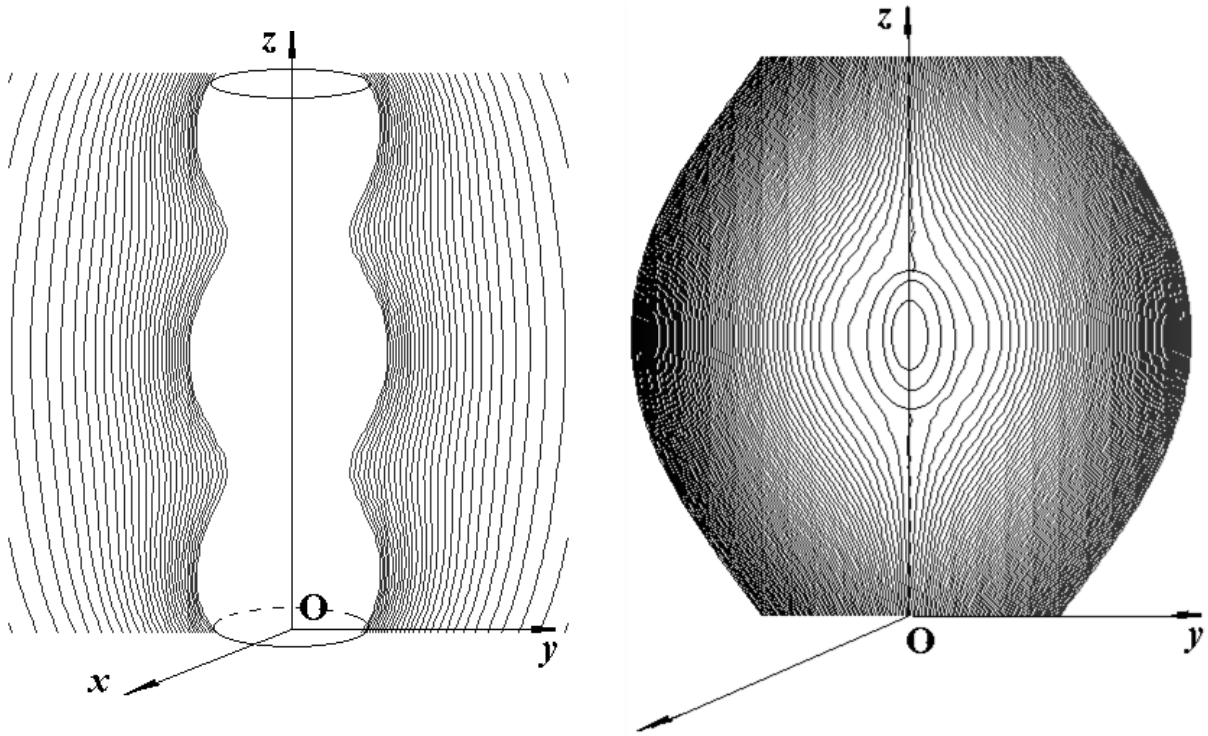


Рисунок 2.1 Аксіально-симетричні течії

За допомогою фундаментального розв'язку (2.2) побудуємо інтегральне зображення таким чином:

$$v_i(\mathbf{Q}) = \int_S u_{ij}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \gamma_j(\mathbf{P}) dS. \quad (2.3)$$

Тут вектор $\gamma_1(\mathbf{P}), \gamma_2(\mathbf{P}), \gamma_3(\mathbf{P})$ зображає невідому густину, яка знаходиться з відповідного інтегрального рівняння, яке є наслідком граничних умов. Після знаходження невідомої густини з інтегрального рівняння знаходимо тиск за допомогою формули [20]

$$p(\mathbf{P}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{(\gamma(\mathbf{P}), \mathbf{r})}{|\mathbf{P} - \mathbf{P}_0|^3} dS.$$

У випадку дослідження аксіально-симетричних течій доцільно перейти до циліндричної системи координат. Нехай точки \mathbf{P} і \mathbf{Q} , відповідно є точкою на поверхні інтегрування, та точкою спостереження.

