DOI: 10.26565/2304-6201-2019-43-03

УДК 539.3

Комп'ютерне моделювання вимушених коливань елементів конструкцій, що взаємодіють з рідиною, за умови дії гармонічних, імпульсних та сейсмічних впливів

[1]К.Г. Дегтярьов, [1]Д.В. Крютченко, [2]Р.П.Москаленко, [1]Р.Г.Пальчиков
[1] Інститут проблем машинобудування НАН України ім. А.М. Підгорного
ул. Пожарского, 2/10,. Харків, 61046, Україна
[2] Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна,
майдан Свободи 4, Харків, 61022, Україна
rmphd2016@gmail.com

Розроблено метод розрахунку вимушених коливань елементів конструкцій, що взаємодіють з водним середовищем при експлуатації. Розглянуто гармонічні, імпульсні і сейсмічні зовнішні впливи. Вважається, що рідина, яка оточує конструктивний елемент, є ідеальною і нестисливою, а її рух, викликаний коливаннями елементу, що розглядається, є безвихровим. За такі умови існує потенціал швидкостей, що задовольняє рівнянню Лапласа. Для визначення тиску рідини на поверхні, що з нею контактують, використовується інтеграл Коші-Лагранжа. Знаходження потенціалу швидкостей здійснюється шляхом розв'язання крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа на розімкнутій поверхні. Як інтегральне подання для невідомого потенціалу швидкостей використаний потенціал подвійного шару. Цей потенціал задовольняє рівнянню Лапласа та умовам згасання швидкості на нескінченності. Виконання граничних умов непротікання призводить до необхідності розв'язання гіперсінгулярного інтегрального рівняння щодо перепаду тиску. Для розв'язання крайової задачі гідропружності застосований метод заданих форм. При цьому невідомі переміщення та потенціал швидкостей зображаються у вигляді рядів з невідомими коефіцієнтами. Базисними функціями в цих рядах обрані власні форми коливань елементу конструкції без урахування впливу рідини. Частоти коливань елементу конструкції в рідині обчислені з урахуванням приєднаних мас. Для аналізу вимушених коливань елементів конструкцій, що взаємодіють з рідиною, отримано систему диференційних рівнянь другого порядку відносно невідомих коефіцієнтів рядів, які залежать лише від часу. Як приклад розглянуті коливання квадратної жорстко закріпленої пластинки за дії різних зовнішніх навантажень. Проаналізовано поведінку максимальної інтенсивності напружень в залежності від параметрів навантаження. Встановлено, при яких параметрах може відбутися руйнування.

Ключові слова: *вимушені коливання, гідропружня взаємодія, метод заданих форм, гіперсингулярне інтегральне рівняння.*

Разработан метод расчета вынужденных колебаний элементов конструкций, взаимодействующих с водной средой при эксплуатации. Рассмотрены гармонические, импульсные и сейсмические внешние воздействия. Предполагается, что жидкость, окружающая конструктивный элемент, является идеальной и несжимаемой, а ее движение, вызванное колебаниями рассматриваемого элемента, является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей, который удовлетворяет уравнению Лапласа. Для определения давления жидкости на контактирующие с ней поверхности используется интеграл Коши-Лагранжа. Нахождение потенциала скоростей осуществляется путем решения краевой задачи Неймана для уравнения Лапласа на разомкнутой поверхности. В качестве интегрального представления использован потенциал двойного слоя. Такой потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа и условию затухания скорости на бесконечности. Выполнение граничных условий непротекания приводит к необходимости решения гиперсингулярного интегрального уравнения относительно перепада давления. Для решения краевой задачи гидроупругости применен метод заданных форм. При этом неизвестные перемещения и потенциал скоростей представляются в виде рядов с неизвестными коэффициентами. Как базисные функции выбирались формы колебаний элемента конструкции в воздухе, без учета влияния жидкости. Частоты колебаний в воде определялись с учетом присоединенных масс. Для исследования вынужденных колебаний получена система дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных коэффициентов рядов, зависящих только от времени. В качестве примера рассмотрены колебания квадратной жестко защемленной пластинки. Проанализировано поведение максимальной интенсивности напряжений в зависимости от параметров нагружения. Установлено, при каких параметрах может произойти разрушение.

Ключевые слова: *вынужденные колебания, гидроупругое взаимодействие, метод заданных форм, гиперсингулярное интегральное уравнение*

The method for simulating forced vibrations of structure elements, which interact with water medium during service is developed. Harmonic, impulse and seismic loadings are accounted for. It is assumed that the fluid surrounding the structure element is an ideal and incompressible one, and its movement caused by the vibrations of the element in question is vortex-free. Therefore the velocity potential that satisfies the Laplace equation exists. To determine the fluid pressure on the surfaces contacting with the liquid the Cauchy-Lagrange integral is used. The velocity potential is determined by solving the Neumann boundary value problem for the Laplace equation on an open surface. The potential of the double layer is used as an integral representation. This potential satisfies the Laplace equation and the conditions for vanishing velocity at infinity. The non-penetration condition leads to the necessity of solving the hypersingular integral equation for the pressure drop. To solve the boundary value problem of hydroelasticity the method of given forms is applied. The unknown displacements and potential are represented as series with unknown coefficients. The basic functions in these series are the modes of vibrations of the element

© Дегтярьов К.Г., Крютченко Д.В., Москаленко Р.П., Пальчиков Р.Г., 2019

without liquid. The frequencies of the structure element vibrations in fluid are evaluated taking the added masses into account. For simulating forced vibrations the system of second order differential equations relatively to the unknown time-dependent coefficients is obtained. The vibrations of a rigidly clamped square plate are examined as an example. The behavior of the maximum stress intensity is analyzed in dependence with the loading parameters. The estimations for critical values of load parameters are provided.

