

УДК 519.6

## Побудова базисних функцій для задач коливання рідини в резервуарі

М.Л. Мироненко

*Інститут проблем машинобудування ім. А.М.Підгорного НАНУ, вул. Пожарського, 2/10,*

*Харків, 61046, Україна*

*e-mail: mariamyronenko87@gmail.com*

При визначенні коливань рідини в резервуарі враховано вплив кривини вільної поверхні заповнювача на частоти коливань. Припущено, що рідина є нестисливою та нев'язкою, а її рух є безвихровим. Розроблено метод розв'язання крайової задачі для визначення коливань рідини в резервуарі та побудовано інтегральне зображення невідомого потенціалу швидкостей. Отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих значень потенціалу та потоку. Для числового розв'язання системи використовувався метод граничних елементів з постійною апроксимацією невідомої щільності на елементах. Встановлено, що відхилення форми вільної поверхні від пласкої та навіть незначний підйом вільної поверхні призводять до помітних змін частот коливань. Форми коливань, отримані у дослідженні, практично збігаються з формами коливань для пласкої вільної поверхні та слугуватимуть базисною системою функцій в дослідженнях власних та вимушених коливань рідини в резервуарах за умови врахування поверхневого натягу.

**Ключові слова:** *вільна поверхня рідини, сингулярні інтегральні рівняння, частота коливань, ідеальна нестислива рідина, базисні функції*

При определении колебаний жидкости в резервуаре учтено влияние кривизны свободной поверхности заполнителя на частоты колебаний. Предполагается, что жидкость несжимаемая и невязкая, а ее движение является безвихревым. Разработан метод решения краевой задачи для определения колебаний жидкости в резервуаре и построено интегральное представление неизвестного потенциала скоростей. Относительно неизвестных значений потенциала и потока получена система сингулярных интегральных уравнений. Для численного решения системы использовался метод граничных элементов с постоянной аппроксимацией неизвестной плотности на элементах. Установлено, что отклонение формы свободной поверхности от плоской и даже незначительный подъем свободной поверхности приводят к заметным изменениям частот колебаний. Формы колебаний, полученные в работе, практически совпадают с формами колебаний для плоской свободной поверхности и будут служить базисной системой функций в исследованиях свободных и вынужденных колебаний жидкости в резервуарах при условии учета поверхностного натяжения.

**Ключевые слова:** *свободная поверхность жидкости, сингулярные интегральные уравнения, частота колебаний, идеальная несжимаемая жидкость, базисные функции*

Considerable number of studies and publications is devoted to issues of dynamic behavior of liquids, the impact on the surface tension of a liquid in partially filled tanks in particular. The study of liquid vibrations in partially fluid-filled cylindrical containers with the presence of a free surface is an important technical task. The influence of the free surface curvature of the tank filler on the oscillation frequency is taken into account. It is assumed that the liquid is incompressible and inviscid, and its motion is irrotational. The method to solve a boundary value problem for determining fluid oscillations in a reservoir has been developed, and an integral presentation of an unknown velocity potential is proposed. The geometrical characteristics of the free liquid surface have been determined. It is taken into account that the free liquid surface deviates from the equilibrium position and assumes a spherical shape. A system of singular integral equations has been obtained for unknown values of the potential and flow. The method of boundary elements with constant approximation of an unknown density on the elements has been used to solve the system numerically. The oscillation frequencies for the zero harmonic are determined in accordance with the level of the free-surface elevation. It has been determined that the deviation of the free surface shape from the flat and even a slight rise in the free surface level leads to noticeable changes in the vibration frequencies. The vibrational modes obtained in the study mostly coincide with the modes for a flat free surface and can serve as the basic system of functions in the studies of free and forced fluid vibrations in tanks, as well as, in the study of the intrinsic and forced sloshing in the reservoirs provided surface tension is taken into account.

**Key words:** *free liquid surface, singular integral equations, oscillation frequency, ideal incompressible liquid, basic functions.*

### 1 Вступ

Резервуари, частково наповнені рідиною, яка має вільну поверхню, мають широку сферу промислового використання (наприклад, паливні баки ракетоносіїв або автомобілів, залізничні або автомобільні цистерни для транспортування вантажів у рідкому стані, вантажні танкери тощо). Вивчення динаміки ємностей даного типу, що приводить до коливання рідини у резервуарі, має практичне значення. Жорсткі резервуари, частково заповнені рідиною, зазнають найбільш інтенсивного впливу від коливань рідини, що може призвести до втрати стійкості або навіть до руйнування конструкції. Тому дослідження коливань рідини у ємностях довільної форми при частковому заповненні та наявності вільної поверхні є важливим технічним завданням.

## 2 Аналіз останніх досліджень та публікацій

Вивчення даного питання проводиться більше п'яти десятиріч провідними вітчизняними та закордонними вченими. До числа найбільш важливих праць можна долучити роботи Луковського І.О.[1], Мікішева Г. М. та Рабіновича Б. І.[2], Мойсєєва М. М. та Румянцева В.В. [3]. Дані монографії присвячені аналітичним та числовим методам розв'язання задач про вільні малі коливання рідини у резервуарах. Існують статті, присвячені даній тематиці [4, 5]. Зміни форми вільної поверхні в даних роботах майже не розглядаються.

Плескання вільної поверхні рідкого палива у великих ракетних прискорювачах є загальновідомою технологічною проблемою, особливо у випадках незначного осьового прискорення, коли окрім взаємодії рідини з пружними стінками баків враховуються сили міжмолекулярної взаємодії (поверхневого натягу) рідини та гравітаційні сили. Відбувається плескання палива в умовах низької гравітації. Експериментально-теоретична робота з дослідження цього явища почалась ще в 60-х роках [6]. Було визначено, що в експериментальних умовах помірно низької гравітації вільна поверхня рідини відхиляється від рівноважного плаского положення та набуває кривизни.

