

УДК 004.415.53

Идентификация отпечатков пальцев на основе гамильтоновых циклов распределения локальных признаков

О.М. Мелкозерова¹, С.Г. Рассомахин¹

¹Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, площадь Свободы 4, г. Харьков, 61022,
Украина
olja.mex@gmail.com

Рассмотрена задача нахождения длин Гамильтоновых циклов на сложных графах. Задача имеет много практических приложений, в том числе при определении оптимальных маршрутов (задача коммивояжера), идентификации структур графов (распознавание характеристик локальных признаков биометрических объектов) и др. При решении задачи верификации биометрических образцов возникают проблемы дописывания или исчезновения опорных точек, деформация расстояний между ними, линейные и угловые смещения всего образца. При помощи метода, описанного в статье, возможно исключение проблемы смещений, так как решение обладает устойчивостью при перемешивании точек. Опорные планы, которые можно получить, также обладают подобного рода устойчивостью. Для их получения необходима меньшая вычислительная сложность, это обеспечивает большую точность распознавания. Предложено подробное описание решения задачи, основанное на применении метода ветвей и границ для симметричных матриц графов, описывающих распределение локальных признаков на изображениях отпечатков пальцев. Известно, что гарантированное получение решения нахождения длины Гамильтонова цикла для произвольного графа плоскостного распределения точек возможно только при использовании полного перебора всех вариантов. Однако вычислительная сложность такого перебора вычислительно не приемлема. Метод ветвей и границ, как и все существующие методы направленного поиска, не гарантирует нахождение решения при произвольно большой размерности графа. Поэтому предложен способ декомпозиции графов, позволяющий свести сложную задачу к совокупности более простых. При этом достигается существенное снижение вычислительной сложности. Показана относительная инвариантность метрики Гамильтоновых циклов к вероятностным смещениям, характерным для задач распознавания биометрических образов.

Ключевые слова: Гамильтонов цикл, кратчайшее расстояние, локальные признаки, оптимальный маршрут.

Розглянуто задачу знаходження довжин Гамильтонових циклів на складних графах. Завдання має багато практичних застосувань, в тому числі при визначенні оптимальних маршрутів (завдання комівояжера), ідентифікації структур графів (розпізнавання характеристик локальних ознак біометричних об'єктів) та ін. При вирішенні задачі верифікації біометричних зразків виникають проблеми дописування або зникнення опорних точок, деформування відстаней між ними, появи лінійних та кутових зміщень всього зразку. За допомогою методу, який описується у статті, можна виключити проблему зміщень, так як рішення має стійкість при змішуванні точок. Опорні плани, які також отримуються, також мають подібного роду стійкість. Але для їх отримання необхідна менша обчислювальна складність, це забезпечує більшу точність розпізнавання. Запропоновано докладний опис рішення задачі, заснований на застосуванні методу гілок і меж для симетричних матриць графів, які описують розподіл локальних ознак на зображеннях відбитків пальців. Відомо, що гарантоване отримання рішення знаходження довжини Гамильтонова циклу для довільного графа площинного розподілу точок можливо тільки при використанні повного перебору всіх варіантів. Однак обчислювальна складність такого перебору обчислювально не прийнятна. Метод гілок і меж, як і всі існуючі методи спрямованого пошуку, не гарантує знаходження рішення при довільно великій розмірності графа. Тому запропонований спосіб декомпозиції графів, що дозволяє звести складну задачу до сукупності більш простих. При цьому досягається істотне зниження обчислювальної складності. Показана відносна інваріантність метрики Гамильтонових циклів до імовірнісних зсувів, які є характерними для задач розпізнавання біометричних образів.

Ключові слова: Гамильтонів цикл, найкоротша відстань, локальні ознаки, оптимальний маршрут, біометрика.

The problem of finding the lengths of Hamiltonian cycles on complex graphs is considered. The task has such practical applications as determining the optimal routes (salesman's task), identifying graph structures (recognizing the characteristics of local features of biometric objects), etc. When solving the task of verification of biometric samples, the problems of addition or disappearance of reference points, deformation of the distances between them, the appearance of linear and angular displacements of the whole sample emerges. Using the method described in the article, the problem of displacements can be eliminated, as the solution is stable when shuffling of the points is present. Moreover, it is possible to obtain reference plans with the same stability. Obtaining them requires less computational complexity and provides greater recognition accuracy. A detailed description of the problem solution based on the application of the method of branches and boundaries for symmetric matrices of graphs, which describe the distribution of local features in the images of fingerprints, has been proposed. It is known that a guaranteed solution for finding the length of the Hamiltonian cycle for an arbitrary graph of the planar distribution of points is possible only by using an exhaustive search. However, the computational complexity of such a search is not acceptable. The method of branches and boundaries, like all existing methods of directional search, does not guarantee finding a solution with an arbitrarily large dimension of the graph. Therefore, a method of decomposing graphs is proposed, which allows reducing a complex problem to a set of simpler ones. That allows for a significant reduction in computational complexity. The relative invariance of the metrics of Hamiltonian cycles to probabilistic shifts, which are characteristic of biometric pattern recognition problems, has been shown.

Keywords: Hamiltonian cycle, the shortest distance, local features, an optimal route, biometric.

1 Вступление

Математическое решение задач идентификации и аутентификации биометрических объектов существенно затруднено из-за наличия неконтролируемых вероятностных искажений. Эти искажения проявляются при получении нескольких реализаций одних и тех же объектов в различных условиях. Доминирующим видом искажений являются афинные – линейные сдвиги и повороты плоскостных изображений. Проблема надежности распознавания, в основном, заключается в правильном выборе метрики оценки степени похожести модифицированных реализаций биометрических образов. Особенно актуальным является выбор подходящей метрики при анализе дактилоскопических изображений отпечатков пальцев. В соответствии с принятыми международными стандартами идентификация отпечатков производится, главным образом, по характеристикам (взаимному расположению на плоскости) локальных признаков – минуций. Поэтому биометрическими шаблонами отпечатков пальцев, фактически, являются плоскостные распределения точек локальных признаков.

Одной из перспективных метрик оценки похожести плоскостных распределений точек является метрика Гамильтоновых циклов. Эта метрика предполагает вычисление замкнутых последовательностей ребер графа, которые соединяют точки (узлы графов) определенным образом, чтобы получить кратчайший маршрут. Получаемый, как правило, единственный кратчайший маршрут и называется Гамильтоновым циклом. Очевидно, что объективность и потенциальные преимущества метрики Гамильтоновых циклов следуют из неизменности их длины при смещениях и поворотах графов. В большинстве практических случаев поиск Гамильтоновых циклов на графах связан с решением задачи коммивояжера.

В канонической постановке задача коммивояжера формулируется следующим образом. Имеется совокупность из n городов. Коммивояжер, выходящий из какого-нибудь фиксированного города, желает посетить $n - 1$ других городов и вернуться в исходный пункт. В каждый из городов допускается входить и выходить только один раз. Расстояния между всеми этими городами известны. Требуется установить, в каком порядке он должен посещать города, чтобы общее пройденное расстояние было минимально.

Таким образом, суть задачи сводится к отысканию минимального расстояния между совокупностью точек на плоскости при обязательном, однократном их посещении. Исходными данными при анализе биометрических шаблонов отпечатков пальцев является совокупность из n точек (минуций) с заданными координатами (X_i, Y_i) , $i \in [1, n]$. Данная совокупность может быть использована для формирования квадратной симметричной матрицы взаимных расстояний M , возможный вид которой представлен в таблице 1.1. Элементы матрицы являются взаимными евклидовыми расстояниями между узлами графа:

$$d_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}, \quad d_{ij} = d_{ji}, \quad i, j \in [1, n], \quad (1.1)$$

Поскольку условиями задачи определено, что $n > 1$, а вход и выход в каждую из вершин может быть осуществлен только один раз, то переходы при совпадающих индексах $i = j$ являются запрещенными. Для того, чтобы придать задаче формализованный вид, достаточно положить величины соответствующих расстояний $d_{ij}|_{i=j} = \infty$. Поэтому элементы главной диагонали матрицы содержат ∞ .