***Key words**: forced vibrations, fluid-structure interaction, method of given forms, hypersingular integral equation*.

1 Вступ.

Інтенсивний розвиток сучасної техніки вимагає створення нових приладів, обладнання та апаратури. Зазвичай це обладнання працює в умовах дії підвищених технологічних, температурних та інших експлуатаційних чинників. При цьому робота апаратури відбувається при взаємодії з оточуючим середовищем, рідиною або газом. Для надання надійних оцінок міцності та надійності такого обладнання слід проводити аналіз їх міцності з урахуванням явищ гідро-пружної або аеро-пружної взаємодії. До таких конструкцій відносяться посудини високого тиску [1,2], лопаті та кришки гідротурбін [3,4], паливні баки ракетоносіїв [5] та ін. Для математичного моделювання багатьох конструктивних елементів використовують тонкі пластини або оболонки. Дослідженню вільних коливань пластин при взаємодії з рідиною присвячено велику кількість наукових праць. Так, в [6-8] вивчався вплив умов закріплення на власні частоти коливань прямокутної пластинки, в [9-11] використані різні числові методи побудови матиць приєднаних мас рідини, в [9] запропоновано також експериментальний метод, в [12] досліджувались коливання плит з композитного матеріалу з урахуванням приєднаних мас рідини. Коливання пружних пластин з урахуванням дії рухомої рідини досліджені в [13-14], в [15] вважалось, що рідина здійснює пульсації. Але вивченню вимушених коливань пластин з урахуванням наявності рідини присвячено значно менша кількість наукових праць [16]. Разом з тим, ця проблема є актуальною при проектуванні гідротурбінного обладнання. Зауважимо, наприклад, що сучасні стандарти проектування ГЕС та ГАЕС [17] вимагають оцінки сейсмічної стійкості обладнання, а це, в свою чергу, веде до необхідності розрахунків вимушених коливань елементів гідротехнічних конструкцій та споруд в умовах дії імпульсних та сейсмічних впливів.

2 Загальне формулювання задачі розрахунку вимушених коливань елементів конструкцій, що занурені в рідину.

Розглядається елемент пружної конструкції, занурений у рідину, який здійснює коливання внаслідок дії деякого зовнішнього навантаження. Рівняння руху такого елементу в операторній формі має вигляд

$$M_S\ddot{\mathbf{U}} + K_S\mathbf{U} = P\mathbf{n} + F\,, \tag{2.1}$$

де **U** – вектор переміщень пружного елементу, M_S та K_S –матриці мас та жорсткості відповідно, P – перепад тиску рідини, F – сила, що збуджує, **n** – одинична нормаль до поверхні елементу.

Припустимо, що рідина є нестисливою та нев'язкою, а її рух внаслідок коливань зануреного елементу, є безвихровим. В цих умовах існує потенціал швидкостей $\mathbf{v}(x,y,z,t) = \mathrm{grad}\Phi r\,x,y,z,t)$, який задовольняє рівнянню Лапласа. На бокових поверхнях елементу мають бути виконані умови непротікання. Ці умови сформульовано як таку крайову задачу:

$$\Delta\Phi = 0, \quad \frac{\partial\Phi^{\pm}}{\partial\mathbf{n}} = \left(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{n}\right). \tag{2.2}$$

Визначення тиску рідини на поверхню зануреного елементу здійснюємо за допомогою інтегралу Коші-Лагранжа

$$P = -\rho_l\left[\frac{\partial\Phi^{+}(x,y,z,t)}{\partial t} - \frac{\partial\Phi^{-}(x,y,z,t)}{\partial t}\right], \tag{2.3}$$

де ρ_l – густина рідини. Припустимо, що розв'язок крайової задачі (2.2) знайдено. При цьому будемо мати

$$\Phi(x,y,z,t) = G\left(\dot{\mathbf{U}}\right), \tag{2.4}$$

де G – деяка, поки що невідома операторна функція. З умов (2.3) та (2.4) знайдемо

$$P(x,y,z,t) = H\ddot{\mathbf{U}}\,. \tag{2.5}$$

Підставимо подання (2.5) в рівняння руху (2.1) та отримаємо

$$M_S\ddot{\mathbf{U}} + K_S\mathbf{U} = -H\ddot{\mathbf{U}} + F \tag{2.6}$$

В рівнянні (2.6) матриця H є матрицею приєднаних мас рідини. Засіб її побудови з використанням методу граничних елементів наведено в роботах [3,4]. При цьому як інтегральне подання для невідомого потенціалу швидкостей використано гармонічний потенціал подвійного шару [18]

$$\Phi(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \Gamma(\xi,t)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\xi}\left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\xi|}\right]dS_\xi,\quad \mathbf{x}=(x,y,z),\quad \xi=(\xi,\eta,\zeta), \tag{2.7}$$

де $\Gamma(\xi,t)$ - невідома густина потенціалу, $\mathbf{n}_\xi$ є одиничним вектором нормалі до поверхні S_ξ, індекс ξ вказує на те, що інтегрування в (2.7) проводиться саме за цією змінною.

Оскільки $\Phi^+ - \Phi^- = \Gamma$, то перепад тиску є пропорційним густині потенціалу Г.

3 Метод заданих форм при визначенні вільних та вимушених коливань елементів конструкцій, що взаємодіють з рідиною.

