

УДК 519.216

Статистические свойства сети телефонных абонентов

В.В. Яновский^{1,2}, М.В. Данилевский¹¹ Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61000, Харьков, Украина² Институт монокристаллов, НАНУ, пр. Науки 60, 61001 Харьков, Украина

e-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua

Рассмотрена направленная сеть телефонных абонентов. Это своеобразная динамическая сеть с вершинами(абонентами) и возникающими направленными связями(ребрами). Связь (или направленное ребро) и ее направление определяется входящим и исходящим звонком из соответствующих вершин. В работе изучаются свойства связей абонентов телефонной сети. Такие связи носят динамический характер, появляясь и исчезая. В качестве основной характеристики используется число исходящих(входящих) связей, возникших за один день у некоторой выбранной вершины. Используя экспериментальные данные, анализируем плотность распределения числа исходящих(входящих) связей(звонков) такой сети. Обнаружено, что такая плотность распределения по числу звонков подчиняется логнормальной плотности распределения. В работе обсуждаются причины возникновения логнормальной плотности распределения по числу входящих(или исходящих) связей. Рассмотрены статистические свойства и других групп абонентов. Показано, что и для этих групп, например, спамеров, характерна логнормальная плотность распределения по числу звонков, но с другими средними значениями и дисперсией.

Ключевые слова: сложная сеть, графы, вершины, ребра, плотность функции распределения, дисперсия, среднее значение, логнормальная плотность распределения.

Розглянуто орієнтовану мережу телефонних абонентів. Це своєрідна динамічна мережа з вузлами, які відповідають абонентам телефонної мережі та виникаючими спрямованими ребрами, які відповідають зв'язкам між відповідними абонентами. Положення ребра та його напрямок визначається вхідним та вихідним дзвінком з відповідних вузлів. В роботі вивчаються статистичні властивості зв'язків деякої підмножини абонентів телефонної мережі. Такі зв'язки носять динамічний характер, вони з'являються та зникають з часом. В якості головної характеристики у роботі використовується кількість вихідних (або вхідних) зв'язків, що виникли за один день у деякій обраній вершині. Використовуючи експериментальні дані, аналізуємо щільність розподілу числа вихідних (або вхідних) зв'язків (або дзвінків) такої мережі. Доведено, що така щільність розподілу за кількістю дзвінків відповідає логнормальній щільності розподілу. Така щільність розподілу залежить від двох параметрів. Встановлені значення цих параметрів це середнє значення та дисперсія, які визначають логнормальну щільність розподілу. У роботі обговорюються причина виникнення логнормальної щільності розподілу по кількості вхідних (або вихідних) зв'язків. Розглянуто статистичні властивості й інших груп абонентів. В якості однієї з таких груп розглянуто групу, яка здійснює велику кількість вихідних дзвінків різним абонентам телефонної мережі. Таких абонентів які створюють та поширюють спам можна назвати спамерами. Доведено, що і для цих груп, наприклад, спамерів, характерна логнормальна щільність розподілу за кількістю дзвінків, але з іншими середніми значеннями та дисперсією.

Ключові слова: складна мережа, графи, вершини, ребра, щільність функції розподілу, дисперсія, середнє значення, логнормальна щільність розподілу.

The directed network of telephone subscribers is considered in the article. It can be described as a dynamic network with vertices that correspond to the subscribers of the telephone network and emerging directional edges that correspond to the connections between the respective subscribers. The position of the edge and its direction is determined by the incoming and outgoing calls from the corresponding vertices. The subject of the article is the statistical properties of the connections of a certain subset of telephone network subscribers. Such connections are dynamic in nature due to their appearance and disappearance. The number of outgoing (or incoming) connections occurred during a day at a selected vertex is used as the main characteristic. The distribution density of the number of outgoing (or incoming) connections (or calls) of such a network has been analyzed using the experimental data. It has been shown that such a distribution density over the number of calls obeys the lognormal distribution density, which depends on the two parameters. The values of two parameters, namely the mean value and the variance, determining the lognormal distribution density are established. The reasons for the appearance of a lognormal distribution density over the number of incoming (or outgoing) connections have been discussed. The statistical properties of other groups of subscribers have been considered as well. In particular, the group that makes a large number of outgoing calls to various subscribers of the telephone network has been selected for a separate study. The members of this group, who create and distribute spam can be called spammers. It has been shown that these groups, spammers for example, also obeys the lognormal distribution density over the number of calls but they are characterized by the different mean value and variance.

Keywords: complex network, directed network, graphs, vertices, edges, probability density function, variance, mean value, lognormal distribution density, degree distribution.

1 Вступ

Исследование сложных сетей и их свойств в последнее время интенсивно развивается. Началось их исследование еще Эйлером, решившим проблему семи мостов и давшим начало теории графов. Одним из известных достижений теории графов можно считать доказательство теоремы о четырех красках, доказанной Апелем и Хакеном [1]. Следующим шагом к теории

сложных сетей послужило появление случайных графов в работах Эрдеша и Реньи [2]. Увеличившееся число примеров нетрадиционных сложных сетей привело к их интенсивному исследованию. Существенные результаты были получены в статистической физике, обзор которых можно найти в работах [3, 4, 5, 6]. Область сложных сетей проникла в биологию [7, 8, 9], экономику и социальные системы [10, 11, 12, 13], экологию [14, 15, 16] и множество других областей.