Тобто,

$$x_1(\mathbf{P}) = r_i \cos \theta_i, \quad x_2(\mathbf{P}) = r_i \sin \theta_i, \quad x_3(\mathbf{P}) = z_i$$

$$x_1(\mathbf{Q}) = r_j \cos \theta_j, \quad x_2(\mathbf{Q}) = r_j \sin \theta_j, \quad x_3(\mathbf{Q}) = z_j$$

Евклідова відстань між точками \mathbf{P} і \mathbf{Q} визначається за формулою:

$$R(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \sqrt{(x_1(\mathbf{Q}) - x_1(\mathbf{P}))^2 + (x_2(\mathbf{Q}) - x_2(\mathbf{P}))^2 + (x_3(\mathbf{Q}) - x_3(\mathbf{P}))^2} \quad (2.4)$$

В циліндричних координатах рівність (2.4) набуває вигляду

$$R(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos \theta_j + (z_i - z_j)^2} \quad (2.5)$$

Введемо оператор переходу таким чином:

$$T(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \cos \theta(\mathbf{X}) & -\sin \theta(\mathbf{X}) & 0 \\ \sin \theta(\mathbf{X}) & \cos \theta(\mathbf{X}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В точках \mathbf{P} та \mathbf{Q} маємо відповідно

$$\mathbf{T}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j & 0 \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{T}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 & 0 \\ \sin 0 & \cos 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В циліндричних координатах компоненти швидкості позначимо як $V_r(\mathbf{Q}), V_\theta(\mathbf{Q}), V_z(\mathbf{Q})$, а компоненти густини як $\gamma_r(\mathbf{Q}), \gamma_\theta(\mathbf{Q}), \gamma_z(\mathbf{Q})$.

Отримаємо такий вираз для компонент швидкості в циліндричних координатах:

$$\begin{bmatrix} V_r(\mathbf{P}) \\ V_\theta(\mathbf{P}) \\ V_z(\mathbf{P}) \end{bmatrix} = \int_s \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_r(\mathbf{Q}) \\ \gamma_\theta(\mathbf{Q}) \\ \gamma_z(\mathbf{Q}) \end{bmatrix} ds \quad (2.6)$$

Враховуючи (2.6), одержимо

$$\begin{aligned} U_{rr} &= \int_0^{2\pi} (u_{11} \cos \theta + u_{12} \sin \theta) d\theta, & U_{r\theta} &= \int_0^{2\pi} (-u_{11} \sin \theta + u_{12} \cos \theta) d\theta, & U_{rz} &= \int_0^{2\pi} u_{13} d\theta, \\ U_{\theta r} &= \int_0^{2\pi} (u_{21} \cos \theta + u_{22} \sin \theta) d\theta, & U_{\theta\theta} &= \int_0^{2\pi} (-u_{21} \sin \theta + u_{22} \cos \theta) d\theta, & U_{\theta z} &= \int_0^{2\pi} u_{23} d\theta, \\ U_{zr} &= \int_0^{2\pi} (u_{31} \cos \theta + u_{32} \sin \theta) d\theta, & U_{z\theta} &= \int_0^{2\pi} (-u_{31} \sin \theta + u_{32} \cos \theta) d\theta, & U_{zz} &= \int_0^{2\pi} u_{33} d\theta. \end{aligned}$$

Введемо позначення

$$\hat{z} = z_i - z_j, \quad a = r_i^2 + r_j^2 + \hat{z}^2, \quad b = 2r_i r_j, \quad c = a + b, \quad d = a - b, \quad k^2 = \frac{2b}{a+b}$$

та використаємо стандартні еліптичні інтеграли

$$\mathbf{E}(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{1/2} d\psi, \quad \mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \psi)^{-1/2} d\psi.$$

Аналогічно [11] здобудемо такі формули:

$$U_{ij}(P, P_0) = U_{ij}^1 \mathbf{E}(k) + U_{ij}^2 \mathbf{K}(k), \quad i, j = r, z, \theta,$$