Зобразимо вектор невідомих переміщень конструкції в рідині у вигляді [2,5]

$$\mathbf{U}(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{N} c_k(t)\mathbf{U}_k(x,y,z), \tag{3.1}$$

де $\mathbf{U}_k$ є формами вільних коливань елементу конструкції у повітрі. Згідно з (3.1) та граничної умови з (2.2) отримаємо ряд для невідомої густини $\Gamma(\xi,t)$ у такий вигляд:

$$\Gamma(\xi,t)=\sum_{k=1}^{N}\dot{c}_k(t)\Gamma_k(\xi). \tag{3.2}$$

Функції $\Gamma_k(\xi)$ визначені як розв'язки таких гіперсингулярних інтегральних рівнянь:

$$\mathbf{N}\Gamma_k=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \Gamma_k(\xi)\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_x\partial \mathbf{n}_\xi}\left[\frac{1}{|\mathbf{x}-\xi|}\right]dS_\xi=(\mathbf{U}_k,\mathbf{n}).(3. \tag{3.3}$$

Маємо далі

$$\Phi^+ - \Phi^- = \sum_{k=1}^{N}\dot{c}_k(t)\Gamma_k(\mathbf{x}). \tag{3.4}$$

З виразів (3.4), (2.3) встановлюємо, що

$$P=-\rho_l\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k(t)\Gamma_k(\mathbf{x}) \tag{3.5}$$

Підставимо розкладення (3.1), (3.5) в рівняння руху (2.1). Отримаємо, користуючись лінійністю операторів M_S та K_S,

$$\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k(t)M_S\mathbf{U}_k(\mathbf{x})+\sum_{k=1}^{N}c_k(t)K_S\mathbf{U}_k(\mathbf{x})+\rho_l\sum_{k=1}^{N}\ddot{c}_k(t)\Gamma_k(\mathbf{x})=F\ . \tag{3.6}$$

З рівняння (3.6) за умови, що $F=0$ та $\rho_l=0$ приходимо до проблеми власних значень для вільних коливань елементу конструкції в повітрі, а якщо $F=0$ та $\rho_l\neq 0$ знаходимо власні значення з урахуванням приєднаних мас рідини. Вважаючи, що $c_k(t)=C_k\exp(i\Omega t)$, з використанням умов ортогональності отримаємо

$$K_S(\mathbf{U}_k)=\omega_k^2 M_S(\mathbf{U}_k),\quad (M_S(\mathbf{U}_k),\mathbf{U}_j)=\delta_{kj}\ , \tag{3.7}$$

де ω_l - частоти власних коливань елементу конструкції у повітрі.

Після виконання скалярного добутку рівняння (3.6) на функції $\mathbf{U}_l$ визначаємо, що

$$\omega_l^2\delta_{kl}C_l-\Omega^2\left[C_l\delta_{kl}+\rho_l\sum_{k=1}^{N}C_k(\Gamma_k,\mathbf{U}_l)\right]=0\,. \tag{3.8}$$

З (3.8) знаходимо частоти (Ω) та форми (коефіцієнти C_k) вільних коливань конструкції з урахуванням приєднаних мас рідини.

Якщо в рівнянні (3.6) $F\neq 0$ та $\rho_l\neq 0$, приходимо до розв'язання задачі розрахунку вимушених коливань елементу конструкції з урахуванням приєднаних мас рідини. Після

виконання скалярного добутку рівняння (3.6) на функції $\mathbf{U}_l$ приходимо до системи звичайних диференційних рівнянь другого порядку у вигляді

$$\ddot{c}_k(t)\left[\delta_{kl}+\rho_l\sum_{k=1}^{N}(\Gamma_k,\mathbf{U}_l)\right]+\omega_k^2\delta_{kl}c_k(t)=(F,\mathbf{U}_l),\quad l=1,2,...N. \tag{3.9}$$

Для отримання однозначного розв'язку системи (3.9) необхідно сформулювати початкові умови. В подальшому обираємо нульові початкові умови, тобто вражаємо, що рух пластини в рідині почався із стану спокою.

Після розв'язання системи диференційних рівнянь (3.9) знаходимо переміщення конструктивного елементу за формулою (3.1)

4 Вимушені коливання пластинки під дією гармонічного збудження.

Розглянуті коливання квадратної пластини $[0,a]\times[0,a]$ зі стороною $a = 1$м і товщиною $h = 0.003$м, що знаходиться в рідині та піддана дії гармонічного навантаження

$$F = a_0\cos\omega_0 t. \tag{4.1}$$

Механічні характеристики пластини та рідини є такими: модуль Юнга $E=2.1\cdot10^5$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, густина пластини $\rho_1=7800$ *кг/м*^{3}, густина рідини $\rho_2=7800$ *кг/м*^{3}, границя плинності $\sigma_T = 650$ МПа.

Схематичне зображення пластини під дією зовнішнього навантаження подано на рис. 4.1 а).

Рівняння руху пластини має вигляд [19]

$$D\nabla^2\nabla^2 w+\rho_1 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=P+F,\qquad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{4.2}$$

Вважаємо, що пластина жорстко защемлена вздовж контуру. В [20] отримані такі форми коливань пластинки без урахування приєднаних мас рідини:

$$w_k(x,y)=w_{lm}(x,y)=\sin\frac{l\pi\pi}{a}\sin\frac{m\pi\pi}{b} \tag{4.3}$$

Згідно з (3.1) в цьому випадку маємо

$$w(x,y,t)=\sum_{k=1}^{N}c_k(t)w_k(x,y), \tag{4.4}$$

де власні форми коливань $w_k(x,y)$ обчислювались за формулою (4.3). Вивчено залежність максимальної інтенсивності напружень σ_i від часу при різних параметрах збудження (4.1). Інтенсивність напружень обчислювалась за формулою [19]

$$\sigma_i=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3\tau_{xy}^2}, \tag{4.5}$$

де напруження визначені таким чином:

$$\sigma_x=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\quad \sigma_y=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\quad \tau_{xy}=\frac{Eh}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}. \tag{4.6}$$

На рис. 4.1 б) зображено графік інтенсивності напружень, яка визначена за першою формою коливань пластинки без врахування приєднаних мас рідини, тобто вважалось, що $l=m=1$ в формулі (4.3). Зауважимо, що максимальне значення інтенсивність напружень приймає в точці $x_0=y_0=0.5$, і це значення при обраних механічних характеристиках дорівнює $\sigma_{i\max}=888.212$ МПа.