В работах [17, 18], изучая свойства интернет-сети установили распределения степеней сети близкое к степенному. Аналогичное поведение было обнаружено и в работах [21, 22]. Повидимому распределение, близкое к степенному, широко распространено в различных сетях. В работах [19, 20] предложена двухпараметрическая модель случайных графов, которая демонстрирует такое распределение степеней вершин. В работе [23] показали, что множество степеней так называемого графа вызовов хорошо аппроксимируется степенным распределением. Графы вызовов - это графы вызовов, обрабатываемых некоторыми подгруппами операторов телефонной связи за определенный период времени. В работе [20] также замечены небольшие отличия от степенного поведения.

В этой работе мы рассматриваем свойства телефонной сети, близкой к графам вызовов. Вершинам графа соответствуют определенные абоненты телефонной сети, т.е. некоторое подмножество телефонных абонентов. Каждая вершина осуществляет некоторое количество звонков и принимает другое число звонков за некоторый интервал времени. Как обычно будем различать входящие и исходящие звонки. Тогда возникает динамический граф с определенным числом входящих и выходящих ребер. Ребра то появляются, то исчезают. Его можно рассматривать как сложную динамическую сеть звонков. Основной вопрос сводится к плотности распределения количества исходящих(или входящих) звонков за определенный интервал времени. Другими словами, какова вероятность осуществления n звонков некоторым абонентом за определенный интервал времени (например, за день). Для выбранной вершины число входящих звонков за один день соответствует числу входящих в нее ребер или интегральной степени вершины за этот промежуток времени. Это соответствует распределению количества вершин от величин их степеней. В работе построена такая плотность распределения по экспериментальным данным. Показано, что она является логнормальной плотностью распределения. Обсуждаются свойства такой плотности распределения по разным группам абонентов, включая спамеров. Кроме этого приводится возможная причина появления такой плотности распределения.

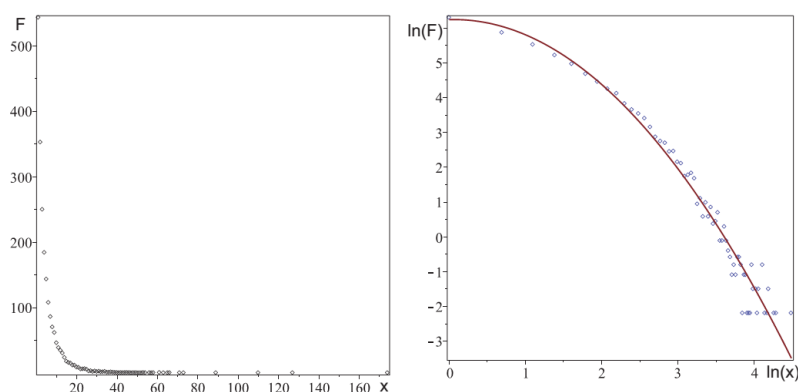


Рис.1 Слева функции распределения F исходящих звонков x за один день по их количеству. x - число исходящих звонков за один день, $F(x)$ - число абонентов, сделавших x звонков каждый в течении дня. Усреднение проведено по 9 дням. Справа эти данные в логарифмических координатах

2 Функция распределения звонков

Выберем некоторое подмножество абонентов телефонной сети США. Их количество $N_0 \approx 4200$. Рассмотрим их активность по входящим и исходящим звонкам за 1 день. Начнем с обсуждения экспериментальных данных об исходящих звонках телефонной сети. Для этого, используя данные о звонках за день, построим гистограмму распределения исходящих звонков за этот день. Такая гистограмма может быть сглажена, используя усреднение таких гистограмм,

полученных по данным за разные дни. В работе используются данные за 9 дней (с 2017-11-01 по 2017-11-9 включительно). На Рис.1 показана гистограмма где ромбиками изображено экспериментальное количество абонентов, позвонивших за один день определенное количество раз (горизонтальная координата). Гистограмма получена путем усреднения по данным за 9 дней. Общее количество исходящих звонков этого подмножества, согласно экспериментальным данным гистограммы соответствует $N_{out} \approx 2110$. Другими словами, за день позвонило меньше половины абонентов выбранного подмножества. Для установления зависимости плотности функции распределения построим эту гистограмму в логарифмических масштабах. Соответствующий график приведен на Рис.1 справа. Легко заметить характерное для параболической кривой расположение экспериментальных значений. Квадратичная аппроксимация этих значений методом наименьших квадратов приводит к функции $\ln(y) = 6.24 + 0.62 \cdot \ln(x) - 0.50 \cdot \ln(x)^2$. Такая зависимость характерна для логнормального распределения.