де

$$\begin{aligned} U_{11}^1 &= \frac{-A}{r_i r_j \sqrt{c}} \left[c + \hat{z}^2 \frac{a}{d} \right], & U_{11}^2 &= \frac{A}{r_i r_j \sqrt{c}} [a + \hat{z}^2], & U_{12}^2 &= \frac{A \hat{z}}{r_i \sqrt{c}}, & U_{12}^1 &= -\frac{U_{12}^2 h}{d}, \\ U_{21}^2 &= -\frac{A \hat{z}}{r_j \sqrt{c}}, & U_{21}^1 &= \frac{U_{21}^2 f}{d}, & U_{22}^2 &= \frac{2A}{\sqrt{c}}, & U_{22}^1 &= \frac{2A \hat{z}^2}{d \sqrt{c}}, \\ U_{33}^1 &= \frac{-2A}{r_i r_j \sqrt{c}} \left[c + \hat{z}^2 \frac{a}{d} \right], & U_{33}^2 &= \frac{A}{r_i r_j \sqrt{c}} [a + \hat{z}^2], & U_{31} &= U_{13} = U_{32} = U_{23} = 0, \\ A &= [8\pi^2 \mu]^{-1}, & h &= r_j^2 - r_i^2 + \hat{z}^2, & f &= r_i^2 - r_j^2 + \hat{z}^2. \end{aligned}$$

Надалі розглянемо аксіально-симетричні течії, при цьому $\gamma_\theta(\mathbf{Q}) = 0$.

При цьому інтегральне зображення для пошуку швидкості набуває вигляду

$$\begin{bmatrix} V_r(\mathbf{P}) \\ V_z(\mathbf{P}) \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_r(\mathbf{Q}) \\ \gamma_z(\mathbf{Q}) \end{bmatrix} d\Gamma \quad (2.7)$$

Зображення (2.7) буде використано для побудови інтегрального рівняння відносно невідомих густин.

3 Аналіз особливостей в ядрах інтегральних операторів

Компоненти $U_{ij}^{1,2}$ є неперервними функціями. Тому особливості в ядрах (2.7) виникають завдяки логарифмічному характеру еліптичних інтегралів $K(k)$ при $k \rightarrow 1$. Маємо

$$K(k) = \ln \frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2}\right) k'^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4}\right) k'^4 + \dots, \quad k'^2 = 1 - k^2.$$

Для обчислення еліптичних інтегралів застосовано алгоритм Гауса, заснований на використанні середнього арифметико-геометричного значення $AGM(a, b)$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{2AGM(a, b)}.$$

Алгоритм Гауса полягає у такому [9]:

$$a_0 = a; b_0 = b; a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}; b_1 = \sqrt{a_0 b_0}; \dots; a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}; b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}; \dots \quad (3.1)$$

$$AGM(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Зауважимо, що при застосуванні формул (3.1) точність $\varepsilon = |a_n - b_n| < 10^{-8}$ досягається за 6 ітерацій. Цей підхід дає змогу виявити логарифмічну особливість, інтеграція якої здійснюється методом, запропонованим в [21].

4 Тестування числового методу

Розглянуто сингулярне інтегральне рівняння у вигляді

$$\iint_S \frac{\gamma(x, y) dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = f(x_0, y_0), \quad (4.1)$$

де S є колом з радіусом R . В [22] отримано аналітичний розв'язок цього рівняння (4.1) з правою частиною $f(x_0, y_0) = \pi^2$ у вигляді $\gamma(x, y) = 1$. Рівняння (4.1) зведено до одновимірного рівняння

$$4 \int_0^R \frac{\gamma(\rho)}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \frac{\rho}{\rho + \rho_0} K(k) d\rho = \pi^2.$$

Отримане рівняння має логарифмічну особливість, яка не виражена в явному вигляді.

