

УДК 519.6

## Система комп'ютерного моделювання для числового вирішення одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса

І.В. Гарячевська, Д.О. Протектор

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи 4, м. Харків, 61022, Україна  
e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua

У статті описується система комп'ютерного моделювання, яка призначена для числового вирішення нелінійного одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса. Числове вирішення диференціального рівняння Бюргерса здійснюється за безсітковою схемою з використанням методу часткових розв'язків і радіальних базисних функцій. Дискретизація за часом одновимірного диференціального рівняння Бюргерса здійснюється з використанням  $\theta$ -схеми. В якості радіальних базисних функцій в системі комп'ютерного моделювання використовується зворотна мультіквадратична функція. Для вирішення диференціальних рівнянь в частинних похідних в системі комп'ютерного моделювання передбачено завдання початкових та крайових умов, а також завдання джерела як функції, що залежить від координат і часу. Система комп'ютерного моделювання дозволяє налаштовувати такі параметри вирішення як розмір області крайової задачі, кількість інтерполяційних вузлів, часовий інтервал на якому буде вирішуватися нестационарна крайова задача, крок за часом, параметр форми радіальної базисної функції, а також коефіцієнти в рівнянні Бюргерса. Розв'язок нелінійного одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса в системі комп'ютерного моделювання візуалізується у вигляді тривимірної поверхні. В системі комп'ютерного моделювання реалізована можливість візуалізації отриманого розв'язку на окремих проміжках часу у вигляді тривимірних графіків. Ефективність числового вирішення в системі комп'ютерного моделювання продемонстрована на прикладі двох тестових задач для яких були отримані числові розв'язки, а також порашовані середня відносна, середня абсолютна та максимальна похибки.

**Ключові слова:** нелінійне одновимірне рівняння Бюргерса, система комп'ютерного моделювання, нестационарна крайова задача, безсітковий метод, радіальні базисні функції, зворотна мультіквадратична функція.

В статье описывается система компьютерного моделирования, предназначенная для численного решения нелинейного одномерного нестационарного уравнения Бюргерса. Численное решение дифференциального уравнения Бюргерса осуществляется по бессеточной схеме с использованием метода частных решений и радиальных базисных функций. Дискретизация по времени одномерного дифференциального уравнения Бюргерса осуществляется с использованием  $\theta$ -схемы. В качестве радиальных базисных функций в системе компьютерного моделирования используется обратная мультіквадратичная функция. Для решения дифференциальных уравнений в частных производных в системе компьютерного моделирования предусмотрено задание начальных и граничных условий, а также задание источника как функции, зависящей от координат и времени. Система компьютерного моделирования позволяет настраивать такие параметры решения как размер области краевой задачи, количество интерполяционных узлов, временной интервал на котором будет решаться нестационарная краевая задача, шаг по времени, параметр формы радиальной базисной функции, а также коэффициенты в уравнении Бюргерса. Решение нелинейного одномерного нестационарного уравнения Бюргерса в системе компьютерного моделирования визуализируется в виде трехмерной поверхности. В системе компьютерного моделирования реализована возможность визуализации полученного решения на отдельных промежутках времени в виде трехмерных графиков. Эффективность численного решения в системе компьютерного моделирования продемонстрирована на примере двух тестовых задач для которых были получены численные решения, а также посчитаны средняя относительная, средняя абсолютная и максимальная погрешности.

**Ключевые слова:** нелинейное одномерное уравнение Бюргерса, система компьютерного моделирования, нестационарная краевая задача, бессеточный метод, радиальные базисные функции, обратная мультіквадратичная функция.

The computer modeling system for numerical solution of the nonlinear one-dimensional non-stationary Burgers' equation is described. The numerical solution of the Burgers' equation is obtained by a meshless scheme using the method of partial solutions and radial basis functions. Time discretization of the one-dimensional Burgers' equation is obtained by the generalized trapezoidal method ( $\theta$ -scheme). The inverse multiquadric function is used as radial basis functions in the computer modeling system. The computer modeling system allows setting the initial conditions as a coordinate-dependent function, boundary conditions as a coordinate- and time-dependent function and setting the source function as a coordinate- and time-dependent function for solving partial differential equation. A computer modeling system allows setting such parameters as the domain of the boundary-value problem, number of interpolation nodes, the time interval of non-stationary boundary-value problem, the time step size, the shape parameter of the radial basis function, and coefficients in the Burgers' equation. The solution of the nonlinear one-dimensional non-stationary Burgers' equation is visualized as a three-dimensional surface plot in the computer modeling system. The computer modeling system allows visualizing the solution of the boundary-value problem at chosen time steps as three-dimensional plots. The computational effectiveness of the computer modeling system is demonstrated by solving two benchmark problems. For solved benchmark problems, the average relative error, the average absolute error, and the maximum error have been calculated.