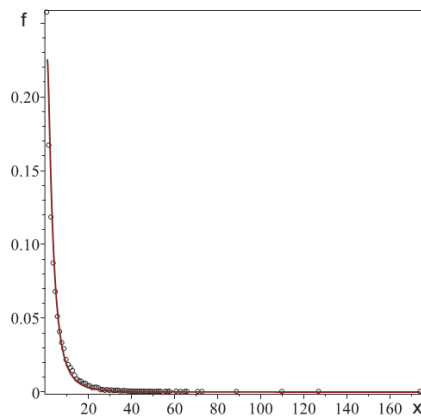


Рис.2 Нормированная плотность распределения исходящих звонков показана кружками. Непрерывная кривая соответствует логнормальной плотности распределения с полученными параметрами σ и μ из аппроксимирующей зависимости

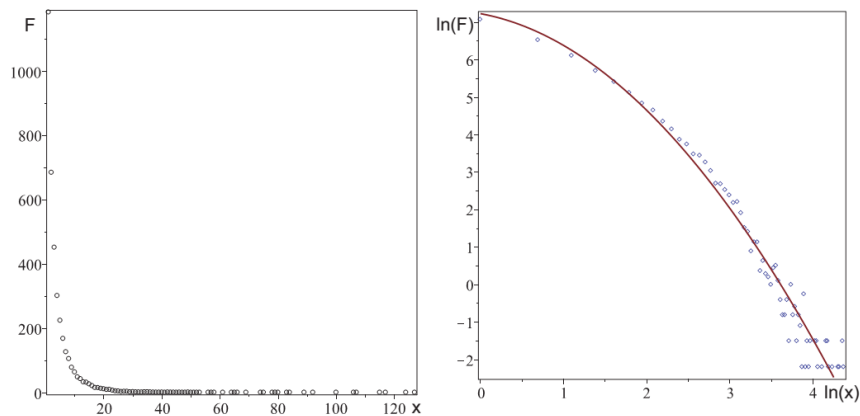


Рис.3 Слева распределение входящих звонков за день по их количеству. Здесь x число входящих звонков абоненту. Это усредненные данные за 9 дней. Справа те же данные в логарифмических координатах

Таким образом, используя экспериментальные данные, получим вид экспериментальной плотности распределения исходящих звонков, нормируя значения гистограммы на общее количество звонков. Соответствующая зависимость приведена на Рис.2

Логнормальная плотность распределение имеет вид [24],[25]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{x\sigma\sqrt{2\pi}} & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Где σ и μ два параметра, определяющие логнормальную плотность распределения. Так математическое ожидание $\mu^* = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ и дисперсия логнормального распределения $\sigma^{*2} = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$ выражаются через эти параметры. Если обозначить коэффициенты, входящие в аппроксимирующую функцию как $\ln(y) = c + b \cdot \ln(x) - a \cdot \ln(x)^2$, то можно установить параметры логнормальной плотности распределения. Действительно легко получить, что $\mu = \frac{b+1}{2a}$ и $\sigma^2 = \frac{1}{2a}$. Используя экспериментальные значения a , b , получим $\mu \approx 1.1$ и $\sigma^2 \approx 1.0$. Следует подчеркнуть, что полученные значения параметров близки к единице. Тогда математическое ожидание логнормального распределения $\mu^* \approx 8$, а дисперсия $\sigma^{*2} \approx 40$.

Следовательно, плотность распределения по количеству исходящих звонков совпадает с логнормальным распределением. Параметры этого распределения $\mu \approx 1.1$ и $\sigma^2 \approx 1.0$ согласно экспериментальным данным.

Перейдем теперь к обсуждению плотности распределения входящих звонков на протяжении одного дня. Фиксируются входящие звонки тому же подмножества абонентов за прежний период времени. Экспериментальные данные в виде гистограммы приведены на Рис.3. Усреднение гистограммы также выполнено по 9 дням. Общее число входящих звонков согласно гистограммы $N_{in} = 3706$.

Квадратичная аппроксимация данных, приведенных на Рис.3 справа, методом наименьших квадратов приводит к зависимости $\ln(y) = 7.24 - 0.41\ln(x) - 0.442\ln(x)^2$. Как и выше, известные значения коэффициентов позволяют установить значения параметров логнормальной плотности распределений. Для входящих звонков $\mu \approx 0.67$, а $\sigma^2 \approx 1.13$. На Рис.4 приведены экспериментальные значения нормированные на $N_{in} = 3706$ и непрерывная кривая, соответствующая логнормальной плотности распределения при найденных значениях σ и μ . Видно хорошее соответствие этих зависимостей. На самом деле можно достичь и лучшего согласия, учитывая, что нормировка экспериментальных точек бралась по заниженному значению. Причина этого в недостаточной статистике и наличии большого числа нулей на хвосте функции распределения.

Таким образом, статистика входящих звонков также приводит к логнормальному распределению с параметрами $\mu \approx 0.7$, а $\sigma^2 \approx 1.1$. Среднее значение входящих звонков $\mu^* \approx 3.4$ и дисперсия $\sigma^{*2} \approx 6.7$ согласно логнормальному закону.

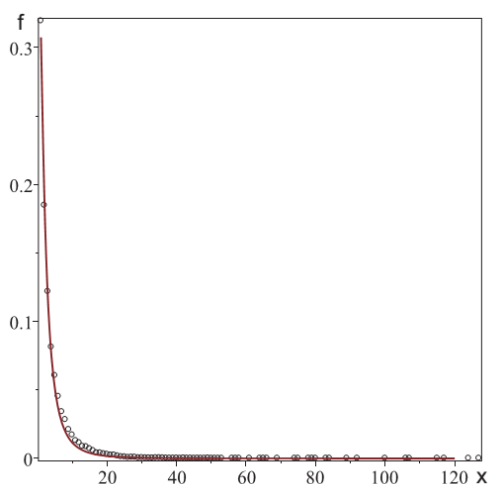


Рис.4 Нормированная плотность распределения входящих звонков показана кружками. Непрерывная кривая соответствует логнормальной плотности распределения с полученными параметрами σ и μ из аппроксимирующей зависимости

Сравнивая распределения исходящих и входящих звонков можно заметить, что среднее значение исходящих звонков $\mu^* \approx 8$ существенно превышает среднее значение входящих звонков $\mu^* \approx 3.4$. Это означает, что множество абонентов позвонивших за день меньше множества всех абонентов. Используя логнормальную функцию распределения, в принципе, можно вычислить их количество. Кроме этого, используя суммарные экспериментальные данные за 9 дней, можно установить количество абонентов, позвонивших 1 раз за 9 дней.

