

УДК 539.3

## Моделювання коливань рідини в призматичних резервуарах з хрестовими перегородками

<sup>1</sup>Д.В. Крютченко

<sup>1</sup> Інститут проблем машинобудування НАН України ім. А.М. Підгорного  
ул. Пожарського, 2/10, Харків, 61046, Україна  
wollydenis@gmail.com

Розглянуті вільні коливання рідини в жорсткому призматичному резервуарі з вертикальними хрестовими перегородками. Ці перегородки поділяють резервуар на чотири відсіки. Перегородки дають змогу зменшити амплітуду плескань рідини в резервуарі при раптово прикладених зовнішніх навантажень внаслідок землетрусів, терактів, аварійних ситуацій, тощо. Припускається, що рідина є ідеальною і нестисливою, а її рух безвихровий. В цих умовах існує потенціал швидкостей, який задовольняє рівнянню Лапласа. На бічних поверхнях, днищі та перегородках виконується умова не протікання. На вільній поверхні задаються кінематична та динамічна умови. Кінематична умова полягає в тому, що ті точки рідини, що знаходились на вільній поверхні в початковий момент часу, залишаються на цій поверхні протягом всього наступного руху. Динамічна умова полягає у рівності тиску рідини на вільній поверхні атмосферному тиску. Отримано аналітичний розв'язок крайової задачі для рівняння Лапласа, у випадку, коли резервуар має дно у формі квадрату. При цьому було встановлено, що форми коливань вільної поверхні є симетричними. Зауважимо, що отримані форми коливань є однаковими в кожному відсіку. Частоти вільних коливань рідини в резервуарі з хрестовими перегородками у порівнянні з аналогічними частотами коливань призматичного бака без перегородок збільшуються. Отримані частоти та форми власних коливань вільної поверхні рідини дають змогу побудувати розв'язок крайової задачі у випадку дії раптових зовнішніх навантажень. При цьому потенціал швидкостей та функція, яка описує поведінку вільної поверхні, зображаються у вигляді рядів за формами власних коливань рідини на вільній поверхні. Це дає змогу ще на етапі проектування відбудуватися від небажаних резонансних частот при експлуатації та транспортуванні призматичних резервуарів з рідиною.

**Ключові слова:** призматичний резервуар з рідиною, вільні коливання, хрестові перегородки

Free vibrations of liquid in a rigid prismatic tank with vertical cross partitions are considered. These partitions divide the tank into four compartments. The partitions make it possible to reduce the amplitude of liquid sloshing in the tank under suddenly applied external loads due to earthquakes, terrorist attacks, emergencies, etc. It is assumed that the fluid is perfect and incompressible, and its motion is vortex-free. Under these conditions, there is a velocity potential that satisfies the Laplace equation. A non-leak condition is applied on the sides, bottom and partitions of the tank. On a free surface, kinematic and dynamic conditions are set. The kinematic condition is that the points of fluid that are on the free surface at the initial moment will remain on that surface for the entire subsequent motion. The dynamic condition is the equality of the fluid pressure on the free surface to the atmospheric pressure. An analytical solution of the boundary value problem for the Laplace equation is obtained for the case of the tank with a square bottom. The free surface oscillations have been found to be symmetrical. It should be noted that the oscillation patterns in each compartment are the same. The frequencies of free oscillations of the fluid in the tank with the cross partitions are increased in comparison with similar frequencies of oscillations of the prismatic tank without partitions. The frequencies obtained and the modes of natural oscillations of the fluid free surface allow us to solve the boundary value problem in case of sudden external loads. In this case, the velocity potential and the function describing the behaviour of the free surface are represented as the series according to the modes of natural fluctuations of the fluid free surface. Therefore it is possible to prevent the unwanted resonant frequencies at exploitation and transportation by designing prismatic tanks in a particular way.