Низка робіт Р. Дж. Хунга та інших учених присвячена дослідженням поведінки рідини в умовах мікрогравітації, а також пов'язана з науковою діяльністю дослідника в Університеті Алабами в Хантсвіллі. Динамічну поведінку рідини, зокрема вплив поверхневого натягу на частково заповнені рідиною резервуари в мікрогравітаційному середовищі розглянуто у [7]. Результати показують, що під дією силового поля сили тяжіння і відцентрових сил виникає ряд хвиль у поперечному та поздовжньому напрямках з різними амплітудами та довжинами. Проте низькочастотне плескання рідини є режимом більш високої енергії хвилі у порівнянні з хвилями більш високих частот. Ще одна робота присвячена динаміці плескання, обумовленого градієнтом орбітальної сили тяжіння та квазістационарним залишковим прискоренням, зокрема впливом поверхневого натягу рідини при частково заповненому паливному баку в умовах мікрогравітації стосовно повномасштабного літального апарату [8]. В залежності від різних умов орбітальних прискорень чітко візуалізуються деформації форми коливань вздовж границі поділу рідина-пар. Математична постановка задачі динаміки плескання рідкого палива у частково заповнених контейнерах, обумовленого прискоренням сили тяжіння, подана у дослідженні [9]. Питання щодо вимірювання форми рівноваги рідини, що обертається, в умовах мікрогравітації вільного падіння літака розглянуто Ф. Леслі з співавторами [10]. Визначається залежність форми вільної поверхні від кута змочування, радіусу контейнера, а також параметра, який є мірою відносного значення відцентрової сили для поверхневого натягу. Більш ранні дослідження Р. Дж. Хунга розглядають вплив поверхневого натягу на динамічну поведінку рідини у частково заповнених балонах космічного корабля [11], а також часові зміни форми вільної поверхні рідини у циліндричній, частково заповненій ємності в умовах низької гравітації та мікрогравітаційного середовища [12].

Оглядова робота десятирічних експериментальних досліджень китайських вчених та їх досягнень стосується поведінки рідини у мікрогравітаційному середовищі [13]. Розглянуто проведені теоретичні та експериментальні дослідження у області мікрогравітації, як перспективної галузі розвитку та застосування високих технологій.

Моделювання вільної поверхні рідини у частково наповненому паливному баці в умовах мікрогравітації можливо здійснювати у спеціалізованих програмних середовищах. Це питання було розглянуто під час конференції AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference [14], [15], [16]. Моделювання плескання палива дозволяє прогнозувати динамічний вплив на залежні системи, а отже, боротися з нестабільністю літального апарату. Передбачити різні випадки взаємодії рідкої складової паливного баку та системи управління ракети-носія, включаючи в аналіз різні динамічні середовища, дозволяє модель на основі середовища Mathworks MATLAB [14], [15]. Хоча ця модель не підходить для середовища з низькою гравітацією, майбутні дослідження передбачають отримання швидких оцінок інерційного стану системи та її внутрішнього об'єму. Це надає можливість тестування впливу ракетного пального на систему керування ракетноносієм у мікрогравітаційному середовищі, коли рідина поводить себе інакше в залежності від дії сил зчеплення, що домінують за рахунок поверхневого натягу [16]. Ось чому вивчення цього питання є важливим та перспективним.

### 3 Постановка задачі

Розглянемо оболонку, частково заповнену рідиною. Змочену поверхню оболонки позначимо як  $S_1$ , а вільну поверхню як  $S_0$ . В даній роботі ми будемо вивчати непласку поверхню  $S_0$ . Змочена поверхня оболонки позначена як  $S_1$ , а вільна поверхня –  $S_0$ . Нехай циліндрична частина оболонки радіусом  $R$  має змочену поверхню висотою  $H$ . Зазначимо, що вільна поверхня  $S_0$  розподіляє два середовища: рідина-газ та розглядається як тонка мембрана, враховуючи вплив поверхневого натягу.

Припустимо, що рідина нестислива та  $\rho_l = \text{const}$ ; в безвихровому потоці рідини існує потенціал швидкості  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ ; рідина знаходиться під впливом гравітаційного поля, а на систему діє сила тяжіння  $\mathbf{F} = \rho_l \mathbf{g}$ . – єдина зовнішня сила. Величина гравітаційної сталої  $\mathbf{g}$  може зазнавати змін під час місії. Оскільки оболонка має жорсткі стінки, а швидкість  $\mathbf{v}$  – лише тангенціальну складову, тоді:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0,$$

де  $\mathbf{n}$  – зовнішня одинична нормаль до поверхні.

Нехай  $\sigma$  – поверхневий натяг. За формулою Лапласа-Юнга [10] маємо

$$p_s = \sigma\kappa \quad (3.1)$$

де  $\kappa$  – кривина поверхні. Вираз для  $\kappa$  можна лінеаризувати [10]:

$$\kappa = -\Delta_s \zeta, \quad (3.2)$$

де  $\Delta_s$  – поверхневий оператор Лапласа. Таким чином, динамічна гранична умова на вільній поверхні приймає вигляд:

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial t} + g\zeta - \frac{\sigma}{\rho_l} \Delta_s \zeta \right|_{S_0} = 0. \quad (3.3)$$

Припустимо, що

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad (3.4)$$

Отримуємо таку крайову задачу для функції  $\psi$ :

$$\Delta\psi = 0, \quad \left. \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_0} = \frac{\omega^2}{g} \psi|_{S_0}, \quad \left. \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{S_1} = 0, \quad \iint_{S_0} \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} dS_0 = 0. \quad (3.5)$$

В цих рівняннях  $S_0$  не є пласкою поверхнею, а має ненульову кривину. Надалі наведемо основні співвідношення, що характеризують поверхню.