3 Распределение спамеров

Рассмотрим теперь еще два типа абонентов. Одних из них можно назвать спамерами, которые досаждают другим своими звонками, рекламами и т.п. Второй тип абонентов это активные абоненты, которые сообщают о номерах спамеров с требованиями их блокирования. Этим абонентов далее будем называть активными. Начнем с обсуждения статистических данных о звонках спамеров, ориентируясь на информацию о них, поступающую от активных абонентов. Усредненные статистические данные о спамерах приведены на гистограмме на Рис.5 слева. Период наблюдения и усреднения прежний. Те же данные в двойном логарифмическом масштабе приведены на Рис.5 справа. Непрерывная кривая демонстрирует аппроксимационную зависимость, полученную методом наименьших квадратов. Эта зависимость соответствует квадратичной

$$\ln f = 2.95 + 0.33 \cdot \ln(x) - 0.25 \cdot \ln(x)^2$$

Используя это соотношение, можно убедиться, что плотность функции распределения соответствует логнормальной плотности распределения с параметрами $\mu \approx 2$ и $\sigma^2 \approx 3$. Нормировочный множитель для получения плотности распределения по гистограмме равен $N_s = 186$. Используя эту плотность распределения, можно вычислить среднее значение $\mu^* \approx 18$ и дисперсию $\sigma^{*2} \approx 146$ звонков спамеров. Легко заметить существенное превышение среднего значения исходящих звонков от спамеров по сравнению со средним значением исходящих звонков от обычных абонентов. Также большое значение дисперсии означает, что отдельные абоненты могут получать значительно больше звонков, чем среднее значение.

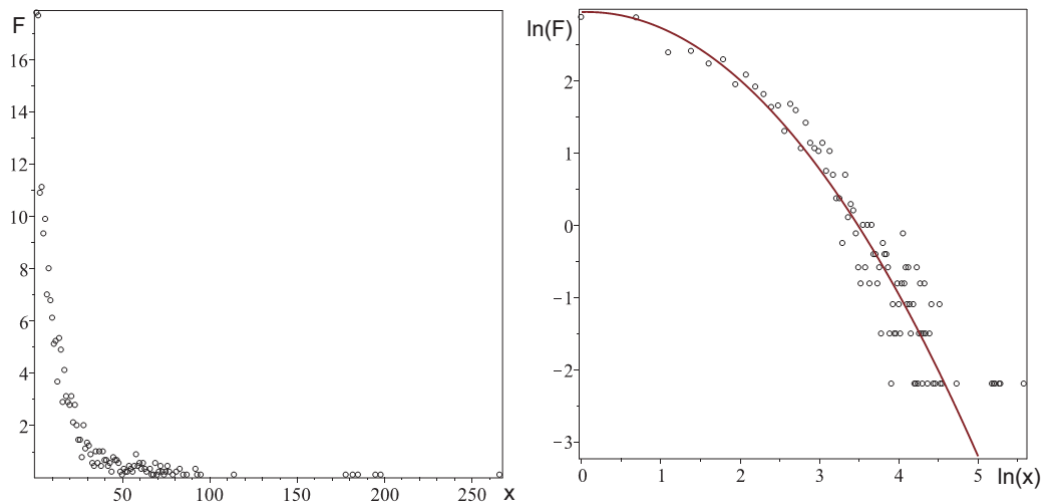


Рис.5 Слева распределение входящих звонков за день от спамеров. Это усредненные данные за 9 дней. Справа те же данные в логарифмических координатах. Непрерывная кривая это зависимость, полученная методом наименьших квадратов

Согласованность экспериментальных данных и логнормальной плотности распределения показана на Рис.6. Видно хорошее соответствие этих зависимостей.

Перейдем теперь к данным об активных абонентах. Начнем со статистики об исходящих звонках этой группы абонентов. Соответствующая гистограмма приведена на Рис.7 справа. В двойном логарифмическом масштабе эти данные показаны слева.