**Keywords:** nonlinear one-dimensional Burgers' equation, computer modeling system, non-stationary boundary-value problem, meshless method, radial basis functions, inverse multiquadric function.

## 1 Вступ

У даній статті розглядається система комп'ютерного моделювання (СКМ), яка призначена для числового вирішення одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса за безсітковою схемою. Рівняння Бюргерса було розв'язано аналітично тільки для кінцевого числа початкових та крайових умов [1, 2]. Бентон і Платцман [3] отримали близько 35 різних точних розв'язків одновимірного рівняння Бюргерса. Тому для отримання розв'язку рівняння Бюргерса з довільними початковими та крайовими умовами використовуються різні числові методи. Найбільш популярними серед них є метод скінченних різниць, метод скінченних елементів і спектральні методи. Огляди цих методів наведені в роботах [4, 5]. Однак згадані вище числові методи вимагають побудови інтерполяційної сітки всередині області крайової задачі, що розглядається. Генерація сітки, як і раніше, залишається найбільш трудомісткою частиною будь-якого числового моделювання заснованого на використанні сіткових методів.

Щоб уникнути труднощів пов'язаних з побудовою інтерполяційної сітки, протягом останніх двох десятиліть дослідниками активно розробляються різні безсіткові схеми. Огляди з безсіткових методів представлені в статтях [6, 9]. Безсіткові методи є простими в реалізації та обчислювально ефективними. Безсіткові схеми успішно застосовуються для моделювання водної поверхні, повітряних мас, хвильових процесів, високошвидкісного зіткнення, течії рідини, задач теплопровідності та інше. Однак, в даний час, все ще відсутні системи комп'ютерного моделювання, засновані на використанні безсіткових схем, для числового вирішення одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса.

Метою дослідження є розробка та програмна реалізація системи комп'ютерного моделювання, яка призначена для числового вирішення одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса за безсітковою схемою з використанням радіальних базисних функцій.

## 2 Ітераційна схема

Розглянемо нелінійне одновимірне нестационарне рівняння Бюргерса в обмеженій області:

$$\mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \varepsilon u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T] \quad (2.1)$$

де  $\mu, \varepsilon$  – відомі коефіцієнти,  $\nu = \frac{1}{R}$  – кінематична в'язкість,  $R$  – число Рейнольдса,  $f(x,t)$  – функція джерела.

Початкові умови задаються у вигляді:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [a, b] \quad (2.2)$$

Крайові умови Діріхле мають вигляд:

$$\begin{cases} u(a,t) = g_1(t) \\ u(b,t) = g_2(t) \end{cases}, \quad t \in [0, T] \quad (2.3)$$

Застосовуючи  $\theta$ -схему для дискретизації за часом, отримуємо:

$$u(x,t) \approx \theta u^{n+1} + (1-\theta) u^n \quad (2.4)$$

$$f(x,t) \approx \theta f^{n+1} + (1-\theta) f^n \quad (2.5)$$

де  $u^n = u(x, t^n)$ ,  $f^n = f(x, t^n)$ ,  $t^n = n\tau$ ,  $n$  – крок ітерації,  $\tau$  – часовий інтервал,  $0 \leq \theta \leq 1$  – ваговий коефіцієнт.

Тоді

$$\Delta u(x,t) \approx \theta \Delta u^{n+1} + (1-\theta) \Delta u^n \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \quad (2.7)$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .

Підставимо рівняння (2.4) - (2.7) в рівняння (2.1):

$$\mu \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \theta \left[ v \Delta u^{n+1} - \varepsilon u^{n+1} \nabla u^{n+1} + f^{n+1} \right] + (1 - \theta) \left[ v \Delta u^n - \varepsilon u^n \nabla u^n + f^n \right] \quad (2.8)$$

де  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$ .