### 4 Геометричні характеристики вільної поверхні

Розглянемо рух ідеальної рідини, що наповнює резервуар циліндричної форми з радіусом основи  $R$  на висоту  $H$ . Вважаємо, що рідина, яка заповнює резервуар, є ідеальною та нестисловою. В стані рівноваги об'єм рідини, що заповнює резервуар буде рівний:

$$V_1 = \pi R^2 H \quad (4.1)$$

Вирішуючи задачу, беремо до уваги, що вільна поверхня рідини має відхилення від положення рівноваги, а область, зайнята рідиною, приймає сферичну форму (рис. 4.1 а).

У цьому випадку об'єм рідини, який позначимо  $V_2$ , складатиметься з суми об'ємів сферичного сегмента з висотою  $h$  та радіусом основи сферичного сегмента  $r$  та циліндру, висотою  $H_1$ . Об'єм сферичного сегмента визначаємо за формулою:

$$V_{\text{сф.сег.}} = \pi h^2 (3R_1 - h) / 3, \quad (4.2)$$

де  $h$  - висота сферичного сегмента;

$R_1$  - радіус сфери.

$$V_2 = V_1$$

$$R_1 = \frac{R^2 + h^2}{2h} \quad (4.3)$$

$$V_{\text{сф.сег.}} = \pi h^2 \left( \frac{R^2 + h^2}{2h} - \frac{1}{3} h \right) = \frac{3\pi h R^2 + \pi h^3}{6} \quad (4.4)$$

$$\pi R^2 H = \pi R^2 H_1 + \frac{3\pi h R^2 + \pi h^3}{6} \quad (4.5)$$

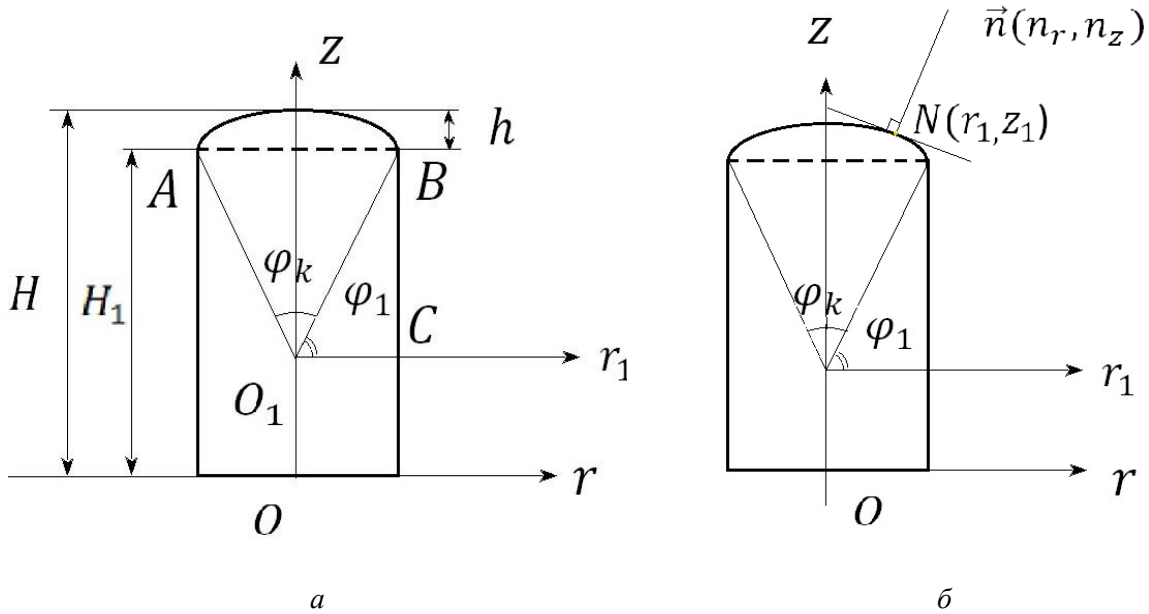


Рис. 4.1 Схема резервуару, заповненого рідиною

Висота рідини  $H_1$ , яка заповнює резервуар, становитиме:

$$H_1 = H - \frac{1}{2}h - \frac{h^3}{6R^2} \quad (4.6)$$

Розглянемо випадок, коли  $h = r$ , тоді:

$$V_{\text{сф.сег.}} = \frac{2}{3}\pi R^2, \quad (4.7)$$

$$\pi R^2 H = \pi R^2 H_1 + \frac{2}{3}\pi R^3, \quad (4.8)$$

$$H_1 = H - \frac{2}{3}R \text{ при } \alpha = 0. \quad (4.9)$$

Вільна поверхня рідини, що має сферичну форму, у системі координат  $zOr$  являє собою частину дуги, що опирається на центральний кут  $\varphi_k$  ( $\angle AO_1B$ ) кола з центром в т.  $O_1$  з радіусом  $R_1$ . Розглянувши  $\triangle O_1CB$ , визначимо значення косинуса кута  $\varphi_1$ :

$$\cos \varphi_1 = \frac{R_1 - h}{R_1} \quad (4.10)$$

Підставивши у (4.10) формулу (4.3) отримаємо:

$$\varphi_1 = \cos^{-1}\left(1 - \frac{2h^2}{R^2 + h^2}\right) \quad (4.11)$$

Положення будь-якої точки  $N$  (рис. 4.1 б) на вільній поверхні рідини у системі координат  $zO_1r$  визначається полярними координатами  $N(r_1, z_1)$ :

$$r_1 = R_1 * \cos \varphi_k \quad (4.12)$$

$$z_1 = R_1 * \sin \varphi_k \quad (4.13)$$

Враховуючи (4.11) визначимо, що значення параметра  $\varphi_k$  змінюватиметься у діапазоні:

$$\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \leq \varphi_k \leq \frac{3}{2}\pi + \varphi_1, \quad (4.14)$$

$$\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(1 - \frac{2h^2}{R^2 + h^2}\right) \leq \varphi_k \leq \frac{3}{2}\pi + \cos^{-1}\left(1 - \frac{2h^2}{R^2 + h^2}\right)$$