Зробимо заміну змінної $\rho = R \sin \vartheta$, що дозволяє позбавитися від кореневої особливості при ρ , близьких до R . Отримаємо

$$4 \int_0^{\pi/2} \frac{\gamma(\vartheta) \sin \vartheta}{\sin \vartheta + \sin \vartheta_0} K(k) d\vartheta = \pi^2.$$

При використанні M граничних елементів [9] в точках еолокації

$$\rho_j = R \sin \vartheta_j; \quad \vartheta_j = \pi \left(j - \frac{1}{2} \right) / 2M, \quad j = 1, \dots, M$$

при $M = 40$ були отримані значення, наведені в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 Порівняння числових та аналітичних значень

Номер елемента	1	5	15	20	25	30	35
Значення густини	1.000092	1.000083	1.000155	1.000163	1.000165	1.000173	1.000168

Дані, наведені в таблиці 4.1, свідчать про добру узгодженість числового та аналітичного розв'язків.

5 Висновки

Отримано інтегральне зображення швидкості рідини для аксіально-симетричної течії Стокса. Здійснено аналіз особливостей в ядрах сингулярних операторів. Запропоновано ефективний метод числового розв'язання сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними особливостями, що виникають при обчисленні еліптичних інтегралів. Наведено результати тестових розрахунків. В подальшому передбачається розв'язання крайових задач стосовно течії Стокса в аксіально-симетричних областях, до яких відносяться нанотрубки в репрезентативних об'ємах наноматеріалів.

Робота частково фінансується в рамках програми "Підтримка пріоритетних для держави наукових досліджень і науково-технічних (експериментальних) розробок Відділення фізико-технічних проблем енергетики НАН України" (КПКВК 6541230)

ЛІТЕРАТУРА

1. Sigalas M., Kushwaga M.S., Economou E.N., Kafesaki M., Psarobas, I.E., Steurer, W., Classical vibrational modes in phononic lattices: theory and experiment. *Zeitschrift für Kristallographie* 220. 2005. 765- 809.
2. Wang, W., Zeng, W., Ding, J., Finite element modeling of two-dimensional nanoscale structures with surface effects. *World Acad. Sci. Eng. Technol.* 46. 2010. 12-20.
3. Kushch V.I., Mogilevskaya, S.G., Stolarski, H.K., Crouch, S.L., 2013. Elastic fields and effective moduli of particulate nanocomposites with the Gurtin-Murdoch model of interfaces. *International Journal of Solids and Structures* 50. 1141-1153.
4. Mykhas'kiv, V.V., Zhabdinskyi, I.Ya., Zhang, Ch., 2014. Dynamic stresses due to time-harmonic elastic wave incidence on doubly periodic array of penny-shaped cracks. *Journal of Mathematical Sciences* 203. 114-122.
5. Mykhas'kiv V.V., B.M Stasyuk. Effective elastic properties of 3D composites with short curvilinear fibers: numerical simulation and experimental validation. *Solid State Phenomena*. 2017. Vol. 258. P. 452-455.
6. Kushch V.I. Stress field and effective elastic moduli of periodic spheroidal particle composite with Gurtin-Murdoch interface. *International Journal of Engineering Science*. 2018. Vol. 132. P. 79-96.
7. Дегтярьов К.Г., Гнітько В.І., Стрельникова О.О., Тонконоженко А.М. Розрахункові моделі на основі методів скінчених та граничних методів для аналізу механічних властивостей тривимірних нанокомпозитів. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2018. Т. 2. С. 43-54.
8. Deymier, P.A., *Acoustic Metamaterials and Phononic Crystal*. Berlin, Springer. 2013. 334 p.
9. Gnitko V., Naumemko Y., Strelnikova E. Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 22. Issue 4. P. 867-881. DOI: 10.1515/ijame-2017-0056.
10. Еселева Е.В. Гнітько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Пробл. машиностроения*. 2006. Т.9. №1. С.105 - 118.