Перепишемо рівняння (2.8) наступним чином:

$$\mu u^{n+1} - \theta \tau \left[ v \Delta u^{n+1} - \varepsilon u^{n+1} \nabla u^{n+1} + f^{n+1} \right] = \mu u^n - (1 - \theta) \tau \left[ v \Delta u^n - \varepsilon u^n \nabla u^n + f^n \right] \quad (2.9)$$

Тоді

$$\Delta u^{n+1} = \frac{\mu}{\theta \tau v} u^{n+1} + \frac{\varepsilon}{v} u^{n+1} \nabla u^{n+1} - \frac{1}{v} f^{n+1} - \frac{\mu}{\theta \tau v} u^n - \frac{(1 - \theta)}{\theta v} \left[ v \Delta u^n - \varepsilon u^n \nabla u^n + f^n \right] \quad (2.10)$$

Припустимо, що  $u^{n+1}(x)$  – розв’язок даного диференціального рівняння. Представимо праву частину рівняння (2.10) як функцію  $F(x)$ . Це означає, що рівняння (2.10) є диференціальним рівнянням Пуассона:

$$\Delta u^{n+1} = F(x) \quad (2.11)$$

Отже, якщо функція  $F(x)$  відома, то рівняння (2.10) еквівалентно рівнянню Пуассона (2.11) при тих самих крайових умовах.

Рівномірно оберемо  $N - 2$  точки колокації  $\{x_k\}_2^{N-1}$  всередині області  $(a, b)$  і дві точки на границі області  $x_1 = a$  та  $x_N = b$ .  $F(x)$  апроксимується радіальними базисними функціями  $\varphi_j(x) = \varphi(r_j)$  наступним чином:

$$F(x) \approx \sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi_j(x) \quad (2.12)$$

де  $r_j = \left\| (x - x_j)^2 \right\|$  – евклідова відстань між вузлами.

Тоді  $u^{n+1}(x)$  апроксимується як:

$$u^{n+1}(x) \approx \sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \Phi_j(x) \quad (2.13)$$

де  $\Phi_j(x)$  – розв’язок рівняння

$$\Delta \Phi_j(x) = \varphi_j(x) \quad (2.14)$$

У даній роботі, в якості радіальних базисних функцій, використовується зворотна мультіквадратична функція

$$\varphi(r_j) = \frac{1}{\sqrt{(r_j^2 + c^2)^3}} \quad (2.15)$$

де  $c \neq 0$  – параметр форми, що обирається довільно.

Тоді  $\Phi_j(x)$  матиме вигляд:

$$\Phi(r_j) = \frac{1}{c^2} \sqrt{r_j^2 + c^2} \quad (2.16)$$

Рівняння (2.10) являє собою рекурсивну формулу. Отже, дане диференціальне рівняння можна вирішувати крок за кроком, починаючи з початкових умов (2.2).

Вважаючи  $\theta = 1$ , рівняння (2.10) запишеться у вигляді:

$$u^{n+1} - \frac{\tau}{\mu} \left[ v \Delta u^{n+1} - \varepsilon u^{n+1} \nabla u^{n+1} \right] = u^n + \frac{\tau}{\mu} f^{n+1} \quad (2.17)$$

Нелінійний член  $u^{n+1} \nabla u^{n+1}$  лінеаризується наступним чином:

$$u^{n+1}\nabla u^{n+1} = u^{n+1}\nabla u^n + u^n\nabla u^{n+1} - u^n\nabla u^n \quad (2.18)$$

Підставимо рівняння (2.18) в рівняння (2.17):

$$u^{n+1} - \frac{\tau}{\mu} \left[ v\Delta u^{n+1} - \varepsilon u^{n+1}\nabla u^n - \varepsilon u^n\nabla u^{n+1} \right] = u^n + \frac{\tau\varepsilon}{\mu} u^n\nabla u^n + \frac{\tau}{\mu} f^{n+1} \quad (2.19)$$

Запишемо рівняння (2.13) разом з крайовими умовами (2.3) в матричній формі:

$$[u]^n = A[\alpha]^n \quad (2.20)$$

де  $[u]^n = [u_1^n, u_2^n, \dots, u_N^n]^T$ ,  $[\alpha]^n = [\alpha_1^n, \alpha_2^n, \dots, \alpha_N^n]^T$  та  $A = [\Phi(r_{kj})]$ ,  $1 \leq k, j \leq N$ .