Следует отметить, что матрица взаимных расстояний остается неизменной при произвольных поворотах и линейных сдвигах распределения точек анализируемого графа. Это свойство предопределяет потенциальное преимущество метрики Гамильтоновых циклов, как объективной характеристики индивидуальных свойств плоскостных распределений. При этом, возможная смена лексикографического перечисления (нумерации) вершин в условиях действия афинных искажений не влияет на характеристики метрики. При этом происходит лишь циклический сдвиг элементов в строках, что не вызывает потерю оптимального решения, если оно существует.

2 Описание алгоритма нахождения Гамильтонова пути методом ветвей и границ

Для решения задачи нахождения длин кратчайших гамильтоновых циклов был выбран метод ветвей и границ [1], позволяющий на этапе последовательного анализа исключать заведомо не выгодные варианты маршрутов и сокращающий, тем самым, вычислительную сложность поиска.

Следует отметить, что в [1] достаточно хорошо исследованы свойства выбранного метода для особого случая – несимметричной матрицы взаимных расстояний. В рассматриваемой задаче матрица является симметричной относительно главной диагонали. Эта особенность матрицы вызывает существенное увеличение ветвей поиска и исключения вариантов решений, т.е. делает задачу более громоздкой. Учитывая достаточно большую размерность биометрических шаблонов (от 40 до 150 минут), в силу отмеченных выше причин, рассчитывать на нахождение истинного Гамильтонова цикла на полном распределении не следует. Поэтому мы рассматриваем возможность декомпозиции полного графа на совокупность подграфов меньшей размерности. Это является полезным, так как вместо одной числовой характеристики распределения точек получается некое множество Гамильтоновых циклов подграфов. Увеличение количества числовых характеристик распределений повышает объективность метрики при распознавании отпечатков по их биометрическим шаблонам.

Таблица 1.1 - Матрица взаимных расстояний между точками

| | | | | | | | | | | | |
|----------|--------------|--------------|--------------|----------|----------|------------------|--------------|------------------|-----|-----|--------------|
| d_{ij} | 0 | 1 | 2 | ... | ... | $j-1$ | j | $j+1$ | ... | ... | n |
| 0 | ∞ | d_{01} | d_{02} | ... | ... | $d_{0(j-1)}$ | d_{0j} | $d_{0(j+1)}$ | ... | ... | d_{0n} |
| 1 | d_{10} | ∞ | d_{12} | ... | ... | $d_{1(j-1)}$ | d_{1j} | $d_{1(j+1)}$ | ... | ... | d_{1n} |
| 2 | d_{20} | d_{21} | ∞ | ... | ... | $d_{2(j-1)}$ | d_{2j} | $d_{2(j+1)}$ | ... | ... | d_{2n} |
| ... | ... | ... | ... | ∞ | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $i-1$ | $d_{(i-1)0}$ | $d_{(i-1)1}$ | $d_{(i-1)2}$ | ... | ... | ∞ | $d_{(i-1)j}$ | $d_{(i-1)(j+1)}$ | ... | ... | $d_{(i-1)n}$ |
| i | d_{i0} | d_{i1} | d_{i2} | ... | ... | $d_{i(j-1)}$ | ∞ | d_{i1} | ... | ... | d_{in} |
| $i+1$ | $d_{(i+1)0}$ | $d_{(i+1)1}$ | $d_{(i+1)2}$ | ... | ... | $d_{(i+1)(j+1)}$ | $d_{(i+1)j}$ | ∞ | ... | ... | $d_{(i+1)n}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ∞ | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| n | d_{n0} | d_{n1} | d_{n2} | ... | ... | $d_{n(j-1)}$ | d_{nj} | $d_{n(j+1)}$ | ... | ... | ∞ |

Блок-схема разработанного алгоритма решения для симметричной матрицы взаимных расстояний изображена на рисунке 2.1. Алгоритм является циклическим и предполагает, при заданной размерности графа (подграфа) n и вычисленной матрице M , выполнение $(n-2)$ раз последовательности однотипных этапов вычислительных преобразований. Суть этапов сводится к следующему.

Этап 1. Строится некоторая нижняя оценка длины маршрута для множества всех возможных Гамильтоновых циклов. Для этого осуществляется, так называемое, приведение матрицы. В каждой строке матрицы (поочередно) находится минимальный элемент – константа приведения. Значение константы приведения вычитается из значений всех элементов текущей строки. В результате, по крайней мере, один из элементов строки становится нулем. Подобные действия осуществляются для всех строк матрицы M . После этого, аналогичное приведение осуществляется по столбцам матрицы. Сумма констант приведения по строкам и столбцам образуют оценку нижней границы длины маршрута.

Этап 2. После приведения матрицы множество всех циклов разбивается на два частично пересекающихся подмножества. Первое подмножество состоит из гамильтоновых циклов, включающих некоторую дугу (i, j) , а второе – состоит из контуров, не включающих эту дугу (i, j) . Выбор дуги (i, j) осуществляется исходя из того, что наиболее резкое изменение оценки произойдет в том случае, когда выбирается элемент матрицы, с величиной взаимного расстояния $d_{i,j}=0$. Поэтому, после замены $d_{i,j}=0$ на $d_{i,j}=\infty$, сумма минимальных элементов в i -й строке, j -ом столбце приобретает наибольшее значение.

Исключение дуги (i, j) из цикла производится заменой соответствующего элемента $d_{i,j}$ в исходной M и приведенной M^* матрицах на значение ∞ . В результате такой замены появляется

возможность провести дополнительное приведение матрицы, приводящее к улучшению оценки нижней границы длины цикла.

Включение дуги (i, j) в маршрут ведет к сокращению размеров матрицы (вычеркивается i -я строка, j -ый столбец). Одновременно появляется возможность исключить одну дугу.