Видна характерная квадратичная зависимость. Аналогичная аппроксимация приводит к зависимости вида

$$\ln f = 5.11 - 0.161 \cdot \ln(x) - 0.45 \cdot \ln(x)^2$$

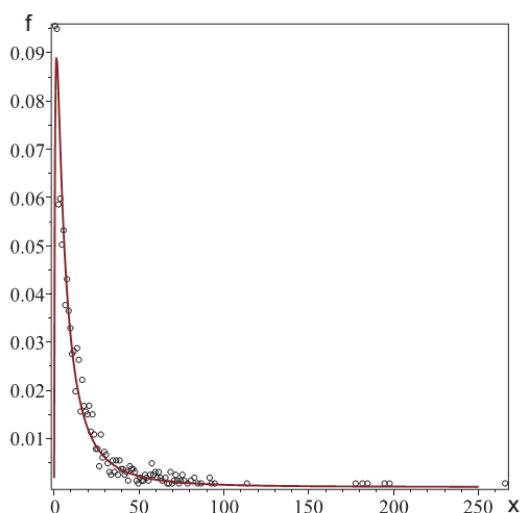


Рис.6 Нормированная плотность распределения входящих звонков спамеров показана кружками. Непрерывная кривая соответствует логнормальной плотности распределения с полученными параметрами σ и μ из аппроксимирующей зависимости

Как и ранее коэффициенты этой зависимости определяют параметры логнормальной плотности распределения. Так для исходящих звонков $\mu \approx 0.93$, а $\sigma^2 \approx 5$. Значения этих параметров близки к их значениям для абонентов в целом. Средние значения логнормальной плотности распределения $\mu^* \approx 4$ и $\sigma^{*2} \approx 11$ так же отличаются незначительно. Так абонентов в целом $\mu^* \approx 8$, а $\sigma^{*2} \approx 40$. Интересно отметить, что в среднем активные абоненты звонят реже и отклонение от среднего меньше. Можно предположить, что именно это делает их <<чувствительными>> к звонкам спамеров.

На Рис.8 показана плотность распределения построенная по экспериментальным данным (кружочки) и непрерывная кривая логнормальной плотности распределения. Видно хорошее согласие зависимостей.

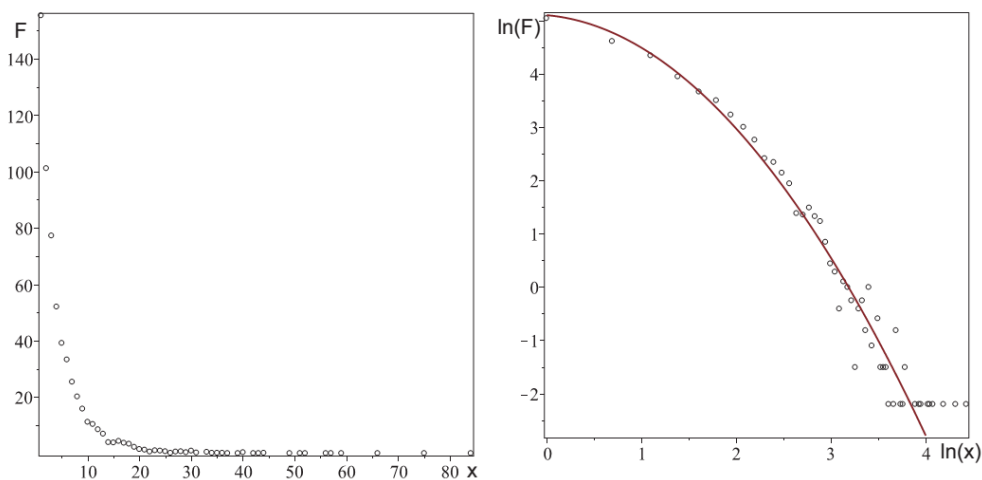


Рис.7 Слева распределение исходящих звонков за день от активных абонентов. Это усредненные данные за 9 дней. Справа те же данные в логарифмических координатах. Непрерывная кривая это зависимость, полученная методом наименьших квадратов

Обсудим теперь статистику входящих звонков активным абонентам. На Рис.8 приведены соответствующие данные в обычных и в логарифмических координатах. По этим данным снова находим параметры логнормальной плотности распределения, используя аппроксимацию $\ln f = 5.06 + 0.82 \cdot \ln(x) - 0.67 \cdot \ln(x)^2$ экспериментальных данных. Для статистики входящих звонков параметры принимают значения $\mu \approx 1.36$, $\sigma^2 \approx 5$. Как и ранее это приводит к среднему числу входящих звонков $\mu^* \approx 6$ и дисперсии $\sigma^{*2} \approx 22$. Эти значения превышают соответствующие значения для обычных абонентов. Следовательно, активные абоненты действительно получают больше входящих звонков.

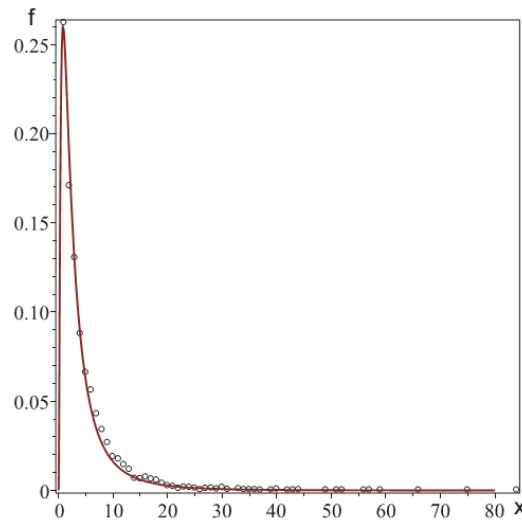


Рис.8 Нормированная плотность распределения исходящих звонков от активных абонентов показана кружками. Непрерывная кривая соответствует логнормальной плотности распределения с полученными параметрами σ и μ из аппроксимирующей зависимости