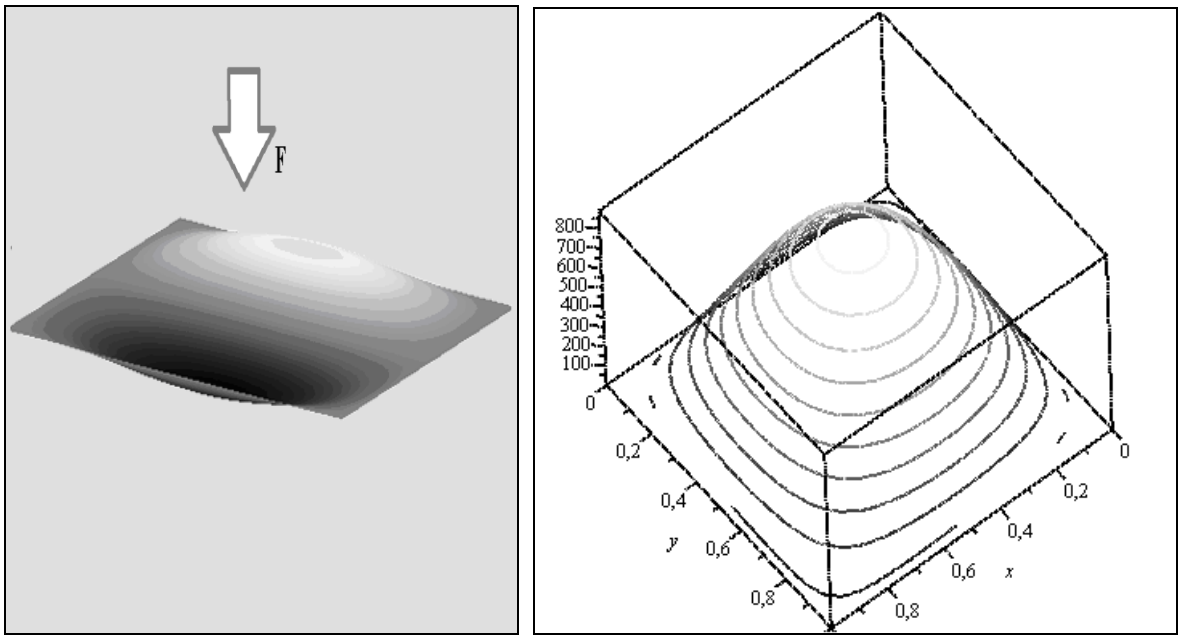
Зазначимо, що при обчисленні скалярних добутків в правій частині (3.9) с урахуванням виразів (4.3) будемо мати

$$(F,\mathbf{U}_l)=0,\quad l=2,3,4. \tag{4.6}$$

Це дозволяє в першому наближенні обмежитись лише вивченням коливань за першою формою. Цій формі коливань відповідає власна частота, яка дорівнює 12,3 Гц [20].

Розглянуто коливання пластинки під дією гармонічного збудження при різних значеннях a_0 та ω_0 в формулі (4.1).

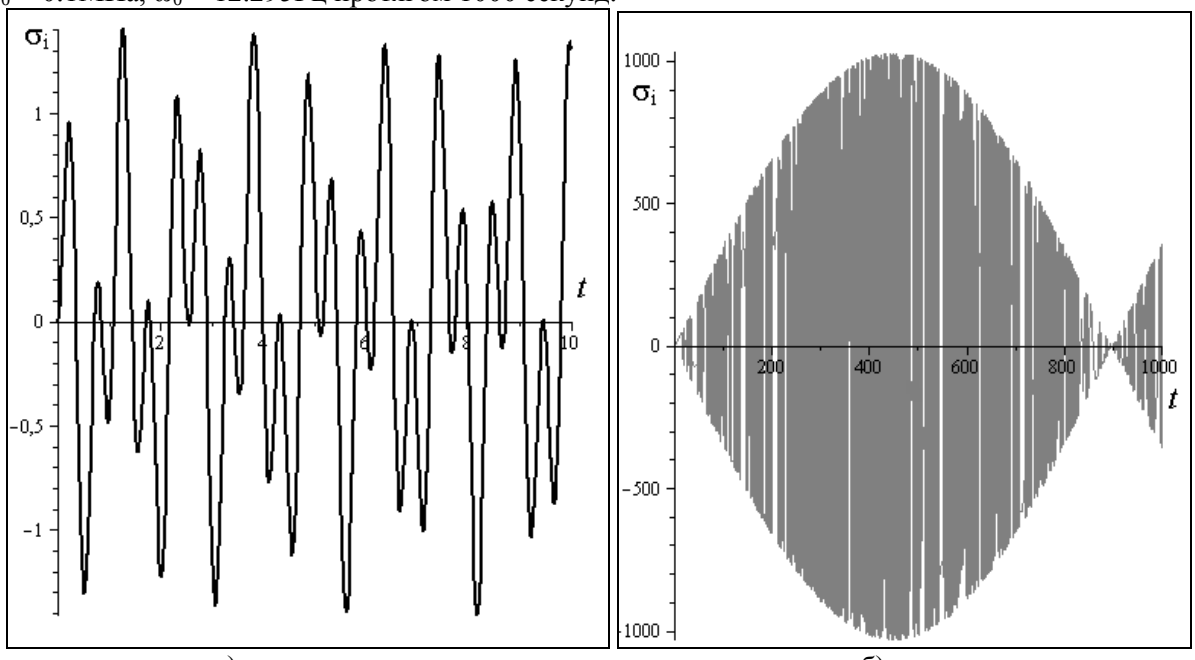
Досліджено залежність від часу максимальної інтенсивності напружень (4.5).