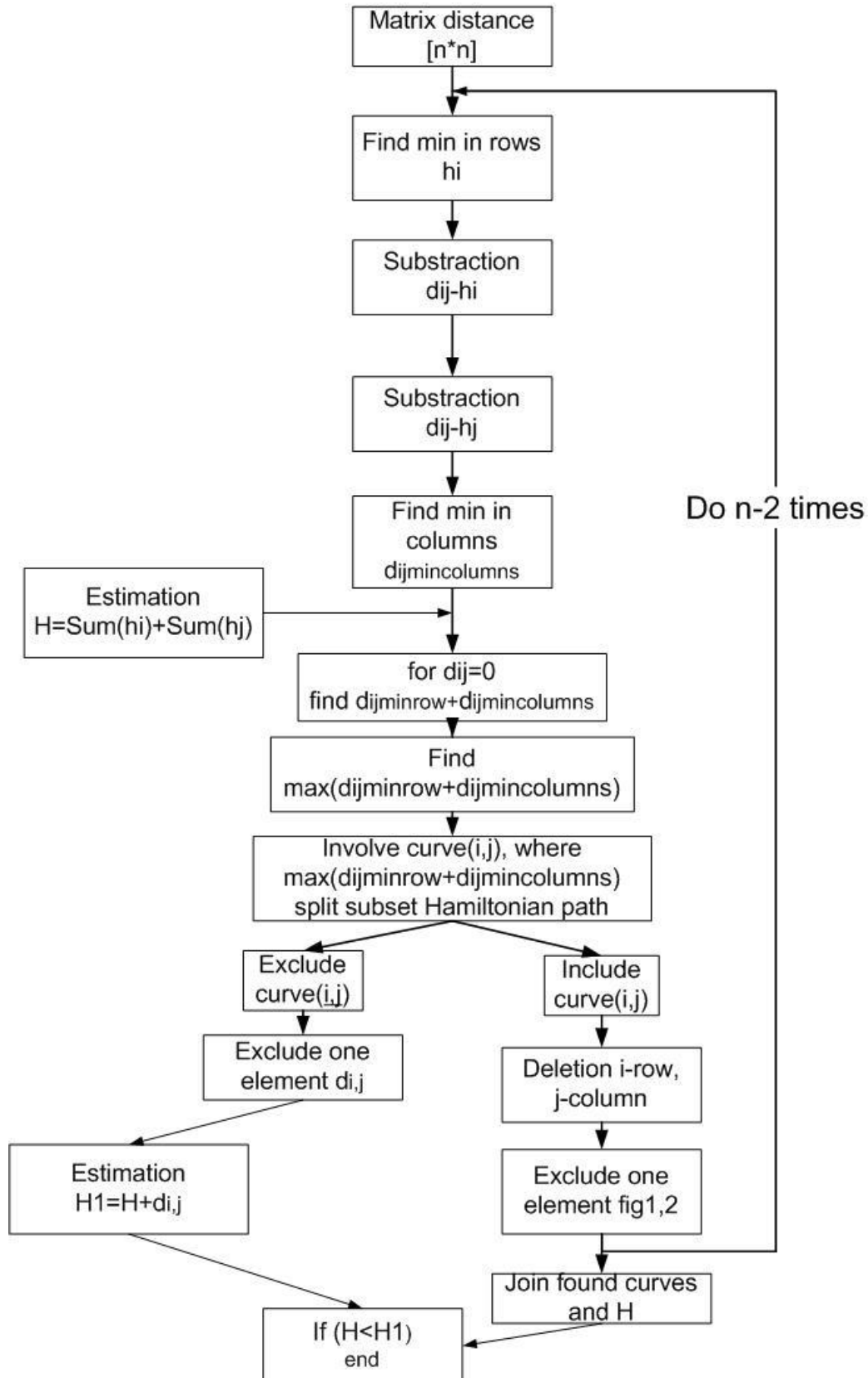


Рис. 2.1 Алгоритм решения задачи Коммивояжера

Исключение этой дуги очень важный элемент алгоритма. Включение дуги (i, j) ведет к образованию некоторого связанного пути, который соединяет, например, точки p и q , запрещается включать в маршрут дугу (q, p) . В простейшем случае, после выбора дуги (i, j) , исключить стоит дугу (j, i) , то есть элемент $d_{j,i}$ следует заменить на значение ∞ . Эта ситуация иллюстрируется на рис. 2.2. Пусть, например, в ходе решения получена дуга $(0,4)$, то заменять на бесконечное значение следует длину дуги $(4,0)$. Если в результате решения выбрана последовательность дуг – $(0,4)$, $(2,3)$ и очередной является дуга $(0,2)$, то исключать стоит элемент $(4,3)$ (рисунок 2.3).

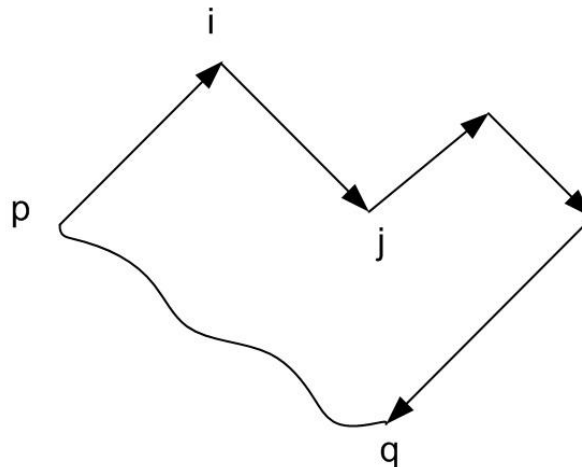


Рис. 2.2 Пояснение к исключению дуги.

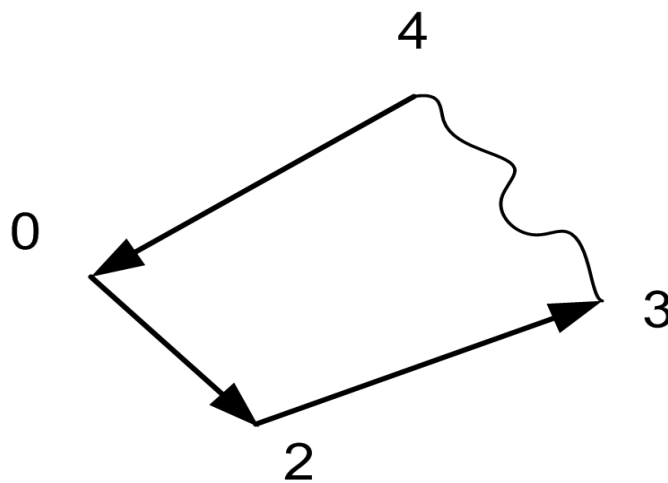


Рис. 2.3 Исключение дуги $(4,3)$

3 Применение алгоритма для нахождения Гамильтонова цикла в условиях аффинных искажений

Рассмотрим практическое применение алгоритма для подграфа биометрического шаблона небольшой размерности $n = 6$. При этом разбиение полного распределения на подграфы может быть выполнено, например, по принципу удаленности от центра масс распределения минут. После декомпозиции, последовательно решается задача определения наименьшей длины Гамильтонова цикла для каждого из подграфов. Это приводит к нахождению множества (по числу подграфов) числовых оценок, являющихся объективной характеристикой анализируемого отпечатка. Как отмечалось выше, одним из типичных искажений распределений точек (узлов), которое проявляется на различных реализациях биометрических шаблонов одного и того же дактилоскопического образа, являются линейные повороты и сдвиги. Пример, представленный ниже, иллюстрирует устойчивость метрики Гамильтоновых циклов в условиях подобных искажений.

Пусть матрица координат локальных признаков (биометрический шаблон) задан в виде, представленном в таблице 3.1. Покажем применение описанного алгоритма для нахождения длины Гамильтонова цикла. Столбцы X , Y матрицы содержат плоскостные координаты точек эталонного распределения. Дополнительные столбцы X' , Y' , содержат измененные координаты при линейном повороте (X' , Y'), а также при линейном повороте и дополнительном смещении графа (X'' , Y''). Преобразование эталонного графа описывается следующими матричными преобразованиями:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = U(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}; \quad \text{где } U(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{\pi}{12} \quad (3.1)$$

$$\begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \end{pmatrix} = U(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix};$$

В таблице 3.1 представлены координаты точек. Применим для них алгоритм, описанный в предыдущем пункте. Координаты этих точек, повернутых на 15° вокруг оси OZ , (X' , Y'), и координаты точек, которые были получены путем поворота на 15° вокруг оси OZ , смещением на 0,3 по оси X и смещением на 0,4 по оси Y имеют значение (X'' , Y'').

Таблица 3.1 – Координаты точек эталонного графа и его вариаций при аффинных искажениях

| n | X | Y | X' | Y' | X'' | Y'' |
|---|------|------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 0,61 | 0,57 | 0,442 | 0,708 | 0,742 | 1,108 |
| 1 | 0,39 | 0,7 | 0,373 | 0,348 | 0,496 | 1,177 |
| 2 | 0,45 | 0,24 | 0,446 | 0,886 | 0,673 | 0,748 |
| 3 | 0,22 | 0,49 | 0,086 | 0,530 | 0,386 | 0,930 |
| 4 | 0,66 | 0,74 | 0,196 | 0,777 | 0,746 | 1,286 |
| 5 | 0,27 | 0,72 | 0,074 | 0,765 | 0,374 | 1,165 |

Матрица взаимных расстояний между точками для всех трех случаев (исходного положения точек на плоскости, повернутых и смещенных точек) останется неизменной (таблица 3.2).

Таблица 3.2 - Матрица взаимных расстояний между точками

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | h_i |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|
| 0 | ∞ | 0,256 | 0,367 | 0,398 | 0,177 | 0,372 | 0,177 |
| 1 | 0,256 | ∞ | 0,464 | 0,27 | 0,273 | 0,122 | 0,122 |
| 2 | 0,367 | 0,464 | ∞ | 0,34 | 0,542 | 0,513 | 0,34 |
| 3 | 0,398 | 0,27 | 0,34 | ∞ | 0,506 | 0,235 | 0,235 |
| 4 | 0,177 | 0,273 | 0,542 | 0,506 | ∞ | 0,391 | 0,177 |
| 5 | 0,372 | 0,122 | 0,513 | 0,235 | 0,391 | ∞ | 0,122 |

Для получения нижней границы значения контура осуществим приведение по строкам. Для этой цели в каждой строке выбираем минимальный элемент h_i (таблица 3.2) и вычитаем его из всех элементов строки. Результат этой операции представлен в таблице 3.3. Константами приведения будут следующие величины 0,177; 0,122; 0,34; 0,235; 0,177; 0,122. Сумма данных констант и дает нижнюю границу длины для всех гамильтоновых циклов ($\sum_{i=1}^n h_i = 1,173$). Эта оценка может быть улучшена за счет приведения по столбцам. Константы приведения показаны в таблице 3.3. В результате приведения по столбцам получит таблицу 3.4. Нижняя граница Гамильтоновых циклов составляет $\text{НГМ} = \sum_{i=1}^n h_i + \sum_{j=1}^n h_j = 1,278$.