Визначимо координати точки  $N$  у системі координат  $zOr$ , враховуючи, що точки  $O$  та  $O_1$  по осі зрозташовані на відстані  $H - R_1$  та прийнявши до уваги формули (4.3), (4.12) та (4.13) отримаємо:

$$r = \frac{R^2 + h^2}{2h} * \cos \varphi_k \quad (4.15)$$

$$z = \frac{R^2+h^2}{2h} * \sin \varphi_k + H - \frac{R^2+h^2}{2h} = \frac{R^2+h^2}{2h} (\sin \varphi_k - 1) + H \quad (4.16)$$

Визначимо рівняння нормалі до графіку функції, що описує вільну поверхню рідини. Для цього введемо рівняння окружності, що має центр у точці  $O_1$  та радіусом  $R_1$  у системі координат  $zOr$ :

$$(z - z_{01})^2 + r^2 = R_1^2 \quad (4.17)$$

$$z = z_{01} + \sqrt{(R_1^2 - r^2)} \quad (4.18)$$

Рівняння нормалі у будь-якій точці  $N(z_0; r_0)$  на вільній поверхні матиме вигляд:

$$z - z_0 = -\frac{1}{f'(r_0)} * (r - r_0) \quad (4.19)$$

Визначивши похідну  $f'(r_0)$ , підставимо значення у (4.19) та отримаємо наступне рівняння:

$$f'(r_0) = -\frac{r_0}{\sqrt{(R_1^2 - r_0^2)}} \\ z - z_0 = \frac{r_0}{\sqrt{(R_1^2 - r_0^2)}} * (r - r_0) \quad (4.20)$$

Вектор нормалі у загальному вигляді  $\vec{n}(n_r, n_z)$  матиме координати:

$$n_z = 1, n_r = \frac{r_0}{\sqrt{(R_1^2 - r_0^2)}} \quad (4.21)$$

Підставимо у  $n_r$  (4.21) значення  $R_1$  (4.3) та  $r_0$  (4.14):

$$n_r = \frac{\frac{R^2+h^2}{2h} * \cos \varphi_k}{\sqrt{\left(\frac{R^2+h^2}{2h}\right)^2 - \left(\frac{R^2+h^2}{2h}\right)^2 * \cos^2 \varphi_k}} \quad (4.22)$$

Отримаємо в результаті тригонометричних перетворень та спрощення:

$$n_r = \cot \varphi_k \quad (4.23)$$

Вектор нормалі матиме вигляд  $\vec{n}(1, \cot \varphi_k)$ . Визначимо орт  $\vec{e}$  вектора  $\vec{n}$  за формулою:

$$\vec{e} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left( \frac{n_z}{\sqrt{n_z^2 + n_r^2}} \right); \left( \frac{n_r}{\sqrt{n_z^2 + n_r^2}} \right) \quad (4.24)$$

де  $\vec{n}$  – вектор на площині, заданий координатами  $\vec{n}(n_z, n_r)$ ;

$|\vec{n}|$  – довжина вектора  $\vec{n}$ .

Довжина вектора  $|\vec{n}|$ :

$$|\vec{n}| = \sqrt{\cot^2 \varphi_k + 1} = \frac{1}{\sin \varphi_k} \quad (4.25)$$

Отже, орт  $\vec{e}$  вектора  $|\vec{n}|$ :

$$\vec{e} = \left( \frac{1}{1/\sin \varphi_k}; \frac{\cot \varphi_k}{1/\sin \varphi_k} \right) = (\sin \varphi_k; \cos \varphi_k) \quad (4.26)$$

## 5 Метод сингулярних інтегральних рівнянь

Співвідношення (3.5) приводять до задачі на власні значення. Власні значення є частотами вільних коливань  $\chi_k$ , а власні вектори  $\varphi_k(\mathbf{r})$  – формами вільних коливань. Кожен з цих власних векторів є розв'язком системи (3.5), а потенціал швидкості, що описує задачу (3.5), приймає вигляд

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{c}_k(t) \varphi_k(\mathbf{r}, t). \quad (5.1)$$

Вираз для функції  $\zeta(\rho, t)$  знаходимо з рівняння (5.1) на вільній поверхні, тобто маємо

$$\zeta(\rho, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\rho, \zeta_0(\rho))}{\partial \mathbf{n}}. \quad (5.2)$$

Крайова задача (3.5) зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь з використанням методу граничних елементів у його прямому формулюванні [18].

Задача визначення функцій  $\varphi_k(\mathbf{r})$  і частот  $\chi_k$  розв'язується за допомогою методів, описаних у [19,20], де не враховувалися ефекти поверхневого натягу. Відмінність запропонованого підходу полягає в тому, що  $S_0$  має ненульову кривизну.