а) б)

Рис.4.1. Розподіл інтенсивності напружень

На рис. 4.2 а) подано залежність максимальної інтенсивності напружень від часу при $a_0 = 0.1$МПа, $\omega_0 = 3$Гц протягом 10 секунд, а на рис. 4.2 б) цю залежність побудовано при $a_0 = 0.1$МПа, $\omega_0 = 12.295$Гц протягом 1000 секунд.



а) б)

Рис.4.2 Залежність максимальної інтенсивності напружень σ_i від часу при різних частотах гармонічного навантаження

Частота $\omega_0 = 12.295$Гц є близькою до частоти власних коливань пластини з урахуванням приєднаних мас рідини, тому при дії такого навантаження спостерігається режим биття. При цьому максимальна інтенсивність напружень при зміні за часом значно перевищує границю

плинності, що може призвести до руйнування конструктивного елементу. При частотах, відокремлених від власних, спостерігаються періодичні коливання з обмеженою амплітудою. Вихід на границю плинності при таких частотах здійснюється лише при $a_0 > 50$МПа.

5 Вимушені коливання пластинки під дією імпульсного навантаження.

Розглянуто квадратну пластинку з тими ж механічними та геометричними характеристиками, що описані вище.

При цьому вважалось, що

$$F = Q_0 a(t), \tag{5.1}$$

де Q_0 є заданим розподіленим тиском,

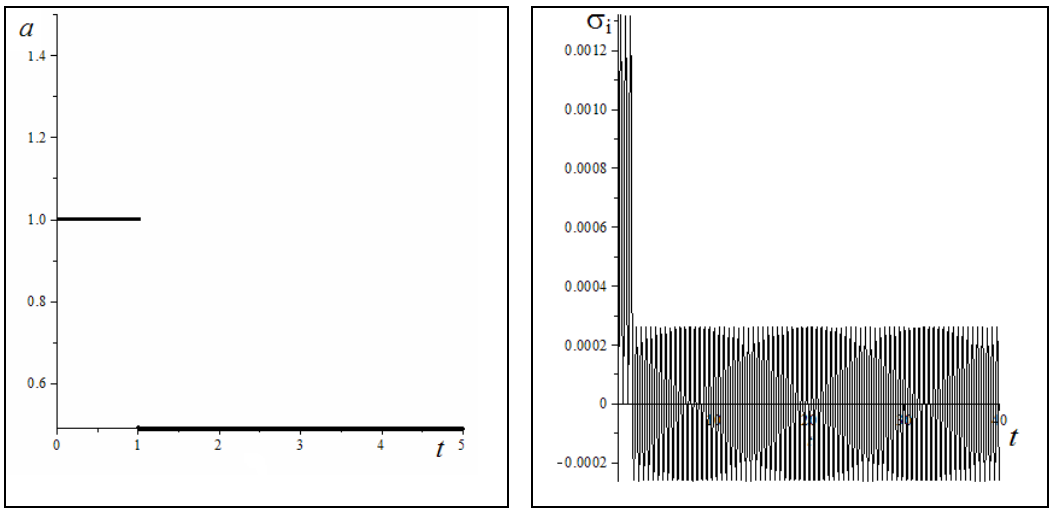
$$a(t) = \begin{cases} 1, & t < T, \\ 0, & t \geq T. \end{cases} \tag{5.2}$$

час T є періодом дії імпульсного навантаження. На рис. 5.1а) зображено схематичний вигляд навантаження (5.1), (5.2).

З використанням методики [21] отримано такий розв'язок рівнянь (3.9):

$$c_k(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega_k^2} - \dfrac{1}{\Omega_k^2}\cos(\Omega_k t) \quad 0 \leq t \leq T \\ \dfrac{1}{\Omega_k^2} - \dfrac{1}{\Omega_k^2}\cos(\chi_k t) - \dfrac{1}{\Omega_k^2} + \dfrac{1}{\Omega_k^2}\cos\Omega_k (t-T) \;\; t > T \end{cases} \tag{5.3}$$

На рис. 5.1б) подано залежність максимальної інтенсивності напружень від часу протягом 40 сек при таких параметрах навантаження: Q_0=0.1 МПа, T = 1.5сек.



а) б)

Рис.5.1. Імпульсне навантаження та залежність максимальної інтенсивності напружень σ_i від часу

В цьому випадку максимальна інтенсивність напружень є значно меншою границі плинності, тому конструктивний елемент витримує таке навантаження.

6 Вимушені коливання пластинки під дією сейсмічного навантаження.