Таблиця 3.3 – Промежуточні розрахунки

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>n</i> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | ∞ | 0,079 | 0,19 | 0,221 | 0 | 0,195 |
| 1 | 0,134 | ∞ | 0,342 | 0,148 | 0,151 | 0 |
| 2 | 0,027 | 0,124 | ∞ | 0 | 0,202 | 0,173 |
| 3 | 0,163 | 0,035 | 0,105 | ∞ | 0,272 | 0 |
| 4 | 0 | 0,096 | 0,365 | 0,329 | ∞ | 0,214 |
| 5 | 0,25 | 0 | 0,391 | 0,113 | 0,269 | ∞ |
| h_i | 0 | 0 | 0,105 | 0 | 0 | 0 |

Таблиця 3.4 – Промежуточні розрахунки

| | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------------------|
| <i>n</i> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | НГМ=1,173+0,105=1,278 |
| 0 | ∞ | 0,079 | 0,085 | 0,221 | 0 | 0,195 | |
| 1 | 0,134 | ∞ | 0,237 | 0,148 | 0,151 | 0 | |
| 2 | 0,027 | 0,124 | ∞ | 0 | 0,202 | 0,173 | |
| 3 | 0,163 | 0,035 | 0 | ∞ | 0,272 | 0 | |
| 4 | 0 | 0,096 | 0,26 | 0,329 | ∞ | 0,214 | |
| 5 | 0,25 | 0 | 0,286 | 0,113 | 0,269 | ∞ | |

Далі просматриваються всі нульові елементи матриці і знаходиться сума констант приведення для кожного нульового елемента. Вони показані в таблиці 3.5, в круглих дужках. З цих значень вибираємо максимальне значення (0,23) що відповідає дугі (0,4). НГМ $[0,4]=1,278+0,23=1,508$.

Включення дуги (0,4) веде до виключення всієї 0-ї строки і 4-го стовпця. Елемент (4,0) змінюється на знак ∞ (таблиця 3.6). Оцінку можна покращити за рахунок приведення по рядках і стовпцям (таблиця 3.6, 3.7 і 3.8). НГМ $=1,278+0,096+0,027=1,401$.

Таблиця 3.5 – Промежуточні розрахунки

| | | | | | | | |
|----------|---------------|---------------|---------------|--------------|--------------|---------------|----------------------|
| <i>n</i> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | НГМ=1,278+0,23=1,508 |
| 0 | ∞ | 0,079 | 0,085 | 0,221 | $0^{(0,23)}$ | 0,195 | |
| 1 | 0,134 | ∞ | 0,237 | 0,148 | 0,151 | $0^{(0,134)}$ | |
| 2 | 0,027 | 0,124 | ∞ | $0^{(0,14)}$ | 0,202 | 0,173 | |
| 3 | 0,163 | 0,035 | $0^{(0,085)}$ | ∞ | 0,272 | $0^{(0)}$ | |
| 4 | $0^{(0,123)}$ | 0,096 | 0,26 | 0,329 | ∞ | 0,214 | |
| 5 | 0,25 | $0^{(0,128)}$ | 0,286 | 0,113 | 0,269 | ∞ | |

Таблиця 3.6 – Промежуточні розрахунки

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|
| <i>n</i> | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | h_i |
| 1 | 0,134 | ∞ | 0,237 | 0,148 | 0 | 0 |
| 2 | 0,027 | 0,124 | ∞ | 0 | 0,173 | 0 |
| 3 | 0,163 | 0,035 | 0 | ∞ | 0 | 0 |
| 4 | ∞ | 0,096 | 0,26 | 0,329 | 0,214 | 0,096 |
| 5 | 0,25 | 0 | 0,286 | 0,113 | ∞ | 0 |

Таблиця 3.7 – Промежуточні розрахунки

| | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>n</i> | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 |
| 1 | 0,134 | ∞ | 0,237 | 0,148 | 0 |
| 2 | 0,027 | 0,124 | ∞ | 0 | 0,173 |
| 3 | 0,163 | 0,035 | 0 | ∞ | 0 |
| 4 | ∞ | 0 | 0,164 | 0,233 | 0,118 |
| 5 | 0,25 | 0 | 0,286 | 0,113 | ∞ |
| h_i | 0,027 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Таблиця 3.8 – Промежуточные расчеты

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|-----------------------------|
| 1 | 0,107 | ∞ | 0,237 | 0,148 | 0 | НГМ=1,278+0,096+0,027=1,401 |
| 2 | 0 | 0,124 | ∞ | 0 | 0,173 | |
| 3 | 0,136 | 0,035 | 0 | ∞ | 0 | |
| 4 | ∞ | 0 | 0,164 | 0,233 | 0,118 | |
| 5 | 0,223 | 0 | 0,286 | 0,113 | ∞ | |

Находится сумма констант приведения для каждого нулевого элемента (таблица 3.9). Максимальное значение 0,164 соответствует элементу (3,2). НГМ=1,401+0,164=1,565 .

Таблиця 3.9 – Промежуточные расчеты

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 | |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-----------------------|
| 1 | 0,107 | ∞ | 0,237 | 0,148 | $0^{(0,107)}$ | НГМ=1,401+0,164=1,565 |
| 2 | $0^{(0,107)}$ | 0,124 | ∞ | $0^{(0,113)}$ | 0,173 | |
| 3 | 0,136 | 0,035 | $0^{(0,164)}$ | ∞ | $0^{(0)}$ | |
| 4 | ∞ | $0^{(0,118)}$ | 0,164 | 0,233 | 0,118 | |
| 5 | 0,223 | $0^{(0,113)}$ | 0,286 | 0,113 | ∞ | |

Исключается 3-я строка, 2-ой столбец (таблица 3.10). Элемент (2,3) следует заменить знаком ∞ (таблица 3.10). Значение может быть улучшено за счет приведения по столбцам (таблица 3.10 - 3.11). НГМ=1,401+0,113=1,514 .

Таблиця 3.10 – Промежуточные расчеты

| n | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 0,107 | ∞ | 0,148 | 0 |
| 2 | 0 | 0,124 | ∞ | 0,173 |
| 4 | ∞ | 0 | 0,233 | 0,118 |
| 5 | 0,223 | 0 | 0,113 | ∞ |
| h_i | 0 | 0 | 0,113 | 0 |

Таблиця 3.11 – Промежуточные расчеты

| n | 0 | 1 | 3 | 5 | |
|-----|----------|----------|----------|----------|-----------------------|
| 1 | 0,107 | ∞ | 0,035 | 0 | НГМ=1,401+0,113=1,514 |
| 2 | 0 | 0,124 | ∞ | 0,173 | |
| 4 | ∞ | 0 | 0,12 | 0,118 | |
| 5 | 0,223 | 0 | 0 | ∞ | |

Находится сумма констант приведения для каждого нулевого элемента (таблица 3.12). Максимальное значение 0,231 соответствует значению (2,0). НГМ=1,514+0,231=1,745.

Таблиця 3.12 – Промежуточные расчеты

| n | 0 | 1 | 3 | 5 | |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|-----------------------|
| 1 | 0,107 | ∞ | 0,035 | $0^{(0,153)}$ | НГМ=1,514+0,231=1,745 |
| 2 | $0^{(0,231)}$ | 0,124 | ∞ | 0,173 | |
| 4 | ∞ | $0^{(0,118)}$ | 0,12 | 0,118 | |
| 5 | 0,223 | 0 | $0^{(0,035)}$ | ∞ | |

Исключается 2-я строка, 0-й столбец (таблица 3.13). Элемент (4,3) заменяется знаком ∞ . Значение НГМ остается прежним, НГМ=1,514 .