11. Gnitko V., Degtyariv K., Karaiev A., Strelnikova E., Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity, *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 122, WIT Press, pp.13-25, 2019. DOI: 10.2495/BE410021.
12. Rivera, J.L., Starr, F.W.: Rapid transport of water via carbon nanotube. *J.Phys. Chem. C* 114, 3737–3742 (2010).
13. Chivilikhin, S.A., Gusarov, V.V., Popov, I.Yu.: Flows in nanostructures: hybrid classical-quantum model. *Nanosyst. Phys. Chem. Math.* 3, 7–26 (2012).
14. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Москва, Наука, 1970, 904 с.
15. Paul, D.R.: Creating new types of carbon-based membranes. *Science* 335(6067), 411–413 (2012)
16. Popov, I.Yu., Chivilikhin, S.A., Gusarov, V.V.: Model of fluid flow in nanotube: classical and quantum features. *J. Phys. Conf. Ser.* 248, 012006/1-8 (2010)
17. Popov, I.Yu.: Statistical derivation of modified hydrodynamic equations for nanotube flows. *Phys. Scr.* 83, 045601/1-3 (2011)
18. Ackerberg, R.C.: The viscous incompressible flow inside a cone. *J. Fluid Mech.* 21, 47–81 (1965)
19. Cortez R. The Method of Regularized Stokeslet. Society for Industrial and Applied Mathematics. Vol. 23, N4, P. 1204-1225 (2001).
20. Oseen C. W., Uber die Stoke'sche Formel und "uber eine " verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik Almquist & Wiksell, 1911, *Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, vi (29)
21. Naumenko V.V., Strelnikova H.A. Singular integral accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods. *Engineering analysis with boundary elements*. №26, pp. 95-98, 2002.
22. Кантор Б.Я. Стрельникова Е.А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды. Харьков: Новое слово, 2005. 252 с.

REFERENCES

1. Sigalas, M., Kushwaga, M.S., Economou, E.N., Kafesaki, M., Psarobas, I.E., Steurer, W., "Classical vibrational modes in phononic lattices: theory and experiment". *Zeitschrift für Kristallographie* 220, 765- 809, 2005.
2. Wang, W., Zeng, W., Ding, J., "Finite element modeling of two-dimensional nanoscale structures with surface effects". *World Acad. Sci. Eng. Technol.* 46, 12-20, 2010.
3. Kushch V.I., Mogilevskaya, S.G., Stolarski, H.K., Crouch, S.L., "Elastic fields and effective moduli of particulate nanocomposites with the Gurtin-Murdoch model of interfaces". *International Journal of Solids and Structures* 50, 1141-1153, 2013.
4. Mykhas'kiv, V.V., Zhadynskyi, I.Ya., Zhang, Ch., "Dynamic stresses due to time-harmonic elastic wave incidence on doubly periodic array of penny-shaped cracks". *Journal of Mathematical Sciences* 203, 114-122, 2014.
5. Mykhas'kiv V.V., Stasyuk B.M. "Effective elastic properties of 3D composites with short curvilinear fibers: numerical simulation and experimental validation". *Solid State Phenomena*. Vol. 258, P. 452-455, 2017.
6. Kushch V.I. "Stress field and effective elastic moduli of periodic spheroidal particle composite with Gurtin-Murdoch interface". *International Journal of Engineering Science*. Vol. 132, P. 79–96, 2018.
7. Dehtyar'ov K.H., Hnit'ko V.I., Strel'nikova O.O., Tonkonozhenko A.M. "Rozrakhunkovi modeli na osnovi metodiv skinchenykh ta hranychnykh metodiv dlya analizu mekhanichnykh vlastyvostey tryvymirnykh nanokompozytiv ". *Prykladni pytannya matematychnoho modelyuvannya*. T. 2, S. 43–54, 2018.
8. Deymier, P.A., *Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals*, Berlin, Springer, 2013, 334 p.
9. Gnitko V. Naumemko Y., Strelnikova E., "Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles". *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 22, Issue 4, P. 867-881, 2017. DOI: 10.1515/ijame-2017-0056.
10. Yeseleva Ye.V. Sobstvennyye kolebaniya sosudov vysokogo davleniya pri vzaimodeystvii s zhidkost'yu / Ye.V. Yeseleva, V.I. Gnit'ko, Ye.A. Strel'nikova // *Probl. mashinostroyeniya*. – 2006. T.9, №1. S.105 - 118. [in Russian]
11. Gnitko V., Degtyariv K., Karaiev A., Strelnikova E., Multi-domain boundary element method for axisymmetric problems in potential theory and linear isotropic elasticity, *WIT Transactions on Engineering Sciences*, 122, WIT Press, pp.13-25, 2019. DOI: 10.2495/BE410021.