Розглянуто коливання квадратної пластинки з геометричними та механічними характеристиками, що надані в пункті 4, під дією сейсмічного навантаження [21]. При цьому припускалось, що

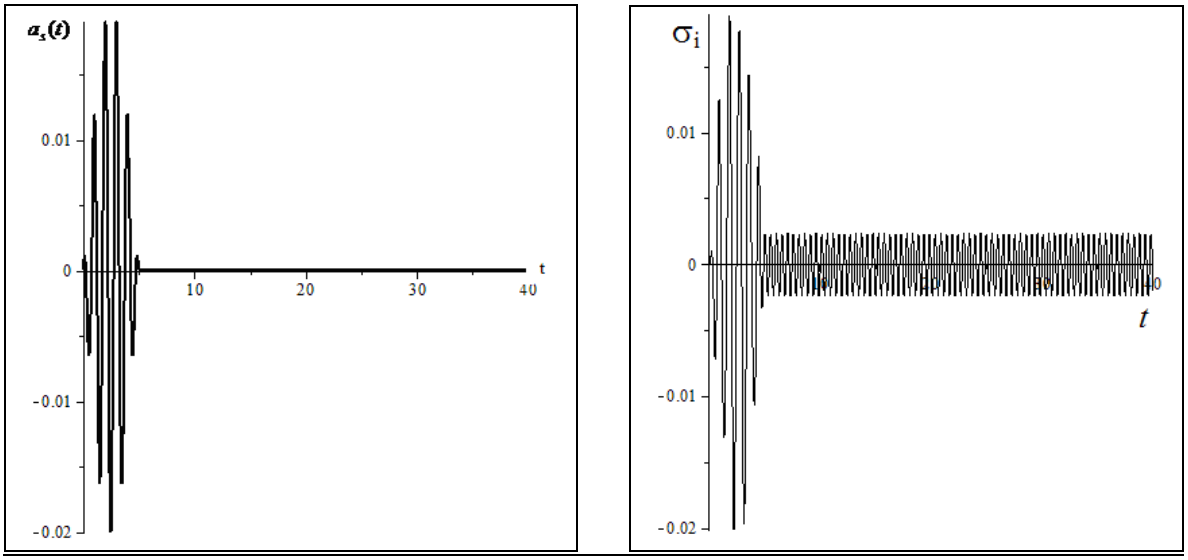
$$F = Q_0 a_S(t), \tag{6.1}$$

де Q_0 є заданим розподіленим тиском,

$$a_S(t)=\begin{cases} Q_0 \sin(12\pi t/5)\cos(2\pi t), & t<T, \\ 0, & t\geq T, \end{cases} \tag{6.2}$$

час T є періодом дії сейсмічного навантаження. На рис. 6.1а) зображено схематичний вигляд навантаження (6.1), (6.2).

Розв'язок рівнянь (3.9) отримано за методикою, описаною в [22]. На рис. 6.1б) зображено залежність максимальної інтенсивності напружень від часу при Q_0=0.02Мпа. Це навантаження відповідає дії сейсмічного навантаження силою 5 балів [23].



а) б)

Рис. 6.1 Сейсмічне навантаження та залежність максимальної інтенсивності напружень σ_i від часу

Зауважимо, що при такому землетрусі не відбувається перевищення границі плинності, тобто конструктивний елемент може витримати вказане сейсмічне навантаження.

7 Висновки.

Розроблено метод розрахунку вимушених коливань конструктивних елементів, що взаємодіють з рідиною та знаходяться в умовах дії зовнішніх гармонічних, імпульсних або сейсмічних навантажень. Метод заснований на використанні розкладень невідомих переміщень елементів конструкцій в рідині в ряди за формами коливань цих елементів без урахування приєднаних мас рідини. Розглянуто коливання квадратної пружної, жорстко закріпленої пластинки, що здійснює коливання в рідині під дією різних зовнішніх навантажень. Отримані залежності зміни максимальної інтенсивності напружень від часу для різних параметрів навантаження. Це дає можливість оцінювати міцність конструктивного елементу та здійснювати вибір параметрів навантаження таким чином, щоб забезпечити надійність функціонування елементів конструкцій при вібраціях. В подальшому передбачається поширити запропонований підхід на аналіз стійкості та міцності лопатей поворотно-лопатевих гідротурбін з урахуванням демпфування.

ЛІТЕРАТУРА

1. Еселева Е.В, Гнитько В.И., Стрельникова Е.А. Собственные колебания сосудов высокого давления при взаимодействии с жидкостью. *Проблемы машиностроения*. 2006. №1. С.105-118.
2. Gnitko, V., Naumemko, Y., Strelnikova E. Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering.* 22 (4). 2017. pp. 867-881.