Таблиця 3.13 – Промежуточные расчеты

| n | 1 | 3 | 5 | |
|-----|----------|----------|----------|-----------|
| 1 | ∞ | 0,035 | 0 | НГМ=1,514 |
| 4 | 0 | ∞ | 0,118 | |
| 5 | 0 | 0 | ∞ | |

Находится сумма констант приведения для каждого нулевого элемента (таблица 3.14). Максимальное значение 0,153 соответствует элементу (1,5).

Таблица 3.14 – Промежуточные расчеты

| | | | | |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| <i>n</i> | 1 | 3 | 5 | НГМ=1,514+0,153=1,667 |
| 1 | ∞ | 0,035 | 0 ^(0,153) | |
| 4 | 0 ^(0,118) | ∞ | 0,118 | |
| 5 | 0 ⁽⁰⁾ | 0 ^(0,035) | ∞ | |

Исключается 1-я строка и 5-ый столбец. Элемент (5,1) заменяется знаком ∞ . Из таблицы 3.15 можно получить две недостающие дуги, которые входят в маршрут (4,1) и (5,3). НГМ=1,514.

Таблица 3.15 – Промежуточные расчеты

| | | | |
|----------|----------|----------|-----------|
| <i>n</i> | 1 | 3 | НГМ=1,514 |
| 4 | 0 | ∞ | |
| 5 | ∞ | 0 | |

Дуги, которые были получены в ходе решения, можно объединить в контур 0,4-3,2-2,0-1,5-4,1-5,3. После определенной перестановки получается последовательность: 0,4-4,1-1,5-5,3-3,2-2,0=0,177+0,367+0,34+0,235+0,122+0,273=1,514. Это и есть решение.

После получения некоторого Гамильтонова цикла, следует проанализировать оборванные ветви дерева поиска. Необходимо убедиться, что среди подмножества (0,4) нет оптимального решения. Остальные ветви рассматривать не смысла по очевидным причинам. Элемент $d_{1,4}$ следует заменить знаком ∞ (Таблица 3.16). После приведения по строкам и столбцам (Таблица 3.16, 3.17, 3.18) находится сумма констант приведения для каждого 0-го элемента (Таблица 3.19).

Максимальное значение приходится на дугу (4,0), что является недопустимым вариантом, то есть рассматривать данную ветвь нет смысла.

Дерево решений приведено на рисунке 3.1, $H=1,514$. На рисунке 3.2 приведен Гамильтонов контур для смещенных и повернутых точек.

Таблица 3.16 – Промежуточные расчеты

| | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|
| <i>n</i> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | h_i |
| 0 | ∞ | 0,079 | 0,085 | 0,221 | ∞ | 0,195 | 0,079 |
| 1 | 0,134 | ∞ | 0,237 | 0,148 | 0,151 | 0 | 0 |
| 2 | 0,027 | 0,124 | ∞ | 0 | 0,202 | 0,173 | 0 |
| 3 | 0,163 | 0,035 | 0 | ∞ | 0,271 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0,096 | 0,26 | 0,329 | ∞ | 0,214 | 0 |
| 5 | 0,25 | 0 | 0,286 | 0,113 | 0,269 | ∞ | 0 |

Таблица 3.17 – Промежуточные расчеты

| | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>n</i> | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | ∞ | 0 | 0,006 | 0,142 | ∞ | 0,116 |
| 1 | 0,134 | ∞ | 0,237 | 0,148 | 0,151 | 0 |
| 2 | 0,027 | 0,124 | ∞ | 0 | 0,202 | 0,173 |
| 3 | 0,163 | 0,035 | 0 | ∞ | 0,271 | 0 |
| 4 | 0 | 0,096 | 0,26 | 0,329 | ∞ | 0,214 |
| 5 | 0,25 | 0 | 0,286 | 0,113 | 0,269 | ∞ |
| h_i | 0 | 0 | 0 | 0 | 0,151 | 0 |

Таблиця 3.18 – Промежуточные расчеты

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | ∞ | 0 | 0,006 | 0,142 | ∞ | 0,116 |
| 1 | 0,134 | ∞ | 0,237 | 0,148 | 0 | 0 |
| 2 | 0,027 | 0,124 | ∞ | 0 | 0,051 | 0,173 |
| 3 | 0,163 | 0,035 | 0 | ∞ | 0,12 | 0 |
| 4 | 0 | 0,096 | 0,26 | 0,329 | ∞ | 0,214 |
| 5 | 0,25 | 0 | 0,286 | 0,113 | 0,118 | ∞ |

4. Анализ полученных решений при различной размерности подграфов

Рассмотрим полученные решения на других подграфах, с различным количеством точек. Сгенерируем точки, x и y , которые меняются в пределах 0-1000. На рисунке 4.1 (а-е) при помощи описанного выше алгоритма изображены контуры. Как видно из изображений, при количестве точек 5-11, 13 алгоритм выдает оптимальное решение, тогда как при $n = 12$ возникает пересечение контура (рисунок 4.1 д, полученное решение не есть оптимальным). Однако, возможно получение оптимального решения путем некоторой перестановки точек. На рисунке красным цветом выделен подправленный участок маршрута после перестановки точек. То есть, возможно получение оптимального решения путем анализа на пересечение отрезков маршрута.

Таблиця 3.19 – Промежуточные расчеты

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-----------|
| 0 | ∞ | $0^{(0,006)}$ | 0,006 | 0,142 | ∞ | 0,116 |
| 1 | 0,134 | ∞ | 0,237 | 0,148 | $0^{(0,051)}$ | $0^{(0)}$ |
| 2 | 0,027 | 0,124 | ∞ | $0^{(0,113)}$ | 0,051 | 0,173 |
| 3 | 0,163 | 0,035 | $0^{(0,006)}$ | ∞ | 0,12 | $0^{(0)}$ |
| 4 | $0^{(0,123)}$ | 0,096 | 0,26 | 0,329 | ∞ | 0,214 |
| 5 | 0,25 | $0^{(0,113)}$ | 0,286 | 0,113 | 0,118 | ∞ |

При дальнейшем увеличении количества точек кратчайшее решение также не получаем. Однако после увеличения пределов, в которых изменяется x и y ($x=0\dots 2000$; $y=0\dots 2000$), были получены оптимальные решения для $n = 20$, $n = 30$. Таким образом, на получение оптимального маршрута при применении метода ветвей и границ влияет плотность нанесения точек и расстояния между ними.

Были рассмотрены также решения при увеличении пределов от 0 до 10000, но количество точек, при котором было получено оптимальное решение не превышает 30 (рисунок 4.1 и), при $n = 50$ оптимальное решение получено не было (рисунок 4.1 к).

Если матрица взаимных расстояний симметричная, то при решении задачи коммивояжера возникает множество решений, среди которых может находиться и оптимальное. Алгоритм не обеспечивает оптимальное решение для большого количества точек, но при изменении их порядка, можно найти решения, которые имеют одинаковые маршруты.

Так, например, для 18 точек (упорядоченные и перемешанные координаты приведены в таблице 4.1) было получено 6 тождественных опорных решений (таблица 4.2).

5 Выводы

В статье подробно описан алгоритм решения задачи коммивояжера методом ветвей и границ. Рассматривается подробный расчет для шести точек. Проведен анализ возможностей данного алгоритма путем рассмотрения различного количества точек на маршруте. Количество точек, для которых алгоритм однозначно приводит к оптимальному плану равно десяти. Однако есть возможность доработки алгоритма.

Показано, что главной проблемой при нахождении оптимального маршрута является проблема пересечения некоторых участков при получении опорного плана. Таким образом, возможно

получение оптимального маршрута путем проверки на пересекаемость отрезков и некоторой перестановки точек.

В результате исследований выявлено, что на результат получения оптимального маршрута влияет плотность распределения точек на маршруте. При значительном отдалении точек друг от друга получено оптимальное решение для тридцати точек. Но дальнейшее увеличение точек до пятидесяти не дало оптимального решения.