**Key words:** prismatic fuel tank, free vibrations, baffle, quarter baffles.

Рассмотрены свободные колебания жидкости в жестком призматическом резервуаре с вертикальными крестовыми перегородками. Эти перегородки разделяют резервуар на четыре отсека. Перегородки позволяют уменьшить амплитуду плесканий жидкости в резервуаре при внезапно приложенных внешних нагрузок вследствие землетрясений, терактов, аварийных ситуаций и тому подобное. Предполагается, что жидкость является идеальной и несжимаемой, а ее движение безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей, который удовлетворяет уравнению Лапласа. На боковых поверхностях, днище и перегородках выполняется условие непротекания. На свободной поверхности задаются кинематическое и динамическое условия. Кинематическое условие заключается в том, что те точки жидкости, находящиеся на свободной поверхности в начальный момент времени, остаются на этой поверхности в течение всего последующего движения. Динамическое условие заключается в равенстве давления жидкости на свободной поверхности атмосферному давлению. Получено аналитическое решение краевой задачи для уравнения Лапласа в случае, когда резервуар имеет дно в форме квадрата. При этом было установлено, что формы колебаний свободной поверхности являются симметричными. Заметим, что полученные формы колебаний одинаковы в каждом отсеке. Частоты свободных колебаний жидкости в резервуаре с крестовыми перегородками, по сравнению с аналогичными частотами колебаний призматического бака без перегородок, увеличиваются. Полученные частоты и формы собственных колебаний свободной поверхности жидкости позволяют построить решение краевой задачи в случае действия внезапно приложенных внешних нагрузок. При этом потенциал скоростей и функция, которая описывает поведение свободной поверхности, изображаются в виде рядов по формам собственных колебаний свободной поверхности жидкости. Это позволяет еще на этапе проектирования отстроиться от нежелательных резонансных частот при транспортировке и эксплуатации призматических резервуаров с жидкостью.

**Ключевые слова:** призматический резервуар с жидкостью, свободные колебания, крестовые перегородки

## 1 Вступ

В багатьох галузях сучасної промисловості використовуються резервуари та контейнери різної форми для збереження рідких заповнювачів. Під дією раптово прикладених навантажень внаслідок маневрування при транспортуванні, сейсмічних впливів внаслідок землетрусів, або інтенсивних імпульсних навантажень внаслідок падіння літака, терактів, інших форс-мажорних обставин, рідина, що заповнює контейнер, починає інтенсивний рух. Цей рух є особливо небезпечним, якщо рідина не повністю заповнює резервуар. Цей феномен має назву плескання [1]. Такі явища пов'язані з виплеском небезпечного заповнювача і можуть мати негативні наслідки. Тому актуальним є питання демпфування плескань, зменшення їх амплітуди. З цією метою в резервуари встановлюють різного роду перегородки. Впливу перегородок на частоти і форми вільних коливань присвячено велику кількість наукових досліджень. Серед них зазначимо роботи [2-4], в яких детально висвітлюються ці питання. Зауважимо, що на демпфування плескань впливають форма перегородки [5], форма самого резервуару [6], засіб встановлення перегородки [7] та ін. Проблемам вимушених коливань рідини в резервуарах та паливних баках присвячено роботи [8-10]. Зазначимо, що в [5] доведено, що встановлення вертикальних хрестових перегородок змінює спектр вільних коливань в бік збільшення. Це дозволяє проведення відстроювання від небезпечних частот. В цій роботі досліджуються коливання рідини в призматичному жорсткому резервуарі з хрестовими перегородками.

## 2 Формулювання задачі та основні співвідношення

Розглядається призматичний резервуар з хрестовими вертикальними перегородками, рис.1.