3. Ганчин Е.В., Ржевская И.Е., Стрельникова Е.А. Исследование динамических характеристик лопастей рабочих колес поворотно-лопастных гидротурбин при взаимодействии с жидкостью. *Вісник Харківського національного університету*. 2009. № 847. С. 79-86.
4. Medvedovskaya T. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers / T. Medvedovskaya, E. Strelnikova, K. Medvedyeva. Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART). 2015. Vol. 1, No 1. P. 45–50. DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961.
5. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles. *Journal of Basic and Applied Research International*, 17(1). 2016. pp. 75-87.
6. Liang, C. C., Liao, C. C., Tai, Y. S. and Lai, W. H. The Free Vibration Analysis of Submerged Cantilever Plates, Ocean Engineering, 2001. Vol. 28, pp. 1225-1245.
7. L I Mogilevich, V S Popov, A A Popova and A V Christoforova. Mathematical Modeling of Hydroelastic Oscillations of the Stamp and the Plate, Resting on Pasternak Foundation IOP Conf. *Series: Journal of Physics: Conf*. Series 944 (2018). 012081.
8. Abdulkareem Abdulrazzaq Alhumdany, Muhannad Al-Waily, Mohammed Hussein Kadhim. Theoretical analysis of fundamental natural frequency with different boundary conditions of isotropic hyper composite plate. *International Journal of Energy and Environment (IJEE)*, Volume 7. Issue 3 .2016. pp. 229-240.
9. Yadykin, Y., Tenetov, V. and Levin, D. The Added Mass of a Flexible Plate Oscillating in a Flui. *Journal of Fluids and Structures*. 2003. Vol. 17. pp. 115-123
10. Rezvani, S. S., Fazeli, H., Kiasat, M. S., and Haji-Hashemi, G. Effects of Added Mass Parameter on Fluid-Structure Natural Frequencies by using Analytical, Numerical and Experimental Methods. *Amirkabir Journal of Science and Research in Mechanical Engineering (ASJR-ME)*. (2015).Vol. 47. No. 2. pp. 61-70.
11. Khorshidi, K., Effect of Hydrostatic Pressure on Vibrating Rectangular Plates Coupled with Fluid. *Scientica Iranica Transaction of Civil Engineering*.2010. Vol. 17. No. 6. pp. 415-429.
12. Kerboua Y, Lakis A A, Thomas M, Marcouiller L 2008 Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid Applied Mathematical Modelling 32(12). pp 2570-2586.
13. Kerboua, Y., and Lakis, A. A., Dynamic Belavior of Plate Subjected to Flowing Fluid, WSEAS *Transaction of Fluid Mechanics*. 2008. Vol. 3, No. 2. pp. 101-115.
14. Chang, T. P., and Liu, M. F. On the Natural Frequency of a Rectangular Isotropic Plate in Contact with Fluid. *Journal of Sound and Vibration*. 2000. Vol. 236. No. 1. pp. 547-553.
15. Mogilevich L I, Popov V S and Popova A. A. Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017. 46(1). pp 12-19.
16. Chapman C J, Sorokin S. V. The forced vibration of an elastic plate under significant fluid loading. *Journal of Sound and Vibration*. 2005 281(3) pp 719-741.
17. О.В. Кендзера. Сейсмічна небезпека і сейсмічний захист в Україні. *Український географічний журнал*. 2015. No 3. С. 9-15.
18. Стрельникова Е.А. Гиперсингулярные интегральные уравнения в двумерных краевых задачах для уравнения Лапласа и уравнений Ламе. Доп. НАН України. 2001. №3. С. 27-31.
19. Биргер И.А., Шор Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1993. 640 с.
20. Москаленко Р.П., Пальчіков Р.Г., Стрельнікова О.О. Метод гіперсингулярних інтегральних рівнянь в задачах вільних та вимушених коливань лопатей гідротурбін при взаємодії з рідиною. *Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Сер.: Математичне моделювання в техніці та технологіях*. Харків : НТУ "ХПІ", 2019. № 8 (1333). С. 144-149.
21. Krutchenko D.V., Strelnikova E.A., Shuvalova Y.S. Discrete Singularities Method in Problems of Seismic and Impulse Impacts on Reservoirs. Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems». 2017. Т. 35. № 1. С. 31-37.
22. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V. Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations. *Journal of Mathematics and Statistical Science*. 2019. V. 5. pp.31-41.
23. Оборудование атомных энергетических установок. Расчет на прочность при сейсмическом воздействии. РТМ 108.020.37-81.

REFERENCES

1. Eseleva E.V, Gnitko V.I., Strelnikova E.A., "Sobstvennyie kolebaniya sosudov vyisokogo davleniya pri vzaimodeystvii s zhidkostyu". *Problemyi mashinostroeniya*, N 1, S.105-118, 2006. [in Russian]
2. Gnitko, V., Naumemko, Y., Strelnikova E. "Low frequency sloshing analysis of cylindrical containers with flat and conical baffles". *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 22 (4), pp.867-881, 2017.
3. Ganchin E.V., Rzhevskaya I.E., Strelnikova E.A. "Issledovanie dinamicheskih harakteristik lopastej rabochih koles povorotno-lopastnyh gidroturbin pri vzaimodejstvii s zhidkostyu". *Visnik Harkivskogo nacionalnogo universitetu*, № 847, S. 79-86, 2009. [in Russian]
4. T. Medvedovskaya, E. Strelnikova, K. Medvedyeva, " Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers " . *J. Eng. and Advanced Research Technology* (IJEART),Vol. 1, No 1, P. 45–50, 2015. DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961.
5. Gnitko V., Naumenko V., Rozova L., Strelnikova E. "Multi-domain boundary element method for liquid sloshing analysis of tanks with baffles". *Journal of Basic and Applied Research International*, 17(1), pp. 75-87, 2016.
6. Liang, C. C., Liao, C. C., Tai, Y. S. and Lai, W. H., 2001, The Free Vibration Analysis of Submerged Cantilever Plates, Ocean Engineering, Vol. 28, pp. 1225-1245.
7. Rezvani, S. S., Fazeli, H., Kiasat, M. S., and Haji-Hashemi, G., "Effects of Added Mass Parameter on Fluid-Structure Natural Frequencies by using Analytical, Numerical and Experimental Methods". *Amirkabir Journal of Science and Research in Mechanical Engineering* (ASJR-ME), Vol. 47, No. 2, pp. 61-70, (2015).
8. Abdulkareem Abdulrazzaq Alhumdany, Muhannad Al-Waily, Mohammed Hussein Kadhim, "Theoretical analysis of fundamental natural frequency with different boundary conditions of isotropic hyper composite plate". *International Journal of Energy and Environment* (IJEE), Volume 7, Issue 3, pp.229-240, 2016.
9. Yadykin, Y., Tenetov, V. and Levin, D., " The Added Mass of a Flexible Plate Oscillating in a Fluid". *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 17, pp. 115-123,2003.
10. Rezvani, S. S., Fazeli, H., Kiasat, M. S., and Haji-Hashemi, G., "Effects of Added Mass Parameter on Fluid-Structure Natural Frequencies by using Analytical, Numerical and Experimental Methods". *Journal of Science and Research in Mechanical Engineering* (ASJR-ME), Vol. 47, No. 2, pp. 61-70, (2015).
11. Khorshidi K., "Effect of Hydrostatic Pressure on Vibrating Rectangular Plates Coupled with Fluid ". *Scientica Iranica Transaction of Civil Engineering*, Vol. 17, No. 6, pp. 415-429, (2010).
12. Kerboua Y, Lakis A A, Thomas M, Marcouiller L., "Vibration analysis of rectangular plates coupled with fluid ". *Applied Mathematical Modelling*, 32(12) pp 2570-2586, 2008.
13. Kerboua, Y., and Lakis, A. A., "Dynamic Belavior of Plate Subjected to Flowing Fluid." WSEAS, *Transaction of Fluid Mechanics*, Vol. 3, No. 2, pp. 101-115, (2008).
14. Chang, T. P., and Liu, M. F., "On the Natural Frequency of a Rectangular Isotropic Plate in Contact with Fluid." *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 236, No. 1, pp. 547-553, (2000).
15. Mogilevich L I, Popov V S and Popova A. A., "Interaction dynamics of pulsating viscous liquid with the walls of the conduit on an elastic foundation." *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 46(1) pp 12-19, 2017.
16. Chapman C J, Sorokin S. V., "The forced vibration of an elastic plate under significant fluid loading". *Journal of Sound and Vibration*, 281(3), pp 719-741, 2005.
17. O.V. Kendzera, "Sejsmichna nebezpeka i sejsmichnij zahist v Ukrayini". *Ukrayinskij geografichnij zhurnal*, No 3, S. 9-15, 2015. [in Ukrainian]
18. Strelnikova E.A., Gipersingulyarnye integralnye uravneniya v dvumernyh kraevyh zadachah dlya uravneniya Laplasa i uravnenij Lame. Dop. NAN Ukrayini, №3. S. 27-31, 2001. [in Russian]
19. Birger I.A., Shor B.F., Iosilevich G.B. Raschet na prochnost detalej mashin. M.: Mashinostroenie, 1993, 640 s. [in Russian]
20. R. P. Moskalenko, R. G. Palchikov, O. O. Strelnikova, "Metod gipersingulyarnih integralnih rivnyan v zadachah vilnih ta vimushenih kolivan lopatej gidroturbin pri vzayemodiyi z