Еще к одному свойству этого алгоритма относится то, что при отыскании оптимального решения мы находим множество опорных планов, которые не являются оптимальными, но неизменны для определенной совокупности точек независимо от их порядка.

Применение разработанного метода для поиска гамильтоновых циклов подграфов позволяет получить совокупности объективных числовых характеристик биометрических шаблонов. Показанные примеры доказывают инвариантность (нечувствительность) метрики Гамильтоновых циклов к действию аффинных искажений.

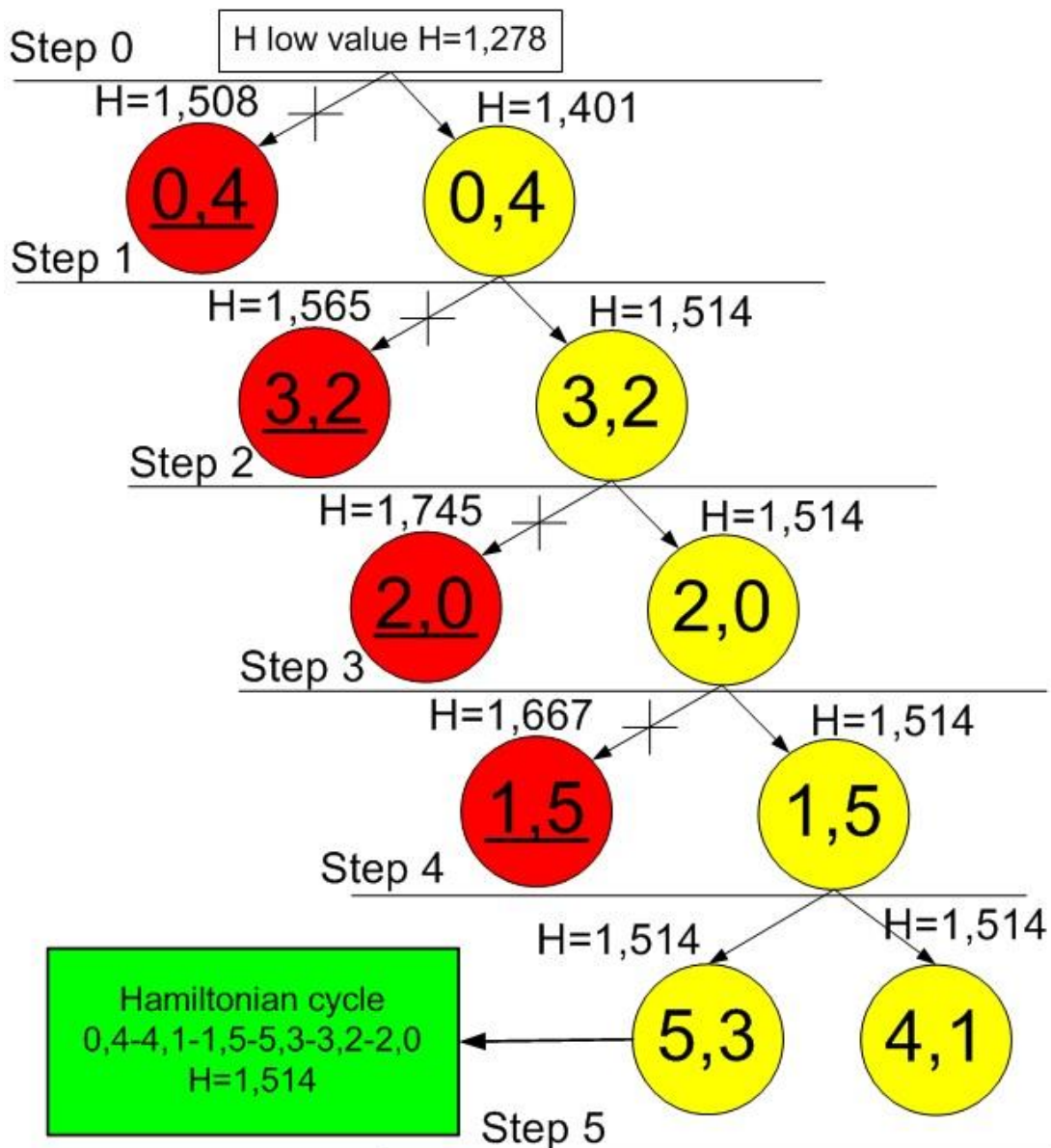


Рис. 3.1 Дерево решений (Гамильтонов контур)

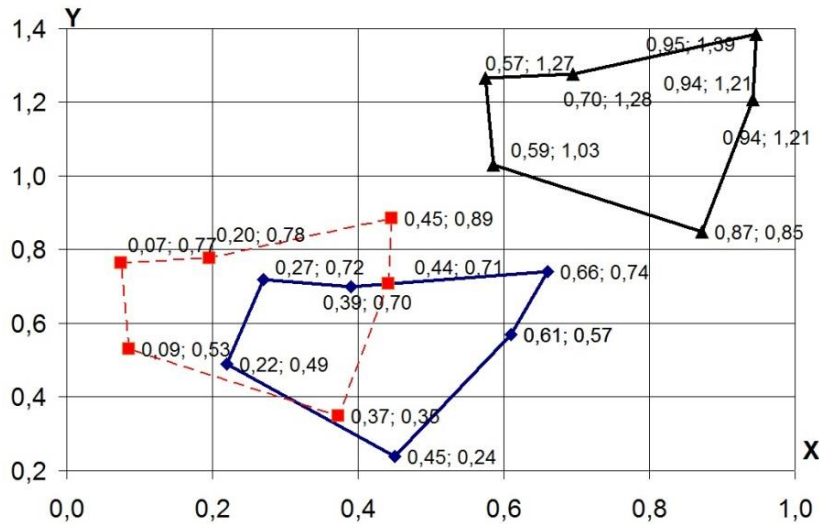
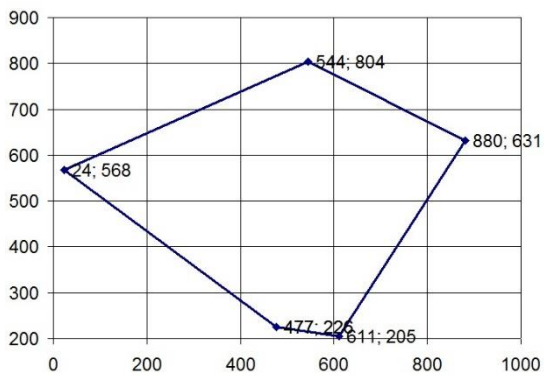
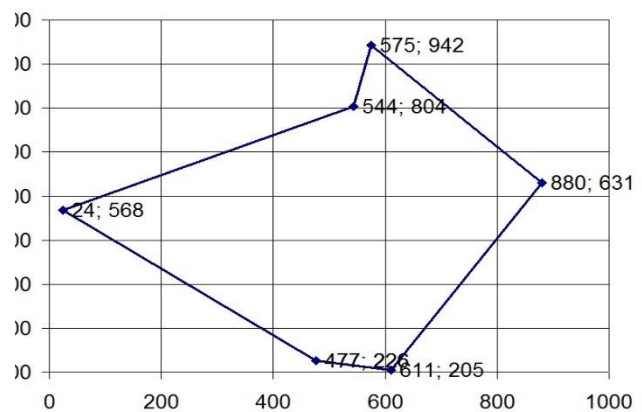


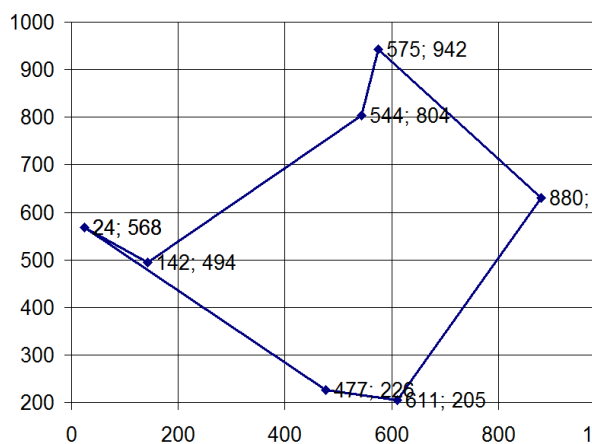
Рисунок 3.2 Изображение Гамильтонова контура: исходных точек (синий цвет), повернутых на 15° вокруг оси Z (красный цвет), и смещенных и повернутых точек (черный цвет), $H = 1,514$