Матриця  $A$  може бути поділена наступним чином:

$$A = A_d + A_b \quad (2.21)$$

де

$$A_d = \begin{cases} \Phi(r_{kj}), & \text{якщо } 2 \leq k \leq N-1, 1 \leq j \leq N \\ 0, & \text{інакше} \end{cases} \quad (2.22)$$

$$A_b = \begin{cases} \Phi(r_{kj}), & \text{якщо } k=1, N, 1 \leq j \leq N \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

Застосовуючи співвідношення (2.21) до точок всередині області та до точок на границі області, рівняння (2.19) переписуться в наступній матричній формі:

$$\left\{ A_d - \frac{\tau v}{\mu} \Delta A_d + \frac{\tau \varepsilon}{\mu} \left[ \text{diag} \left( A_d [\alpha]^n \right) \nabla A_d + \text{diag} \left( \nabla A_d [\alpha]^n \right) A_d \right] + A_b \right\} [\alpha]^{n+1} =$$

$$= A_d [\alpha]^n + \frac{\tau \varepsilon}{\mu} \left( A_d [\alpha]^n \right) .* \left( \nabla A_d [\alpha]^n \right) + [F]^{n+1} \quad (2.23)$$

де  $\text{diag} \left( A_d [\alpha]^n \right)$  – діагональна матриця з елементами  $A_d [\alpha]^n$  на головній діагоналі,

$[F]^{n+1} = \left[ g_1^{n+1}, \frac{\tau}{\mu} f_2^{n+1}, \dots, \frac{\tau}{\mu} f_{N-1}^{n+1}, g_2^{n+1} \right]^T$ , “.\*” означає покомпонентний добуток двох векторів.

Описана ітераційна схема була взята за основу розробленої системи комп’ютерного моделювання.

### 3 Опис системи комп’ютерного моделювання

Інтерфейс системи комп’ютерного моделювання для числового вирішення одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса представлений на рис. 1.

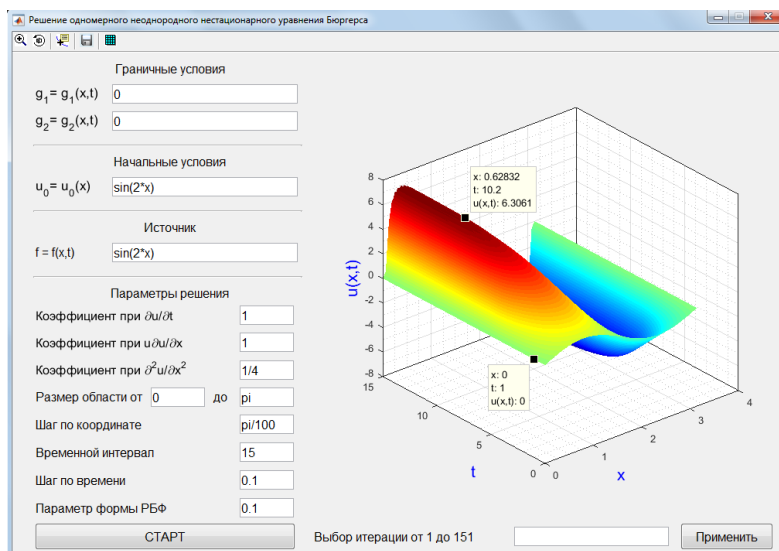


Рис. 1 Інтерфейс системи комп’ютерного моделювання

У верхній частині програми розміщується панель інструментів, зображена на рис. 2.

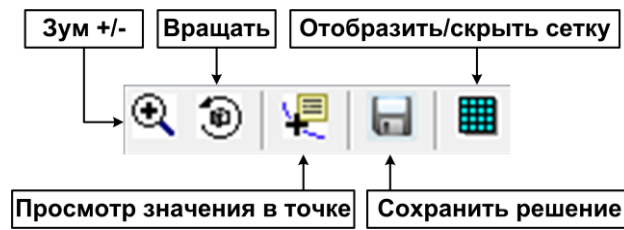


Рис. 2 Панель інструментів

На панелі інструментів розташовуються кнопки, які дозволяють змінювати масштаб координатних осей та здійснювати їх оберт на довільний кут, відображати числове значення розв'язку в обраній точці, зберігати отриманий розв'язок у вигляді растрового зображення, а також відображати та приховувати сітку на тривимірній поверхні.

Для вирішення диференціальних рівнянь в частинних похідних, необхідно задати значення початкових та крайових умов. У СКМ передбачено завдання крайових умов в числовому вигляді або як функції, що залежить від координат і часу. Система комп'ютерного моделювання дозволяє задавати як числові початкові умови, так і у вигляді функції, що залежить від координат. У СКМ функція джерела може бути задана в наступному вигляді  $f = f(x, t)$ .