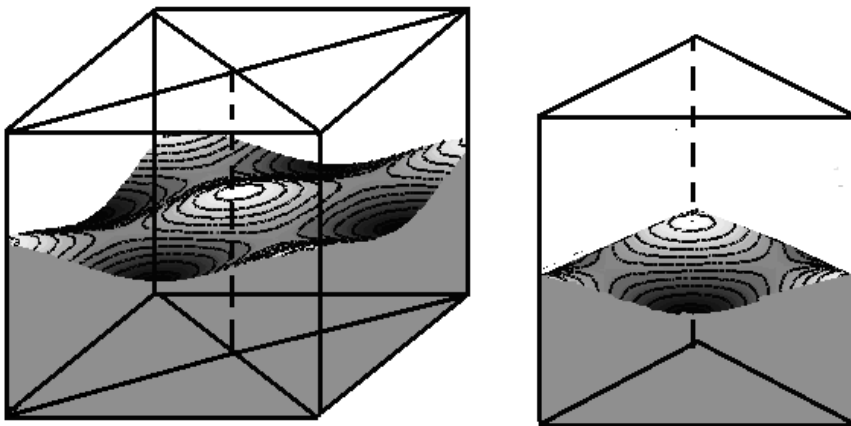


Рис. 2.1 Призматичний резервуар з вертикальними перегородками та його відсік

Вважаємо, що чотири відсіки резервуара частково заповнені ідеальною нестисливою рідиною, при чому рівень заповнення  $h$  у всіх відсіках однаковий. Припускаємо, що рух рідини є безвихровим. Зауважимо, що якщо рух починається із стану спокою, то він залишається потенційним протягом всього наступного часу згідно з теоремою Томпсона [1,8,11]. Використовуємо припущення існування потенціалу швидкостей  $\varphi(x,y,z,t)$  згідно з [1,9], тоді

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, V_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

В зазначених умовах цей потенціал задовольняє рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1)$$

Сформулюємо граничні умови для диференціального рівняння (2.1). Позначимо сукупність змочених бічних поверхонь та днища як  $S_1$ . Згідно з умовою непротікання на жорстких стінках маємо [5,12]

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad (2.2)$$

де  $\mathbf{n}$  - зовнішня одинична нормаль до змоченої поверхні.

Припустимо, що з контейнером пов'язано декартову систему координат  $Oxyz$ , при цьому вільна поверхня рідини  $S_0$  розташована в площині  $z = h$  в стані спокою. Для обчислення тиску рідини  $p$  будемо використовувати лінеаризоване рівняння Бернуллі у вигляді

$$p - p_0 = -\rho \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))z \right], \quad (2.3)$$

де  $\rho$  - густина рідини,  $g$  - прискорення вільного падіння,  $\mathbf{a}_x = \nabla[x \cdot a_x(t)]$ ,  $\mathbf{a}_z = \nabla[z \cdot a_z(t)]$  є відповідно горизонтальним та вертикальним прискореннями, що зумовлені дією зовнішньої сил,  $p_0$  - атмосферний тиск.

Розглянемо умови на вільній поверхні  $S_0$ . Це динамічна та кінематична умови. Кінематична умова полягає в тому, що ті точки рідини, що знаходились на вільній поверхні в початковий момент часу, залишаються на цій поверхні протягом всього наступного руху. Припустимо, що деяка функція  $\zeta = \zeta(x, y, t)$  описує форму та положення вільної поверхні за часом, тобто вважаємо, що

$$z = \zeta(x, y, t) \Big|_{S_0}.$$

Математичне подання кінематичної умови в лінійному формулюванні має вигляд [13,14]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Динамічна умова полягає у рівності тиску рідини на вільній поверхні  $S_0$  атмосферному тиску.

Згідно з рівнянням (2.3) динамічна умова має вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a_x(t)x + (g + a_z(t))\zeta = 0. \quad (2.5)$$

Зауважимо, що рівняння (2.3) відповідає випадку вимушених коливань. Якщо розглядатимуться вільні коливання, то динамічна умова приймає форму

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\zeta = 0. \quad (2.6)$$

Для формулювання граничних умов на хрестових перегородках припустимо для спрощення, що днище резервуару є квадратом зі сторонами  $[2a, 2a]$ .