12. Rivera, J.L., Starr, F.W.: Rapid transport of water via carbon nanotube. *J.Phys. Chem. C* 114, 3737–3742 (2010)
13. Chivilikhin, S.A., Gusarov, V.V., Popov, I.Yu.: Flows in nanostructures: hybrid classical-quantum model. *Nanosyst. Phys. Chem. Math.* 3, 7–26 (2012)
14. Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza*. Moskva, Nauka, 1970, 904 s. [in Russian]
15. Paul, D.R.: Creating new types of carbon-based membranes. *Science* 335(6067), 411–413 (2012).
16. Popov, I.Yu., Chivilikhin, S.A., Gusarov, V.V.: Model of fluid flow in nanotube: classical and quantum features. *J. Phys. Conf. Ser.* 248, 012006/1-8 (2010)
17. Popov, I.Yu.: Statistical derivation of modified hydrodynamic equations for nanotube flows. *Phys. Scr.* 83, 045601/1-3 (2011)
18. Ackerberg, R.C.: The viscous incompressible flow inside a cone. *J. Fluid Mech.* 21, 47–81 (1965).
19. Cortez R. *The Method of Regularized Stokeslet*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Vol. 23, N4, P. 1204-1225 (2001).
20. Oseen C. W., *Über die Stoke'sche Formel und "über eine " verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik* Almqvist & Wiksell, 1911, *Arkiv för matematik, astronomi och fysik, vi* (29)
21. Naumenko V.V., Strelnikova H.A. Singular integral accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods. *Engineering analysis with boundary elements*. №26, pp. 95-98, 2002.
22. Ye.A. Kantor, Ye.A. Strel'nikova. *Gipersingulyarnyye integral'nyye uravneniya v zadachakh mekhaniki sploshnoy sredy*. Khar'kov: Novoye slovo, 2005, 252 s. [in Russian]

Усатова Ольга Александрівна - аспірант, Інституту проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України, 0953933929, usatova.olia@gmail.com, Orcid 0000-0001-1267-2723.

Пальчиков Роман Романович - аспірант, Інституту проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАН України. Телефон:+380960300413, 19palchikovroman@gmail.com, Orcid 0000-0003-3806-8708.

Стрельникова Олена Александрівна, - доктор технічних наук, професор, провідний науковий співробітник, Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАНУ, Orcid: 0000-0003-0707-7214.

Усатова Ольга Александровна – аспірант, Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н. Подгорного НАН України. Телефон: +380953933929, usatova.olia@gmail.com, Orcid 0000-0001-1267-2723.

Пальчиков Роман Романович - – аспірант, Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н. Подгорного НАН України. Телефон: +380960300413, 19palchikovroman@gmail.com, Orcid 0000-0003-3806-8708.

Стрельникова Елена Александровна, - доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем машиностроєння ім. А. Н. Подгорного НАНУ, Orcid:0000-0003-0707-7214.

Usatova Olga – PhD student, A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences. Phone:+380953933929, usatova.olia@gmail.com, Orcid 0000-0001-1267-2723.

Palchikov Roman - PhD student, A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences. Phone: +380960300413, 19palchikovroman@gmail.com, Orcid 0000-0003-3806-8708.

Strelnikova Elena, DSc, Prof., leading researcher, A. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the Ukrainian Academy of Sciences, e-mail: elena15@gmx.com, Orcid 0000-0003-0707-7214.