Зобразимо невідомий потенціал швидкостей у вигляді:

$$2\pi\varphi(P_0) = \iint_S q \frac{1}{|P - P_0|} dS - \iint_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P - P_0|} dS, \quad (5.3)$$

де  $q = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$

Внаслідок зображення (5.1) необхідно знайти частинні потенціали  $\varphi_k(r, t)$ . Ці функції знаходяться з розв'язання крайової задачі (3.5). На поверхні  $S_1$  маємо наступне рівняння:

$$2\pi\varphi_k^1 + \iint_{S_1} \varphi_k^1 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS_1 - \frac{\kappa^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_k^0 \frac{1}{r} dS_0 + \iint_{S_0} \varphi_k^0 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS_0 = 0, \quad P_0 \in S_1, \quad (5.4)$$

де  $r = |P - P_0|$  – Декартова відстань між точками P та  $P_0$ .

Інтегральне рівняння на поверхні  $S_0$  має вигляд:

$$2\pi\varphi_k^1 + \iint_{S_1} \varphi_k^1 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS_1 - \frac{\kappa^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_k^0 \frac{1}{r} dS_0 + \iint_{S_0} \varphi_k^0 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS_0 = 0 \quad (5.5)$$

$$-\iint_{S_1} \varphi_k^1 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS_1 - 2\pi\varphi_k^0 + \iint_{S_0} \varphi_k^0 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS_0 = 0 \quad (5.6)$$

Щоб визначити потенціал  $\varphi_k(\mathbf{r})$ , необхідно побудувати функції  $\varphi_k^1$  – значення  $\varphi_k$  на змоченій поверхні  $S_1$  і  $\varphi_k^0$  – значення  $\varphi_k$  на вільній поверхні  $S_0$ . Для розв'язання крайової задачі (3.5) використовуємо пряме формулювання методу граничних елементів. Запишемо наступну систему сингулярних інтегральних рівнянь:

$$2\pi\varphi_k^1 + \iint_{S_1} \varphi_k^1 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS_1 - \frac{\kappa^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_k^0 \frac{1}{r} dS_0 + \iint_{S_0} \varphi_k^0 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS_0 = 0 \quad (5.7)$$

$$-\iint_{S_1} \varphi_k^1 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS_1 - 2\pi\varphi_k^0 + \frac{\kappa^2}{g} \iint_{S_0} \varphi_k^0 \frac{1}{r} dS_0 = 0$$

Припускаючи, що

$$\varphi = \varphi(r, z) \cos \alpha \theta,$$

отримуємо для кожної гармоніки співвідношення виду

$$\iint_{S_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r(P, P_0)} \right) dS_1 = \int_{\Gamma_1} \varphi(z) \Theta(z, z_0) \Gamma_1(z) d\Gamma_1; \quad (5.8)$$

$$\iint_{S_0} \varphi \left( \frac{1}{r(P, P_0)} \right) dS_0 = \int_0^R \varphi(\rho) \Phi(P, P_0) \rho d\rho. \quad (5.9)$$

$$\iint_{S_0} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r(P, P_0)} \right) dS_0 = \int_{\Gamma_0} \varphi(z) \Theta(z, z_0) r(z) d\Gamma_0 \quad (5.10)$$

Тут  $\Gamma_0$  і  $\Gamma_1$  є твірними поверхонь обертання  $S_0$  і  $S_1$  від ядра  $\Theta(z, z_0)$  і  $\Phi(P, P_0)$  і мають вигляд:

$$Q(z, z_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[ \frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_\alpha(k) - F_\alpha(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_\alpha(k) n_z \right\}; \quad (5.11)$$

$$\Phi(P, P_0) = \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_\alpha(k); E_\alpha(k) = (-1)^\alpha (1 - 4\alpha^2) \int_0^{\pi/2} \cos 2\alpha\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi; \quad (5.12)$$

$$F_\alpha(k) = (-1)^\alpha \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha\psi d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}; a = \rho^2 + \rho_0^2 + (z - z_0)^2; b = 2\rho\rho_0; k^2 = \frac{2b}{a+b}. \quad (5.13)$$

З урахуванням  $\alpha = 0$  у виразі (5.12) отримуємо стандартні еліптичні інтеграли першого і другого роду. Вирази для компонент нормалі отримані вище і мають вигляд:

$$\vec{n} = \left( \frac{1}{1/\sin \varphi_k}; \frac{\cot \varphi_k}{1/\sin \varphi_k} \right) = (\sin \varphi_k; \cos \varphi_k), \quad (5.14)$$

де  $\varphi_k$ :

$$\frac{\pi}{2} - \varphi_1 \leq \varphi_k \leq \frac{3}{2}\pi + \varphi_1, \quad (5.15)$$

$$\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} \left( 1 - \frac{2h^2}{R^2 + h^2} \right) \leq \varphi_k \leq \frac{3}{2}\pi + \cos^{-1} \left( 1 - \frac{2h^2}{R^2 + h^2} \right).$$

Таким чином,  $\varphi_k(r)$  задовольняють крайовій задачі (3.5).

Для числового розв'язання систем, описаних рівняннями (5.3), використовувався метод граничних елементів з постійною апроксимацією невідомої щільності на елементах [19-21].