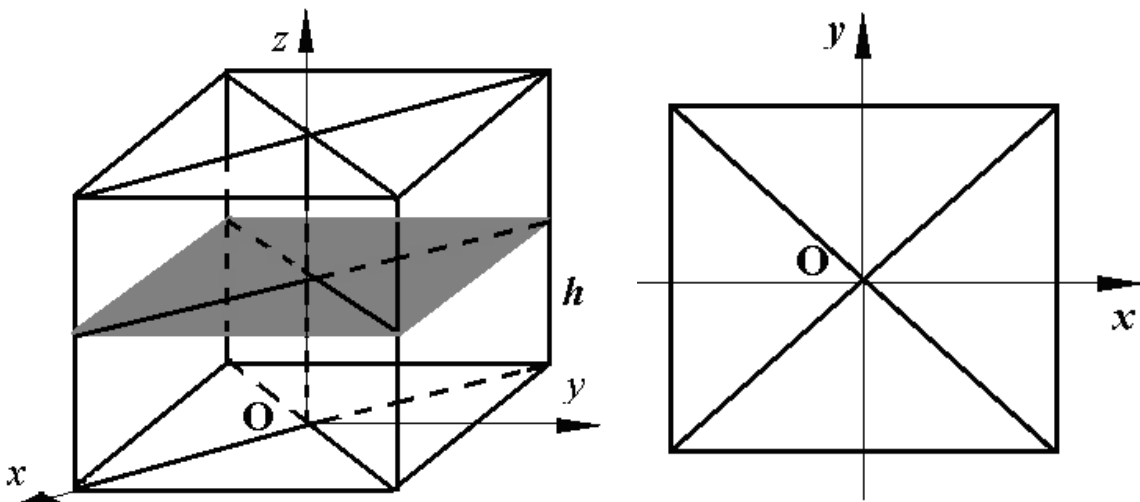


Рис.2.2 Горизонтальний переріз резервуару

Рівняння площин, в яких знаходяться перегородки є такими

$$y + x = 0, \quad y - x = 0.$$

Одиничними нормальними до поверхонь перегородок є, відповідно, такі вектори

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \quad \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0).$$

Оскільки  $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} = (\text{grad } \varphi, \mathbf{n})$ , то граничні умови на перегородках приймають вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (2.7)$$

До граничних умов (2.4)-(2.7) стосовно рівняння Лапласа (2.1) додаємо умову розв'язності крайової задачі

$$\int_{s_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} dS = 0. \quad (2.8)$$

Таким чином, сформульовано крайову задачу (2.1), (2.4), (2.6)-(2.8) для визначення вільних коливань рідини в резервуарі з хрестовими вертикальними перегородками.

### 3 Аналітичний розв'язок задачі про вільні коливання рідини в призматичному резервуарі з хрестовими вертикальними перегородками

Зобразимо потенціал швидкостей у вигляді

$$\varphi(x, y, z, t) = \exp(i\omega t)\varphi(x, y, z).$$

Далі використовуємо метод розділення змінних, а саме вважаємо, що

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (3.1)$$

Підставляючи подання (3.1) у диференціальне рівняння (2.1), отримуємо

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda^2. \quad (3.2)$$

Далі отримуємо

$$Z(z) = C_1 \exp(\lambda z) + C_2 \exp(-\lambda z).$$

Виконуючи крайову умову непротікання (2.2) на поверхні дна, яка знаходиться в площині  $z = 0$ , отримуємо

$$\left. \frac{dZ}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad \lambda(C_1 - C_2) = 0.$$

Звідси маємо

$$Z(z) = C_1 \cosh(\lambda z).$$

Далі з (3.2) отримуємо

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda^2 = -\mu^2, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\gamma^2, \quad \lambda^2 = \mu^2 + \gamma^2.$$

З цих рівнянь знаходимо, що частинним розв'язком диференційного рівняння (2.1) є

$$\varphi(x, y, z) = \cosh(\lambda z) \cos(\mu x) \cos(\gamma y).$$

Розглянемо граничні умови (2.7). Перша з них відноситься до поверхні  $y + x = 0$ . На цій поверхні маємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\mu \cosh(\lambda z) \sin(\mu x) \cos(\gamma y) = -\mu \cosh(\lambda z) \sin(\mu x) \cos(\gamma x),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\gamma \cosh(\lambda z) \cos(\mu x) \sin(\gamma y) = \gamma \cosh(\lambda z) \cos(\mu x) \sin(\gamma x).$$

Зауважимо, що  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ , якщо  $\gamma = \mu$ . Аналогічно, на поверхні  $y - x = 0$  маємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\mu \cosh(\lambda z) \sin(\mu x) \cos(\gamma y) = -\mu \cosh(\lambda z) \sin(\mu x) \cos(\gamma x),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\gamma \cosh(\lambda z) \cos(\mu x) \sin(\gamma y) = -\gamma \cosh(\lambda z) \cos(\mu x) \sin(\gamma x),$$

тобто при  $\gamma = \mu$  будемо мати  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ .

Таким чином, крайові умови (2.7) виконані.