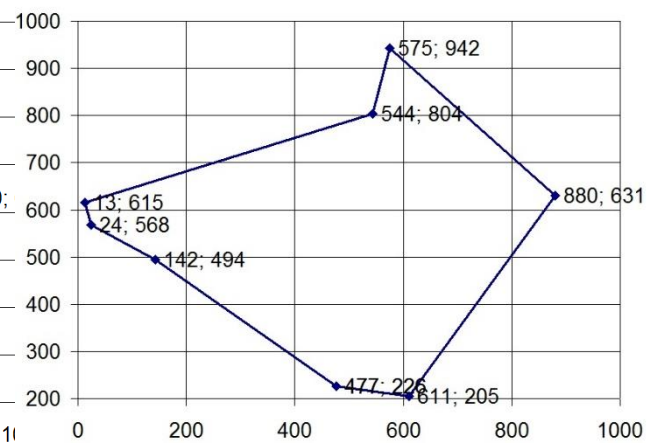
а) $(477,226)-(611,205)-(880,631)-(544,804)-(24,568)-(477,226)$; $H=2156,031$; $1-2-3-0-4-1$; $n=5$



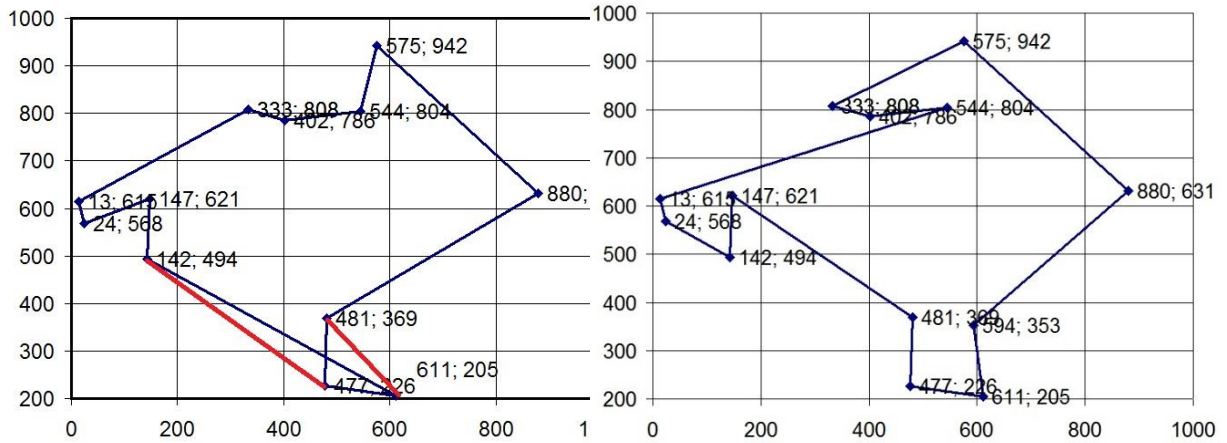
б) $(477,226)-(611,205)-(880,631)-(575,942)-(544,804)-(24,568)-(477,226)$; $H=2355,146$; $1-2-3-5-0-4-1$; $n=6$



е) $(24,568)-(142,494)-(544,804)-(575,942)-(880,631)-(611,205)-(477,226)-(24,568)$; $H=2431,028$; $4-6-0-5-3-2-1-4$; $n=7$

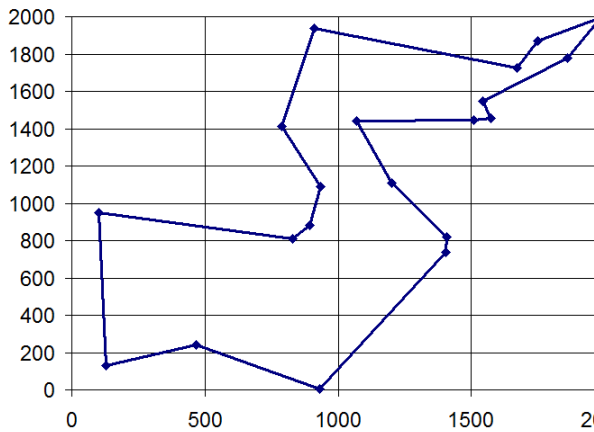


з) $(477,226)-(611,205)-(880,631)-(575,942)-(544,804)-(13,615)-(24,568)-(142,494)-(477,226)$; $H=2396,691$; $1-2-3-5-0-7-4-6-1$; $n=8$

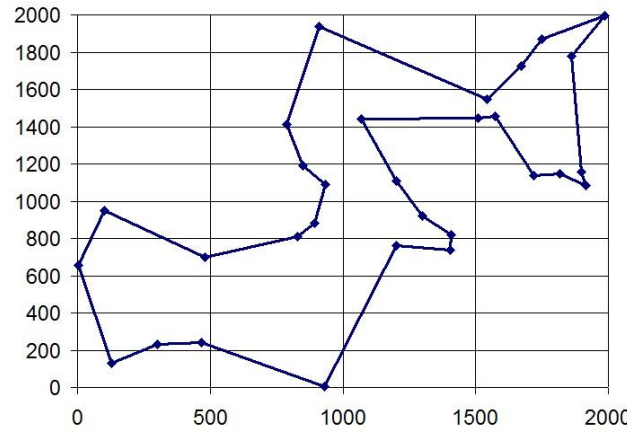


д) (333,808)-(402,786)-(544,804)-(575,942)-(880,631)-(481,369)-(477,226)-(611,205)-(142,494)-(147,621)-(24,568)-(13,615)-(333,808); 10-11-0-5-3-8-1-2-6-9-4-7-10; n=12

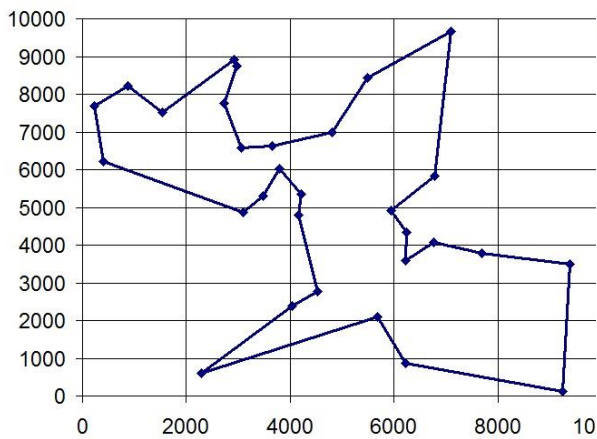
е) (333,808)-(402,786)-(544,804)-(13,615)-(24,568)-(142,494)-(147,621)-(481,369)-(477,226)-(611,205)-(594,353)-(880,631)-(575,942)-(333,808); 10-11-0-7-4-6-9-8-1-2-12-3-5-10; H=3050,98; n=13