## 6 Визначення частот коливань рідини в резервуарі

Підставляючи ряди (5.1), (5.2) з  $N$  складовими для потенціалу  $\varphi$  і рівня підйому висоти вільної поверхні  $\zeta$  в граничну умову (3.5), можна отримати

$$\sum_{k=1}^N \ddot{c}_k(t) \varphi_k(\mathbf{r}) + \sum_{k=1}^N c_k(t) \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\sigma}{\rho l g} \sum_{k=1}^N c_k(t) \Delta_s \left( \frac{\partial \varphi_k(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} \right) = 0. \quad (6.1)$$

Припустимо,  $c_k(t) = a_k e^{i\omega t}$  і отримаємо скалярний добуток виразу (6.1) і функцій  $\varphi_i(\mathbf{r})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Внаслідок ортогональності форм коливань маємо

$$-\omega^2 a_i + \chi_i^2 a_i - \frac{\sigma}{\rho l g} \sum_{k=1}^N a_k \chi_k^2 \frac{(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} = 0. \quad (6.2)$$

Це приводить до задачі власних значень у такому вигляді:

$$\mathbf{G}\mathbf{a} = \omega^2 \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)^T, \quad \mathbf{G}_\sigma = \left\{ \chi_k^2 \left[ \delta_{ik} - \frac{\sigma}{\rho l g} \frac{(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} \right] \right\}_{i,k=1}^N. \quad (6.3)$$

Для циліндричних і складених оболонок обертання поверхневий оператор Лапласа  $\Delta_s$  в циліндричних координатах для осесиметричних задач має вигляд  $\Delta_s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)$ . Таким чином, використовуючи інтеграцію частинами в скалярному добутку  $(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i)$  і враховуючи, що  $(\varphi_i)'_\rho \Big|_{\rho=R} = 0$ , отримаємо  $(\Delta_s \varphi_k, \varphi_i) = -((\varphi_k)'_\rho, (\varphi_i)'_\rho)$ .

Якщо розглядаються вимушені коливання рідини в резервуарі, то з (5.1) отримуємо рівняння:

$$\ddot{c}_j(t) + \omega_j^2 c_j(t) - \frac{\sigma}{\rho l g} \sum_{k=1}^N c_k \omega_k^2 \int_S (\Delta_s \varphi_j) dS = Q, \quad (6.4)$$

де  $Q$  – сила, що збуджує.

### 7 Аналіз числових результатів

Розглянуто коливання рідини в жорсткій оболонці обертання (рис. 7.1).

При  $R=1\text{м}$  та  $H=2\text{м}$ , користуючись результатами [19, 20], застосовано 180 граничних елементів вздовж меридіану оболонки та 60 граничних елементів вздовж радіусу вільної поверхні, при цьому досягається точність  $\varepsilon = 10^{-3}$  у порівнянні з аналітичним розв'язком [17]. Тому саме таке число елементів було використано при числовому моделюванні коливань рідини в циліндричній оболонці (рис. 7.1).

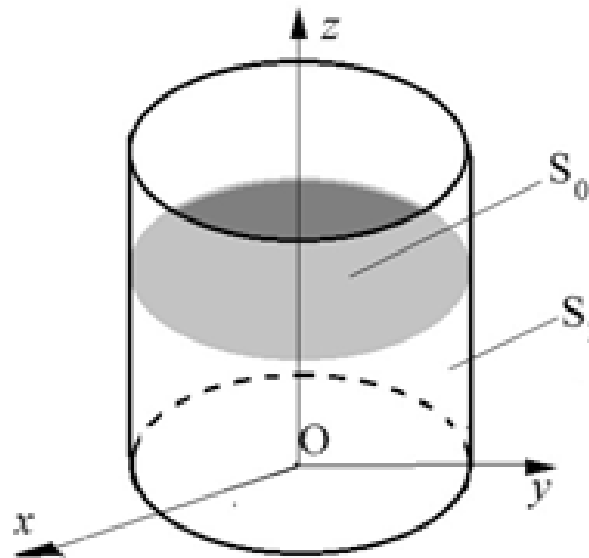


Рис. 7.1 Оболонка обертання, частково заповнена рідиною

Частоти коливань для нульової гармоніки в залежності від рівня підйому вільної поверхні наведено в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1 – Частоти коливань для нульової гармоніки

Параметри				n					
$R_1$	H	$H_1$	$\alpha,^\circ$	1	2	3	4	5	6
1	2.0	0.0	0.0	3.84	7.03	10.2	13.3	16.5	19.7
10.0	1.9975	0.0	7.12	3.82	7.00	10.1	13.3	16.4	19.6
5.05	1.990	0.1	18.4	3.71	6.86	9.99	13.1	16.2	19.4

Бачимо, що навіть незначний підйом вільної поверхні призводить до зміни частот коливань рідини у резервуарі.

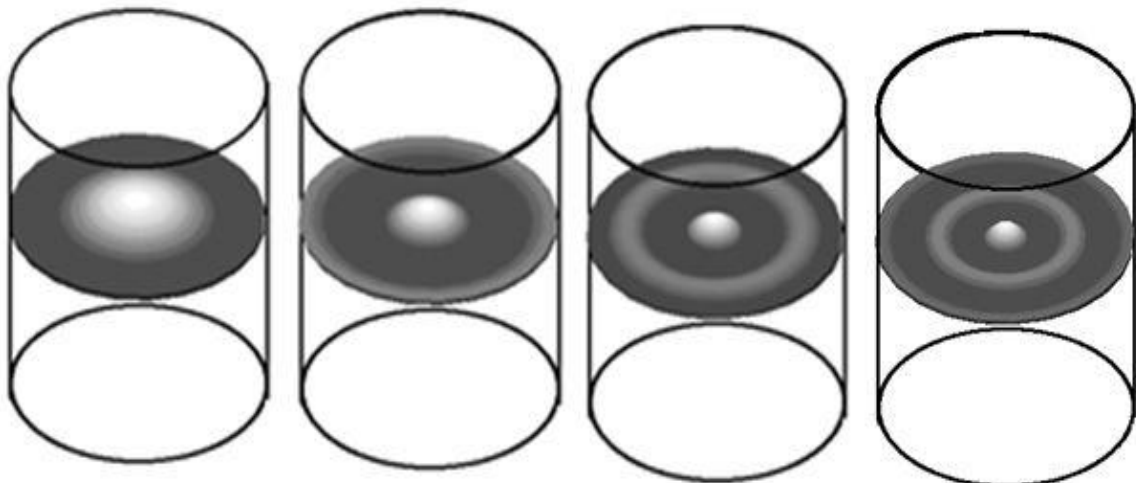


Рис. 7.2 Форми коливань вільної поверхні



На рисунку 7.2 зображені форми коливань вільної поверхні для циліндричної оболонки. Зауважимо, що форми коливань, отримані в даному дослідженні, практично співпадають з формами коливань рідини за умови пласкої вільної поверхні. Отримані форми слугуватимуть базисними функціями для розв'язання задачі знаходження частот та форм коливань оболонки з рідиною за умов низької гравітації.