На бічній поверхні  $y + a = 0$  з умови непротікання (2.2) отримуємо

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=-a} = 0, \quad \sin(\mu a) = 0$$

та знаходимо такі значення  $\mu_k = \frac{\pi k}{a}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Звідси знаходимо такі частинні розв'язки крайової задачі, що розглядається

$$\varphi_{2k+1}(x, y, z) = \cosh\left(\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{\pi k}{a}\right)z\right) \sin\left(\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{\pi k}{a}\right)x\right) \sin\left(\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{\pi k}{a}\right)y\right), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$\varphi_{2k}(x, y, z) = \cosh\left(\sqrt{2}\frac{\pi k}{a}z\right) \cos\left(\frac{\pi k}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi k}{a}y\right), \quad k=1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Переходимо до крайових умов на вільній поверхні. Зобразимо невідомі потенціал швидкостей  $\varphi(x, y, z, t)$  та функцію  $\zeta = \zeta(x, y, t)$ , що описує еволюцію вільної поверхні у такий засіб

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}_k(t) \varphi_k(x, y, z), \quad (3.4)$$

$$\zeta(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(x, y, h)}{\partial z}. \quad (3.5)$$

Якщо використовуються подання (3.4), (3.5), то крайова умова (2.4) виконується автоматично. Для виконання умови (2.6) отримаємо таке співвідношення

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{c}_k(t) \varphi_k(x, y, h) + g \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(x, y, h)}{\partial z} = 0.$$

З використанням зображень (3.3) за умови ортогональності функцій  $\varphi_k(x, y, z)$  отримаємо такі співвідношення

$$\ddot{c}_k(t)\alpha_k \cosh\left(\sqrt{2} \frac{\pi k}{a} h\right) + c_k(t)g\alpha_k \sqrt{2} \frac{\pi k}{a} \sinh\left(\sqrt{2} \frac{\pi k}{a} h\right) = 0, k = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

З (3.6) знаходимо коефіцієнти  $c_k(t)$  у вигляді

$$c_k(t) = \exp(i\omega_k t), \quad \omega_k^2 = g\sqrt{2} \frac{\pi k}{a} \tanh\left(\sqrt{2} \frac{\pi k}{a} h\right) \quad (3.7)$$

Таким чином, отримані частоти та форми вільних коливань призматичного резервуара з хрестовими перегородками. Частоти обчислюються за формулами (3.7), а форми – за формулами (3.3). На рис. 3.1 зображені перші три форми коливань рідини в призматичному резервуарі з хрестовими перегородками.