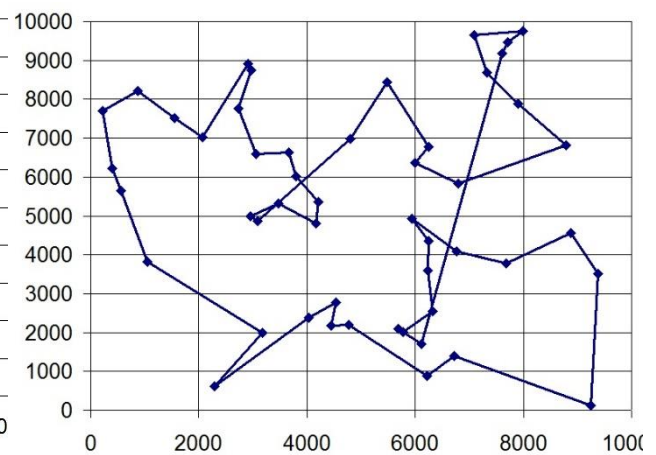
ж) n=20; x=0...2000; y=0...2000



з) n=30; x=0...2000; y=0...2000



и) n=30; x=0...10000; y=0...10000



к) n=50; x=0...10000; y=0...10000

Рис. 4.1 Изображение Гамильтоновых контуров для различных наборов точек

Таблиця 4.1 – Координаты точек

| n | Упорядоченные от центра точки | | Перемешанные 18 точек | |
|----|-------------------------------|-------|-----------------------|-------|
| | x | y | x | y |
| 0 | 0,528 | 0,621 | 0,74 | 0,1 |
| 1 | 0,411 | 0,385 | 0,59 | 0,866 |
| 2 | 0,35 | 0,498 | 0,701 | 0,092 |
| 3 | 0,799 | 0,489 | 0,809 | 0,393 |
| 4 | 0,752 | 0,666 | 0,411 | 0,385 |
| 5 | 0,377 | 0,801 | 0,35 | 0,498 |
| 6 | 0,809 | 0,393 | 0,752 | 0,666 |
| 7 | 0,408 | 0,152 | 0,799 | 0,489 |
| 8 | 0,53 | 0,128 | 0,53 | 0,128 |
| 9 | 0,59 | 0,866 | 0,528 | 0,621 |
| 10 | 0,153 | 0,32 | 0,153 | 0,32 |
| 11 | 0,378 | 0,119 | 0,378 | 0,119 |
| 12 | 0,915 | 0,437 | 0,377 | 0,801 |
| 13 | 0,058 | 0,587 | 0,058 | 0,587 |
| 14 | 0,701 | 0,092 | 0,408 | 0,152 |
| 15 | 0,74 | 0,1 | 0,915 | 0,437 |
| 16 | 0,013 | 0,567 | 0,244 | 0,954 |
| 17 | 0,244 | 0,954 | 0,013 | 0,567 |

Таблиця 4.2 – Полученные решения для точек имеющих различный порядок

| n | H | Маршрут |
|-----|-------|---|
| 18 | 3,671 | 14,15-15,6-6,12-12,3-3,4-4,9-9,5-5,17-17,13-13,16-16,10-10,1-1,2-2,0-0,11-11,7-7,8-8,14 |
| | 3,652 | 15,14-14,8-8,7-7,11-11,1-1,13-13,16-16,10-10,2-2,0-0,5-5,17-17,9-9,4-4,3-3,12-12,6-6,15 |
| | 3,721 | 15,14-14,8-8,7-7,11-11,1-1,13-13,16-16,10-10,2-2,0-0,17-17,5-5,9-9,4-4,3-3,12-12,6-6,15 |
| | 3,679 | 15,14-14,8-8,7-7,11-11,10-10,16-16,13-13,17-17,5-5,9-9,4-4,3-3,12-12,6-6,0-0,2-2,1-1,15 |
| | 3,682 | 15,14-14,8-8,7-7,11-11,1-1,16-16,13-13,10-10,2-2,0-0,5-5,17-17,9-9,4-4,3-3,12-12,6-6,15 |
| | 3,778 | 14,15-15,6-6,12-12,3-3,4-4,9-9,17-17,5-5,13-13,16-16,10-10,1-1,2-2,0-0,11-11,7-7,8-8,14 |
| 18' | 3,652 | 2,0-0,3-3,15-15,7-7,6-6,1-1,16-16,12-12,9-9,5-5,10-10,17-17,13-13,4-4,11-11,14-14,8-8,2 |
| | 3,671 | 2,0-0,3-3,15-15,7-7,6-6,1-1,12-12,16-16,13-13,17-17,10-10,4-4,5-5,9-6,11-11,14-14,8-8,2 |
| | 3,721 | 0,2-2,8-8,14-14,11-11,4-4,13-13,17-17,10-10,5-5,9-9,16-16,12-12,1-1,6-6,7-7,15-15,3-3,0 |
| | 3,682 | 0,2-2,8-8,14-14,11-11,4-4,17-17,13-13,10-10,5-5,9-9,12-12,16-16,1-1,6-6,7-7,15-15,3-3,0 |
| | 3,679 | 0,2-2,8-8,14-14,11-11,10-10,17-17,13-13,16-16,12-12,1-1,6-6,7-7,15-15,3-3,9-9,5-5,4-4,0 |
| | 3,778 | 2,0-0,3-3,15-15,7-7,6-6,1-1,16-16,12-12,13-13,17-17,10-10,4-4,5-5,9-9,11-11,14-14,8-8,2 |

ЛІТЕРАТУРА

1. Мудров В.И. Задача о коммивояжере. Издательство «Знание» Москва 1969, 61с.
2. Борознов В.О Исследование решения задачи коммивояжера. Вестник АГТУ. Сер.: Управление, вычислительная техника и информатика. 2009 №2 URL: <https://cyberleninka.ru/article/v/issledovanie-resheniya-zadachi-kommivoyazhera> (дата звернення: 07.03.2020), С. 147-151.
3. Жукова Г.Н., Ульянов М.В., Фомичев М.И. Эффективный по времени точный комбинированный алгоритм для асимметричной задачи коммивояжера. БИЗНЕС-ИНФОРМАТИКА №3(45) – 2018. URL: <https://cyberleninka.ru/article/v/effektivnyy-po-vremeni-tochnyy-kombinirovannyi-algoritm-dlya-asimmetrichnoy-zadachi-kommivoyazhera> (дата звернення: 07.03.2020), С. 20-26.
4. Мотова А.Н., Гареева Г.А., Лысанов Д.М. Обзор методов решения задачи коммивояжера для определения оптимального маршрута школьного транспорта. // Научное сообщество студентов XXI столетия. ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ: сб. ст. по мат. LXI междунар. студ. науч.-

практ. конф. № 1(60). URL: <https://sibac.info/studconf/tech/lxi/94839> (дата обращения: 18.02.2019), С.148-143.

REFERENCES

1. Mudrov V.I., The task of the salesman. Knowledge Publishing House Moscow 1969, 61p. [in Russian].
2. Boroznov V.A., Investigation of the salesman problem solution. AGTU Gazette. Ser .: Management, Computer Engineering and Computer Science. 2009 No. 2 URL: <https://cyberleninka.ru/article/v/issledovanie-resheniya-zadachi-kommivoyazhera> (Last accessed: 07.03.2020), p. 147-151. [in Russian].
3. Zhukova G.N., Ulyanov M.V., Fomichev M.I., Time-efficient, accurate combination algorithm for the asymmetric traveling salesman problem. BUSINESS INFORMATION №3 (45), 2018. URL: <https://cyberleninka.ru/article/v/effektivnyy-po-vremeni-tochnyy-kombinirovannyi-algoritm-dlya-asimmetrichnoy-zadachi-kommivoyazhera> (Last accessed: 07.03.2020), p. 20-26. [in Russian].
4. Motova A.N., Gareeva G.A., Lysanov D.M. “An overview of the solving methods solving the salesman's task for determining the school transport optimal route”. Scientific community of XXI century students. TECHNICAL SCIENCES: Sat. Art. on mat. LXI international. stud. scientific-practical Conf. No. 1 (60). URL: <https://sibac.info/studconf/tech/lxi/94839> (Last accessed: 07.03.2020), p.148-143. [in Russian].

Мелкозьорова Ольга Михайлівна – кандидат технічних наук; доцент кафедри безпеки інформаційних систем і технологій, Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: olja.mex@gmail.com.

Melkozerova Olha M., PhD; Associate Professor of Information Systems and Technologies Security Department V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, e-mail: olja.mex@gmail.com.

Мелкозерова Ольга Михайловна – кандидат технических наук, доцент кафедры безопасности информационных систем и технологий, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022;
e-mail: olja.mex@gmail.com.

Рассомахін Сергій Геннадійович – доктор технічних наук; завідувач кафедри безпеки інформаційних систем і технологій, Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022;
e-mail: rassomakhin@karazin.ua.

Rassomakhin Sergiy G., PhD; Doctor of Science, Professor, Head of Department of Information Systems and Technologies Security V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, e-mail: rassomakhin@karazin.ua.

Рассомахин Сергей Геннадиевич – доктор технических наук, заведующий кафедры безопасности информационных систем и технологий, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022;
e-mail: rassomakhin@karazin.ua.