### 8 Перспективи подальших досліджень

Передбачається провести дослідження вимушених коливань рідини за умов низької гравітації.

### 9 Висновки

Розроблено метод розв'язання крайової задачі для визначення коливань рідини в резервуарі за умови, що вільна поверхня рідини може мати неплоску форму. У припущенні, що рідина є нестисливою та нев'язкою, а її рух є безвихровим, побудовано інтегральне зображення невідомого потенціалу швидкостей. За допомогою цього подання отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих значень потенціалу та потоку. Цю систему розв'язано методом граничних елементів. Встановлено, що навіть незначне відхилення форми вільної поверхні від пласкої призводить до помітних змін частот коливань, проте форми коливань практично збігаються з формами коливань для пласкої вільної поверхні. Отримані форми слугуватимуть як базисна система функцій в дослідженнях власних та вимушених коливань рідини в резервуарах за умови врахування поверхневого натягу.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Луковский И. А. *Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость*. Киев: Наукова думка, 1990. 296 с.
2. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. *Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью*. Москва: Машиностроение, 1968. 532 с.
3. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. *Динамика тела с полостями, содержащими жидкость*. Москва: Наука, 1965. 439 с.
4. Motygin O.V. On trapping of surface water waves by cylindrical bodies in a channel. *Wave Motion*. 45(7-8). 2007. pp. 940–951. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2007.04.009.
5. D. Huang, W. Guo, X. Li An analytical solution of fluid–structure coupling oscillation in one-dimensional ideal condition under small disturbance. *Journal of Sound and Vibration*, 255(3). 2002. pp. 610–614. DOI:10.1006/jsvi.2002.5193.
6. Franklin T. Dodge, Luis R. Carza. Experimental and theoretical studies of liquid sloshing at simulated low gravities. *South West Research Institute, Department of Mechanical Sciences*. p.78
7. Hung R.J., Lee C.C., and Leslie F.W. Response of gravity level fluctuations on the Gravity Probe-B spacecraft propellant system. *Journal of Propulsion and Power*. no.7. 1991. pp. 556–564.
8. Hung R.J., Pan H.L. Sloshing dynamics modulated fluid angular momentum and moment fluctuations driven by orbital gravity gradient and jitter accelerations in microgravity. *Applied Scientific Research*. Volume 54, Issue 1. January 1995. pp. 51–68.
9. Hung R.J., Long Y.T., Pan H.L., Actuation of sloshing modulated force and moment on liquid container driven by jitter accelerations associated with siew motion in microgravity. *Applied Mathematics and Mechanics*. Volume 16. Issue 9. September 1995. pp. 859–876.
10. F. W. Leslie, Measurements of rotating bubble shapes in a low gravity environment. *Journal of fluid Mechanics*. no.161. 1985. pp. 269–275.
11. R. J. Hung, C. C. Lee and, F. W. Leslie, Spacecraft dynamical distribution of fluid stresses activated by gravity jitter induced slosh waves. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. no.15. 1992. pp. 817–824.
12. Hung R. J., Tsao Y. D., Hong B. B., and Leslie F. W. «Dynamical behavior of surface tension on rotating fluids in low and microgravity environments». *International Journal for Microgravity Research and Applications*. no. 11. 1989. pp. 81–95.

13. Hu WenRui, Long Mian, Kang Qi, Xie JingChang, Hou MeiYing, Zhao JianFu, Duan Li, Space experimental studies of microgravity fluid science in China. *Chinese Science Bulletin*. vol. 54, no. 22. November 2009. pp. 4035–4048.
14. Dillon Sances, Joshua Gibson, Shayna Neumann, Brenton Thompson, Sathya Gangadharan, Thomas Smith and Keith Schlee, Modeling of Free-Surface Fuel Slosh in Microgravity for Off-Axis Spacecraft Propellant Tanks. *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*. August 2009. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2009-6039>
15. Nathan Silvernail, Dillon Sances, Sathya Gangadharan and James Sudermann. Model of Spacecraft Fuel Slosh with Diaphragms in Microgravity. *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*. August 2009. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2009-6040>
16. Brandon Marsell, David Griffin, Dr. Paul Schallhorn, Jacob Roth. High Accuracy Liquid Propellant Slosh Predictions Using an Integrated CFD and Controls Analysis Interface. Conference Paper. *Thermal and Fluids Analysis Workshop 2012*. 13 Aug. 2012. Pasadena. CA; United States. January 01. 2012. Document ID: 20120010782 <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=20120010782> 2019-10-08T13:08:49+00:00Z
17. R.A. Ibrahim, *Liquid Sloshing Dynamics*. Cambridge University Press. New York. 2005.
18. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag: Berlin and New York. 1984. p. 462.
19. Еселева Е.В., Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Пробл. Машиностроения*. №1. 2006. с.105-118.
20. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*. no. 17(1). 2016. pp. 75–87.
21. Gnitko, V., Naumenko, Y., Strelnikova E. Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. no. 22 (4). 2017. pp.867–881.