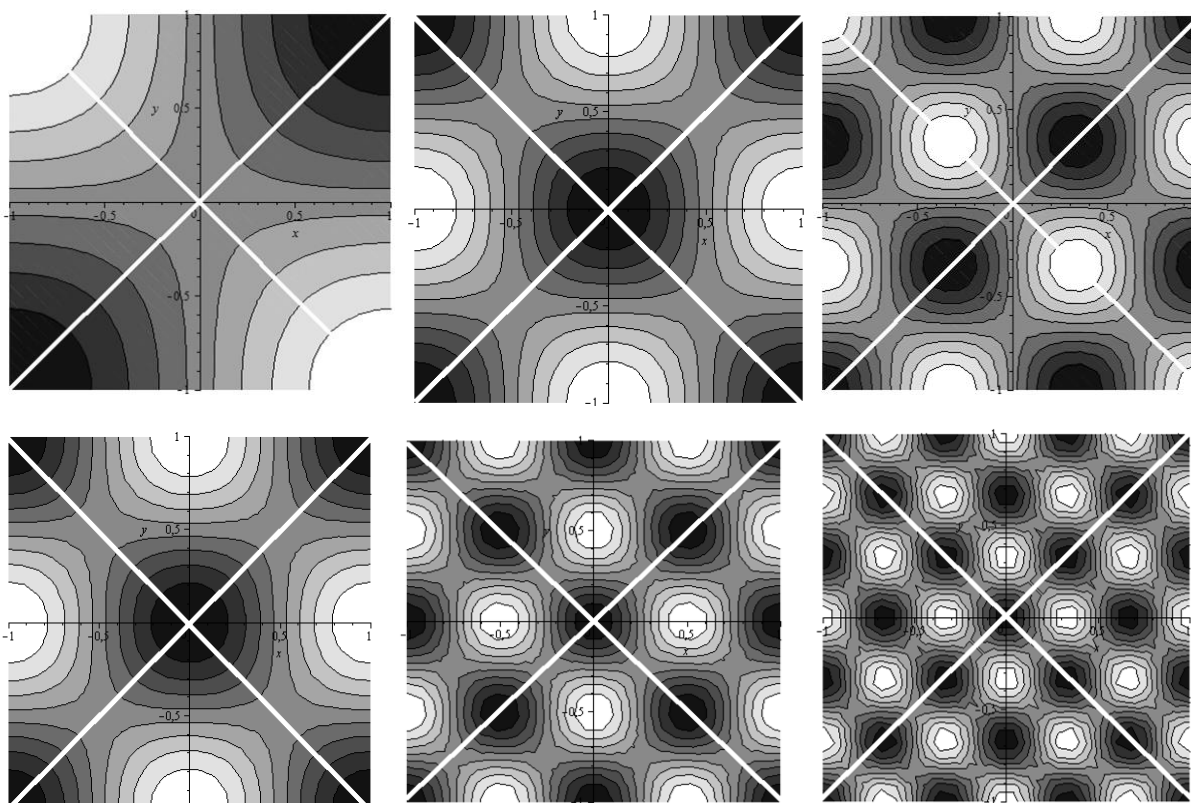


Рис. 3.1 Форми коливань рідини в призматичному резервуарі (горизонтальний переріз)

У таблиці 3.1 наведено порівняння частот коливань рідини в призматичних резервуарах з перегородками та без перегородок.

Таблиця 3.1. Частоти коливань рідини

n	без перегородок	з перегородками
1	4.051164194	4.613563138
2	4.051164194	6.008587070
3	5.710012556	8.085473483
4	5.892165855	9.336315604

Зауважимо, що отримані форми коливань є однаковими в кожному відсіку. Частоти коливань у порівнянні з частотами коливань призматичного бака без перегородок [16] збільшуються. Зазначимо також, що в розглянутому випадку реалізуються лише симетричні форми.

### Висновки

Досліджено вільні коливання рідини в призматичному резервуарі з хрестовими перегородками. Встановлено, що наявність таких перегородок приводить до збільшення частот

коливань рідини у порівнянні з резервуаром, що не має перегородок. Отримано частоти та форми вільних коливань резервуара, які в подальшому будуть використані як базисні функції для аналізу вимушених коливань рідини в призматичних резервуарах з перегородками.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Ibrahim R.A. *Liquid Sloshing Dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2005.
2. Lloyd N., Vaiciurgis E. &Langrish T.A.G. The effect of baffle design on longitudinal liquid movement in road tankers: an experimental investigation. *Trans Inst. Chem. Engrs.* Vol. 80, No 4, 2002, pp.181-185.
3. Guorong Y., Rakheja S. Straight-line braking dynamic analysis of a partly-filled baffled and unbaffled tank truck. *I. Mech. E.*, Vol. 223, 2009, pp. 11-26.
4. Gavrilyuk I., Lukovsky I., Trotsenko Yu. &Timokha A. Sloshing in a vertical circular cylindrical tank with an annular baffle. Part 1. Linear fundamental solutions. *J. of Engineering Mathematics*. Vol. 54. 2006. pp. 71-88.
5. V. Gnitko, Y.Naumemko, E. Strelnikova Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2017. Vol. 22. Issue 4. P. 867-881.
6. Gavrilyuk I., Hermann M, Lukovsky I., Solodun O., Timokha A. Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks. *Engineering Computations*. Vol. 25 No 6. 2008. pp.518 – 540.
7. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations. *Journal of Mathematics and Statistical Science*, V. 5. 2019. pp.31-41.
8. Dodge F.T., Kana D.D., Abramson H.N., Liquid surface oscillations in longitudinally excited rigid cylindrical containers, *AIAA J.* **3**, pp. 685–695, 1965.
9. Wang, J., Sun, S, «Study on liquid sloshing characteristics of a swaying rectangular tank with a rolling baffle», *J Eng Math* **119**, 23–41 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10665-019-10017>
10. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y. Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles J. *Modern Technology & Engineering* Vol.3, No.1, pp.15-52, 2018.
11. Lamb H. *Hydrodynamics*. 6th ed. *Cambridge University Press*, 1993. 634 p.
12. Еселева Е.В., Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Пробл. машиностроения*. №1, 2006, С.105-118.
13. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Degtyarev K. Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. –2020 Vol.111, P. 78-87. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008.
14. Шувалова Ю.С., Крютченко Д.В., Стрельникова Е.А. Интегральные уравнения в задаче о свободных и вынужденных колебаниях жидкости в жестких резервуарах. *Вісник Херсонського національного технічного університету* .2016. №3. С. 455-459.
15. Kriutchenko D. Forced liquid vibrations in prismatic tanks under vertical and horizontal loads. *Вісник Харківського національного університету імені ВН Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»* 2019. №42. С. 68-76.