Таким образом, статистические свойства абонентов телефонной сети определяются логнормальной плотностью распределения, параметры которого зависят от способа выбора типа связи и подмножества абонентов. Причина, по которой реализуется логнормальное распределение, возможно связана с механизмом, который был обнаружен достаточно давно в работе [26]. Переформулируем их на языке звонков абонентов. Пусть число звонков N_i определяется в дискретном времени следующим уравнением

$$N_{i+1} - N_i = \omega_i N_i$$

Здесь ω_i - случайная частота звонка. Другими словами, скорость изменения числа звонков пропорциональна случайной частоте и числу сделанных звонков до этого. Решая это уравнение с начальным условием $N_0 = 1$, легко получить

$$N_i = \prod_{j=0}^{i-1} (1 + \omega_j)$$

После вычисления логарифма этого решения приходим к равенству

$$\ln N_i = \sum_{j=0}^{i-1} \ln(1 + \omega_j)$$

Теперь заметим, что случайные частоты должны быть маленькими. В противном случае мы бы звонили очень часто. Тогда, учитывая малость частот, ограничимся первым членом разложения логарифма и получим

$$\ln N_i \approx \sum_{j=0}^{i-1} \omega_j$$

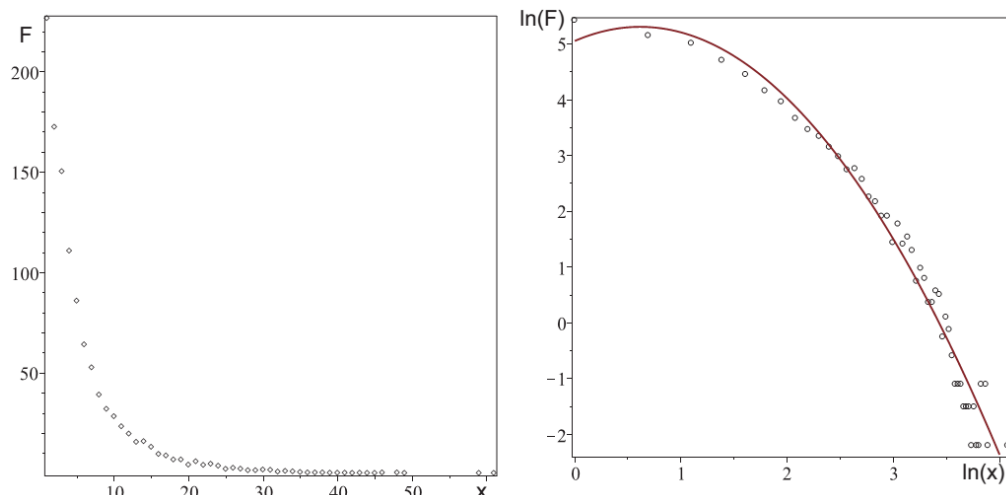


Рис.9 Слева распределение входящих звонков за день от активных абонентов. Это усредненные данные за 9 дней. Справа те же данные в логарифмических координатах. Непрерывная кривая это зависимость, полученная методом наименьших квадратов

Таким образом, статистические свойства логарифма числа звонков определяются статистическими свойствами сумм малых случайных величин. Тогда мы можем воспользоваться центральной предельной теоремой о распределении сумм независимых случайных величин (см. например [27]). Согласно которой суммы достаточно большого числа независимых величин, имеющих конечные средние значения и дисперсию, нормально распределены. Это означает в нашем случае нормальность распределения логарифмов или, что плотность распределения числа звонков логнормальная.

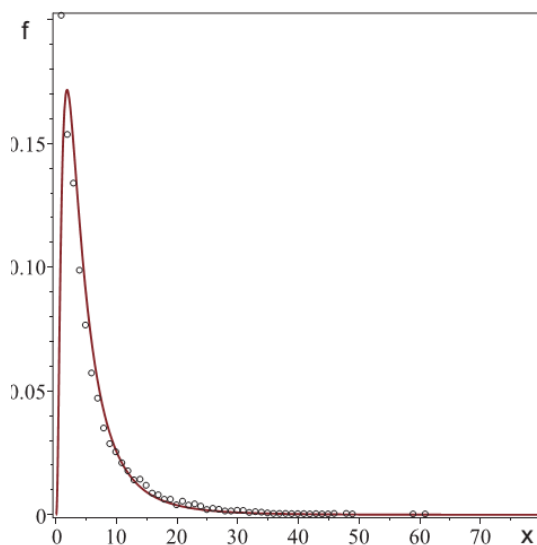


Рис.10 Нормированная плотность распределения входящих звонков к активным абонентам показана кружками. Непрерывная кривая соответствует логнормальной плотности распределения с полученными параметрами σ и μ из аппроксимирующей зависимости

4 Обсуждение результатов

Таким образом, число связей как входящих так и исходящих подчиняются логнормальному распределению. Отличие состоит в значениях параметров μ и σ , которые определяют эти распределения. Для входящих и исходящих связей отличия этих параметров небольшие. Так, например, параметры логнормального распределения исходящих $\mu_{out} \approx 1$, $\sigma_{out}^2 \approx 1$ незначительно отличаются от параметров входящих $\mu_{in} \approx 0.7$, $\sigma_{in}^2 \approx 1.1$.