#### REFERENCES

1. Lukovsky I. A. *Introduction to the nonlinear dynamics of a rigid body with cavities containing a liquid*. Kiev: Nauk.Dumka, pp.296, 1990. [in Russian]
2. Mikishev G.N., Rabinovich B.I. *Dynamics of a solid with cavities partially filled with liquid*. Moscow: Mechanical engineering, 1968. 464 p. (Rus. ed.: Mikishev G. N., Rabinovich B. I. Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkostyu. Moscow, Mashinostroenie, 1968, 532 p.). [in Russian]
3. Moiseev N.N., Rumyantsev V.V. *Body dynamics with fluid-containing cavities*. Moscow: Science, pp.439, 1965. [in Russian]
4. O.V. Motygin «On trapping of surface water waves by cylindrical bodies in a channel», *Wave Motion*, 45(7-8), pp. 940–951, 2007. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2007.04.009.
5. D. Huang, W. Guo, X. Li «An analytical solution of fluid–structure coupling oscillation in one-dimensional ideal condition under small disturbance», *Journal of Sound and Vibration*, 255(3). pp. 610–614, 2002. DOI:10.1006/jsvi.2002.5193.
6. Franklin T. Dodge, Luis R. Carza «Experimental and theoretical studies of liquid sloshing at simulated low gravities», *South West Research Institute, Department of Mechanical Sciences*, p.78
7. R.J. Hung, C.C. Lee, and F.W. Leslie, «Response of gravity level fluctuations on the Gravity Probe-B spacecraft propellant system», *Journal of Propulsion and Power*, no.7, pp.556–564, 1991.
8. R. J. Hung H. L. Pan «Sloshing dynamics modulated fluid angular momentum and moment fluctuations driven by orbital gravity gradient and jitter accelerations in microgravity», *Applied Scientific Research*, Volume 54, Issue 1, pp. 51–68, January 1995.
9. R. J. Hung, Y. T. Long, H. L. Pan, «Actuation of sloshing modulated force and moment on liquid container driven by jitter accelerations associated with siew motion in microgravity», *Applied Mathematics and Mechanics*, Volume 16, Issue 9, pp. 859–876, September 1995.
10. F. W. Leslie, «Measurements of rotating bubble shapes in a low gravity environment», *Journal of fluid Mechanics*, no.161, pp. 269–275, 1985.

11. R. J. Hung, C. C. Lee and, F. W. Leslie, «Spacecraft dynamical distribution of fluid stresses activated by gravity jitter induced slosh waves», *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, no.15, pp. 817–824, 1992.
12. R. J. Hung, Y. D. Tsao, B. B. Hong, and F. W. Leslie, «Dynamical behavior of surface tension on rotating fluids in low and microgravity environments», *International Journal for Microgravity Research and Applications*, no.11, pp. 81–95, 1989.
13. Hu WenRui, Long Mian, Kang Qi, Xie JingChang, Hou MeiYing, Zhao JianFu, Duan Li, «Space experimental studies of microgravity fluid science in China», *Chinese Science Bulletin*, vol. 54, no. 22, pp. 4035–4048, November 2009.
14. Dillon Sances, Joshua Gibson, Shayna Neumann, Brenton Thompson, Sathya Gangadharan, Thomas Smith and Keith Schlee, «Modeling of Free-Surface Fuel Slosh in Microgravity for Off-Axis Spacecraft Propellant Tanks», *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*, August 2009. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2009-6039>
15. Nathan Silvernail, Dillon Sances, Sathya Gangadharan and James Sudermann, «Model of Spacecraft Fuel Slosh with Diaphragms in Microgravity», *AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference*, August 2009. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2009-6040>
16. Brandon Marsell, David Griffin, Dr. Paul Schallhorn, Jacob Roth «High Accuracy Liquid Propellant Slosh Predictions Using an Integrated CFD and Controls Analysis Interface», Conference Paper. *Thermal and Fluids Analysis Workshop 2012*, 13 Aug. 2012; Pasadena, CA; United States. January 01, 2012. Document ID: 20120010782 <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=20120010782> 2019-10-08T13:08:49+00:00Z
17. R.A. Ibrahim, *Liquid Sloshing Dynamics*. Cambridge University Press, New York, 2005.
18. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C., *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag: Berlin and New York, p. 462, 1984.
19. Eseleva E.V., Gnitko V.I., Strelnikova E.A. «Natural oscillations of pressure vessels during interaction with a liquid», *Prob. mechanical engineering*. No. 1, pp.105-118, 2006. [in Russian]
20. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. «Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles», *Journal of Basic and Applied Research International*, no. 17(1), pp. 75-87, 2016.
21. Gnitko V., Naumemko Y., Strelnikova E. «Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles», *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, no. 22 (4), pp. 867-881, 2017.

**Мироненко Марія Леонідівна** – аспірант, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, м. Харків; тел.: (098) 931-85-19; e-mail: [mariamyronenko87@gmail.com](mailto:mariamyronenko87@gmail.com). IDORCID: 0000-0002-0266-4463.

**Myronenko Maria L.** – PhD student, National Academy of Sciences of Ukraine, A. Pidgorny Institute of mechanical engineering problems, Pozharskogo Str 2/10, Kharkiv, Ukraine, 61046; e-mail: [mariamyronenko87@gmail.com](mailto:mariamyronenko87@gmail.com); IDORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0266-4463>.

**Мироненко Марія Леонидовна** – аспірант, Інститут проблем машиностроєння ім. А.Н. Подгорного НАН України, ул. Пожарського, 2/10, г. Харків, Україна, 61046; e-mail: [mariamyronenko87@gmail.com](mailto:mariamyronenko87@gmail.com); IDORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0266-4463>.