ridinoyu.” *Visnik Nacionalnogo tehnichnogo universitetu "HPI". Ser.: Matematichne modelyuvannya v tehnici ta tehnologiyah*, Harkiv : NTU "HPI", № 8 (1333). S. 144-149, 2019. [in Ukrainian]
21. Krutchenko D.V., Strelnikova E.A., Shuvalova Y.S. Discrete Singularities Method in Problems of Seismic and Impulse Impacts on Reservoirs. Bulletin of V. Karazin Kharkiv National University Series «Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems», T. 35, № 1, C. 31-37, 2017.
22. Strelnikova E., Kriutchenko D., Gnitko V., “Liquid Vibrations in Cylindrical Quarter Tank Subjected to Harmonic, Impulse and Seismic Lateral Excitations”. *Journal of Mathematics and Statistical Science*, V. 5, pp.31-41, 2019.
23. Oborudovanie atomnyh energeticheskih ustanovok. Raschet na prochnost pri sejsmicheskom vozdejstvii. RTM 108.020.37-81. [in Russian]

Дегтярьов Кирило Георгійович *– провідний інженер Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України; e-mail: kdegt89@gmail.com; orcid: 0000-0002-4486-2468.*

Крютченко Денис Володимирович *– аспірант Інституту проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України, телефон: +380932886753; e-mail: wollydenis@gmail.com; orcid 0000-0002-6804-6991.*

Москаленко Роман Павлович *– аспірант Харківского національного університету імені В. Н. Каразіна, факультет комп’ютерних наук. телефон: 050 598 7682; e-mail: rmphd2016@gmail.com; orcid: 0000-0002-5167-2793.*

Пальчіков Роман Георгійович – *аспірант Інституту проблем машинобудування НАН України імені А.М. Підгорного; e-mail: 19palchikovroman@gmail.com; orcid: 0000-0003-38-06-8708.*

Дегтярев Кирилл Георгиевич *– ведущий инженер Института проблем машиностроения имени А.Н. Подгорного НАН Украины; e-mail: kdegt89@gmail.com; orcid: 0000-0002-4486-2468.*

Крютченко Денис Владимирович *– аспирант Института проблем машиностроения имени А.Н. Подгорного НАН Украины, телефон: +380932886753; e-mail: wollydenis@gmail.com; orcid 0000-0002-6804-6991.*

Москаленко Роман Павлович *– аспирант Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, факультет компьютерных наук, телефон: 050 598 7682; e-mail: rmphd2016@gmail.com. orcid: 0000-0002-5167-2793.*

Пальчиков Роман Георгиевич *– аспирант Института проблем машиностроения имени А.Н. Подгорного НАН Украины; e-mail: 19palchikovroman@gmail.com; orcid: 0000-0003-38-06-8708.*

Degtyarev Kirill *– Senior Engineer of A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems; e-mail: kdegt89@gmail.com; orcid: 0000-0002-4486-2468.*

Kriutchenko Denys *– Post-graduate of A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems, phone: +380932886753; e-mail: wollydenis@gmail.com; orcid: 0000-0002-6804-6991.*

Moskalenko Roman *– Post-graduate of Karazin National University, Scholl of Computer Sciences, phone: 050 598 7682; e-mail: rmphd2016@gmail.com; orcid: 0000-0002-5167-2793.*

Palchikov Roman – *Post-graduate, A. Podgorny Institute of Mechanical Engineering Problems, e-mail: 19palchikovroman@gmail.com; orcid: 0000-0003-38-06-8708.*

Надійшла – 02.10.2019.