#### REFERENCES

1. Ibrahim R.A, *Liquid Sloshing Dynamics*, Cambridge University Press, New York, 2005.
2. Lloyd N., Vaiciurgis E. &Langrish T.A.G, «The effect of baffle design on longitudinal liquid movement in road tankers: an experimental investigation», *Trans Inst. Chem. Engrs.*, Vol. 80, No 4, 2002, pp.181-185.
3. Guorong Y., Rakheja S, «Straight-line braking dynamic analysis of a partly-filled baffled and unbaffled tank truck», *I. Mech. E.*, Vol. 223, 2009, pp. 11-26.
4. Gavrilyuk I., Lukovsky I., Trotsenko Yu. &Timokha A, “Sloshing in a vertical circular cylindrical tank with an annular baffle. Part 1. Linear fundamental solutions”, *J. of Engineering Mathematics*, Vol. 54, pp. 71-88, 2006.

5. V. Gnitko, Y. Naumemko, E. Strelnikova, “Low Frequency Sloshing Analysis of Cylindrical Containers with Flat and Conical Baffles”, *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 22. Issue 4. P. 867-881, 2017.
6. Gavriluk I., Hermann M, Lukovsky I., Solodun O., Timokha A, «Natural Sloshing frequencies in Truncated Conical Tanks», *Engineering Computations*, Vol. 25 No 6, pp.518 – 540, 2008.
7. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. «Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations», *Journal of Mathematics and Statistical Science*, V. 5, pp.31-41, 2019.
8. Dodge F.T., Kana D.D., Abramson H.N, «Liquid surface oscillations in longitudinally excited rigid cylindrical containers», *AIAA J.* 3, pp. 685–695, 1965.
9. Wang, J., Sun, S, «Study on liquid sloshing characteristics of a swaying rectangular tank with a rolling baffle», *J Eng Math* 119, 23–41 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10665-019-10017>
10. Strelnikova E., Gnitko V., Krutchenko D., Naumemko Y, «Free and forced vibrations of liquid storage tanks with baffles», *J. Modern Technology & Engineering*, Vol.3, No.1, pp.15-52, 2018.
11. Lamb H. *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge University Press, 634 r, 1993.
12. Eseleva E.V., Gnitko V.I., Strelnikova E.A, “Own vibrations of pressure vessels during interaction with a liquid”, *Institute of Problems of mechanical engineering problems A.N. Pidgornogo*. №1, pp.105-118, 2006. [in Russian]
13. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., Degtyarev K, “Boundary element method in nonlinear sloshing analysis for shells of revolution under longitudinal excitations”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020 Vol.111, R. 78-87. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.10.008.
14. Shuvalova Yu.S., Kryutchenko D.V., Strelnikova E.A, “Integral equations in the problem of free and forced fluctuations in the liquid in the tanks for children”, *Khresonsky visnuk National Technical University*, №3. pp. 455-459. 2016.. [in Russian]
15. Kriutchenko D, «Forced liquid vibrations in prismatic tanks under vertical and horizontal loads», *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», №42, pp. 68-76, 2019.*

**Крютченко Денис Володимирович** – аспірант Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України. Телефон: 093208085753 E-mail: [wollydenis@gmail.com](mailto:wollydenis@gmail.com). Orcid 0000-0002-6804-6991.

**Крютченко Денис Владимирович** – аспірант Інститута проблем машиностроєння імені А.Н. Подгорного НАН України. Телефон: 093208085753 E-mail: [wollydenis@gmail.com](mailto:wollydenis@gmail.com). Orcid: 0000-0002-6804-6991.

**Kriutchenko Denys** – Post-graduate of A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems. Phone: 093208085753 E-mail: [wollydenis@gmail.com](mailto:wollydenis@gmail.com). Orcid: 0000-0002-6804-6991.