Однако средние значения и дисперсия этих логнормальных плотностей распределения отличаются существенно. Так для приведенных выше значений $\mu_{*out} \approx 8$, $\sigma_{*out}^2 \approx 40$, а $\mu_{*in} \approx 3.4$, $\sigma_{*in}^2 \approx 6.7$. Поэтому для уточнения этих параметров следует использовать еще большие массивы экспериментальных данных. Фактически эти параметры определяют соответствующую сложную сеть связей.

Следует отметить, что хотя в работе обсуждалась телефонная сеть абонентов, но основной вывод о логнормальности вершин от степеней останется справедливым и для множества других сетей.

Например, ее можно ожидать, для сети фирм, банков и т.п., связывающихся с друг с другом. Все основные закономерности будут выполняться и для них.

REFERENCES

1. K. Appel and W. Haken, "Every map is four colourable". *Bulletin of the American Mathematical Society* 82, p.711–12, 1976.
2. P.Erdős, A.Rényi, "On the evolution of random graphs", *Magyar Tudományok Akademia Matematikai Kutató Intezetének Közleményei* (Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences), T. 5, p.17-61, 1960.
3. R.Albert, A.L.Barabasi, "Statistical mechanics of complex networks", *Rev. Mod. Phys.* 74, p.47-97; 2002. cond-mat 0106096.
4. S.N.Dorogovtsev, J.F.F.Mendes, *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*: Oxford University Press, Oxford, (2003).
5. Newman, M.E.J., "The structure and function of complex networks", *SIAM Review* 45, p.167-256, 2003, cond-mat 0303516.
6. S.Boccatti, V.Latora, Y.Moreno, M.Chavez, D.U.Hwang. "Complex Networks: Structure and Dynamics", *Physics Reports*, 424, p.175-308, 2006.
7. A-L.Barab'asi, Z.N.Oltvai., "Network biology: Understanding the cell's functional organization". *Nature Rev. Genet*, 5, p.101–13, 2003.
8. A.Gursoy, O.Keskin, and R.Nussinov, "Topological properties of protein interaction networks from a structural perspective". *Biochem. Soc. Trans.* 36, p.1386–1403, 2008.
9. O.Sporn, *Networks of the Brain*: MIT Press, Cambridge, MA, 2011.
10. G. F.Davis, M.Yoo, W. E.Baker, "The Small World of the American Corporate Elite", 1982–2001.*Strategic Organization*1, p.301–26. 2003.
11. W.Zachary, "An information flow model for conflict and fission in small groups", *J. Anthropol. Res.*, 33, 452–73, 1977.
12. Barabasi et al, "Evolution of the social network of scientific collaborations", *Physica A*, 311 p.590–614, 2002.
13. A.Arenas, L.Danon, A.D az-Guilera, P. M.Gleiser, and R.Guimera, "Community analysis in social networks", *Eur. Phys. J. B.* 38, p.373–80, 2004.
14. P.Yodzis, "Local trophodynamics and the interaction of marine mammals and fisheries in the Benguela ecosystem", *J. Anim. Ecol.*, 67, p.635–58, 1998.
15. D.Lusseau, "The emergent properties of a dolphin social network". *Proc. R. Soc. Lond. B.* (Suppl.)270, 186–8, 2003.
16. J.Lundberg, F.Moberg, "Mobile link organisms and ecosystem functioning: Implications for ecosystem resilience and management", *Ecosystems*, 6, p.87–98, 2003.
17. J. Kleinberg, S. R. Kumar, P. Raghavan, S. Rajagopalan and A. Tomkins, "The web as a graph: Measurements, models and methods", *Proceedings of the International Conference on Combinatorics and Computing*, July 26–28, 1999.
18. . R. Kumar, P. Raghavan, S. Rajagopalan and A. Tomkins, "Extracting largescale knowledge bases from the web", *Proceedings of the 25th VLDB Conference*, Edinburgh, Scotland, September 7–10, (1999).
19. J.Abello, A.Buchsbaum, and J.Westbrook, "A functional approach to external graph algorithms", *Proc. 6th European Symposium on Algorithms*, p.332–343, 1998.
20. W.Aiello, F. Chung and L. Lu, "A random graph model for massive graphs", in *Proc. 32nd ACM Symp. Theor. Comp.*, p.171-180, 2000.

21. R. Albert, H. Jeong and A. Barabási, “Diameter of the World Wide Web ”, *Nature*, 401, September 9, p.130-131, 1999.
22. Barabási, and R. Albert, “Emergence of scaling in random networks ”, *Science*, 286, October 15, p.509-512, 1999.
23. J.Abello, A.Buchsbaum, J.Westbrook, “A functional approach to external graph algorithms ”, *Proc. 6th European Symposium on Algorithms*, p 332–343, 1998.
24. A.N.Kolmogorov, “On the log-normal distribution law of particle size in fragmentation process ”, *Doklady AN USSR*, Vol.31, No.2, p.99-101, 1941. [in Russian]
25. Edwin L.Crow, Kunio Shimizu, (Editors) *Lognormal Distributions, Theory and Applications*, vol. 88, Statistics: Textbooks and Monographs, New York: Marcel Dekker, (1988).
26. R.Gibrat, “Une loi des répartitions économiques: l’effet proportionnel ”, *Bull. Statist. Gén. Fr.*, 19, 469ff, p.469-513, 1930.
27. W.Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. 2, M., Mir, 1967, 752c [in Russian].

ЛІТЕРАТУРА

1. K. Appel and W. Haken, Every map is four colourable. *Bulletin of the American Mathematical Society* 82. (1976). 711–12.
2. Erdős P., Rényi A. On the evolution of random graphs, *Magyar Tudományos Akademia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* (Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences).T. 5 (1960).17-61.
3. Albert, R. and Barabasi, A.L. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.* 74. (2002) 47-97; cond-mat 0106096.
4. Dorogovtsev, S.N. and Mendes, J.F.F. *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*: Oxford University Press, Oxford. 2003. 264 pp.
5. Newman, M.E.J. The structure and function of complex networks. *SIAM Review* 45. (2003). 167. cond-mat 0303516.
6. S.Boccatti, V.Latora, Y.Moreno, M.Chavez, D.U.Hwang. Complex Networks: Structure and Dynamics. *Physics Reports*. 424(2006). 175-308.
7. Barabási, A-L., and Oltvai, Z. N.. Network biology: *Understanding the cell’s functional organization*. *Nature Rev. Genet.* 5. (2003). 101–13.
8. Gursoy, A., Keskin, O., and Nussinov, R. Topological properties of protein interaction networks from a structural perspective. *Biochem. Soc. Trans.* 36. (2008). 1386–1403.
9. Sporn, O.. *Networks of the Brain*: MIT Press, Cambridge. MA. 2011. 412 pp.
10. Davis, G. F., Yoo, M., and Baker, W. E. The Small World of the American Corporate Elite, 1982–2001. *Strategic Organization* 1. (2003). 301–26.
11. Zachary, W. An information flow model for conflict and fission in small groups. *J. Anthropol. Res.* 33. (1977). 452–73.
12. A. Barabasi et al. Evolution of the social network of scientific collaborations. *Physica A*. 311 (2002). 590–614.
13. Arenas, A., Danon, L., Diaz-Guilera, A., Gleiser, P. M., and Guimera, R. Community analysis in social networks. *Eur. Phys. J. B*. 38. (2004). 373–80.
14. Yodzis, P.. Local trophodynamics and the interaction of marine mammals and fisheries in the Benguela ecosystem. *J. Anim. Ecol.* 67. (1998). 635–58.
15. Lusseau, D. The emergent properties of a dolphin social network. *Proc. R. Soc. Lond. B. (Suppl.)* 270. (2003). 186–8.
16. Lundberg, J., and Moberg, F. Mobile link organisms and ecosystem functioning: Implications for ecosystem resilience and management. *Ecosystems*. 6. (2003). 87–98.
17. J. Kleinberg, S. R. Kumar, P. Raghavan, S. Rajagopalan and A. Tomkins, The web as a graph: Measurements, models and methods, *Proceedings of the International Conference on Combinatorics and Computing*. July 26–28. (1999).
18. S. R. Kumar, P. Raghavan, S. Rajagopalan and A. Tomkins. Extracting largescale knowledge bases from the web. *Proceedings of the 25th VLDB Conference*, Edinburgh. Scotland. September 7–10. (1999).

19. J. Abello, A. Buchsbaum, and J. Westbrook, A functional approach to external graph algorithms, *Proc. 6th European Symposium on Algorithms*. (1998). 332–343.
20. Aiello W., F. Chung and L. Lu. A random graph model for massive graphs. in *Proc. 32nd ACM Symp. Theor. Comp.* 2000.
21. R. Albert, H. Jeong and A. Barabási, Diameter of the World Wide Web. *Nature*. 401, September 9, (1999). 130-131.
22. A. Barabási, and R. Albert, Emergence of scaling in random networks. *Science*. 286. October 15. (1999). 509-512.
23. J. Abello, A. Buchsbaum, and J. Westbrook, A functional approach to external graph algorithms. *Proc. 6th European Symposium on Algorithms*. (1998). 332–343.
24. А.Н.Колмогоров, О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении: ДАН СССР, т.31. 1941. 93-101.
25. Crow, Edwin L. and Shimizu, Kunio (Editors) *Lognormal Distributions, Theory and Applications*, vol. 88, Statistics: Textbooks and Monographs. New York: Marcel Dekker. (1988). 387 pp.
26. Gibrat, R. Une loi des répartitions économiques: l'effet proportionnel. *Bull. Statist. Gén. Fr.* 19. 469ff. 1930. 469-513.
27. Фелер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. т.2. М.: Мир, 1967. 752с.

Яновський Володимир Володимирович – доктор фізико-математичних наук, професор; професор кафедри штучного інтелекту та програмного забезпечення, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua: ORCID: 0000-0003-0461-749X.

Yanovsky Volodymyr Volodymyrovych. PhD, Doctor of Science, Professor, Professor of Department of Artificial Intelligence and Software V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, e-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua: ORCID: 0000-0003-0461-749X.

Яновский Владимир Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры искусственного интеллекта и программного обеспечения, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua: ORCID: 0000-0003-0461-749X.

Данилевський Михаїл Вікторович – студент кафедри моделювання систем і технологій, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: m.danilevskiy@gmail.com.

Danilevskiy Mikhail V. Student of Department of Artificial Intelligence and Software V. N. Karasin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine, e-mail: m.danilevskiy@gmail.com.

Данілевський Михайло В. – студент кафедри моделювання систем і технологій, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: , e-mail: m.danilevskiy@gmail.com.