Система дозволяє налаштовувати такі параметри вирішення як розмір області, кількість інтерполяційних вузлів, часовий інтервал, крок за часом, параметр форми радіальної базисної функції, а також коефіцієнти в рівнянні Бюргерса.

Розв'язок одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса в СКМ візуалізується у вигляді тривимірної поверхні (див. рис. 1). В системі реалізована можливість візуалізації розв'язку на окремих проміжках часу у вигляді тривимірних графіків (рис. 3).

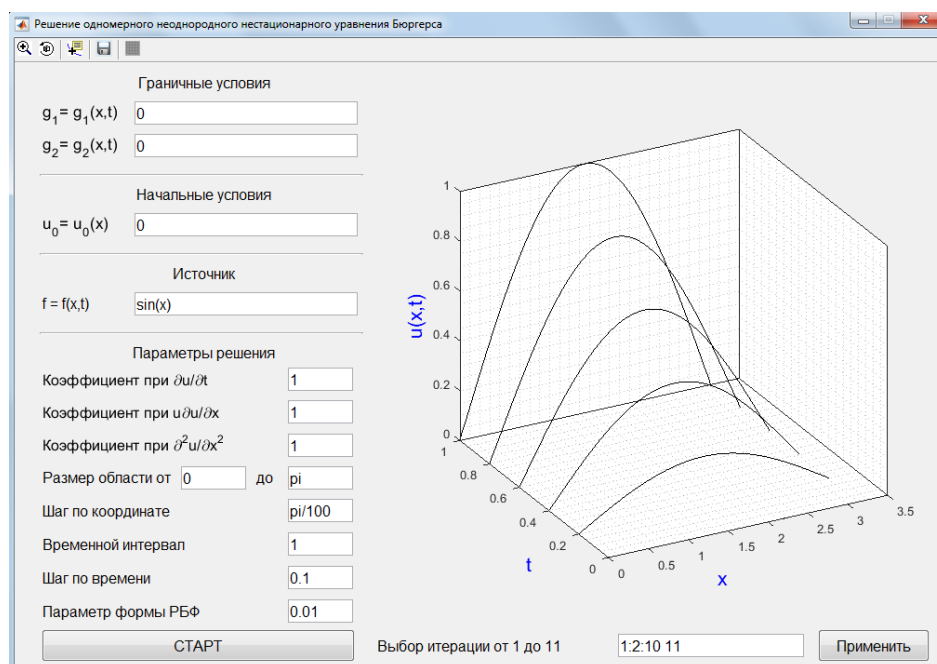


Рис. 3 Візуалізація розв'язку на окремих проміжках часу

#### 4 Числові результати

В цьому розділі ілюструється застосування розробленої системи комп'ютерного моделювання на прикладі двох тестових задач і оцінюється точність отриманих розв'язків.

Для оцінки точності апроксимації використовуються середня відносна похибка  $\text{err}(u)$ , середня абсолютна похибка  $\text{aerr}(u)$  і максимальна похибка  $\text{merr}(u)$ , які обчислюються за формулами:

$$\text{rerr}(u) = \sqrt{\frac{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (u_j - \tilde{u}_j)^2}{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (u_j)^2}} \quad (4.1)$$

$$\text{aerr}(u) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (u_j - \tilde{u}_j)^2} \quad (4.2)$$

$$\text{merr}(u) = \max_j |u_j - \tilde{u}_j| \quad (4.3)$$

де  $u_j$  та  $\tilde{u}_j$  є відповідно аналітичними та числовими розв'язками в вузлах  $x_j \in [a, b]$ , а  $L$  – загальна кількість інтерполяційних вузлів.

#### Задача №1

Розглянемо нелінійне одновимірне нестационарне рівняння Бюргерса:

$$\mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \varepsilon u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \sin(2x) e^{-2t\nu} \quad (4.4)$$

де  $x \in [0, 2\pi]$ ,  $d_x = \pi/10$ ,  $t \in [0, 2]$ ,  $\tau = 0.1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\nu = 0.0001$ ,  $c = 5.45$ .

Початкові умови:

$$u(x,0) = \cos(x) \quad (4.5)$$

Крайові умови:

$$u(x,t) = u(x + 2\pi, t) \quad (4.6)$$

Аналітичний розв'язок задано у вигляді:

$$u(x,t) = \cos(x) e^{-t\nu} \quad (4.7)$$

На рис. 4 представлена візуалізація наближеного розв'язку нестационарного рівняння Бюргерса, отриманого з використанням СКМ.

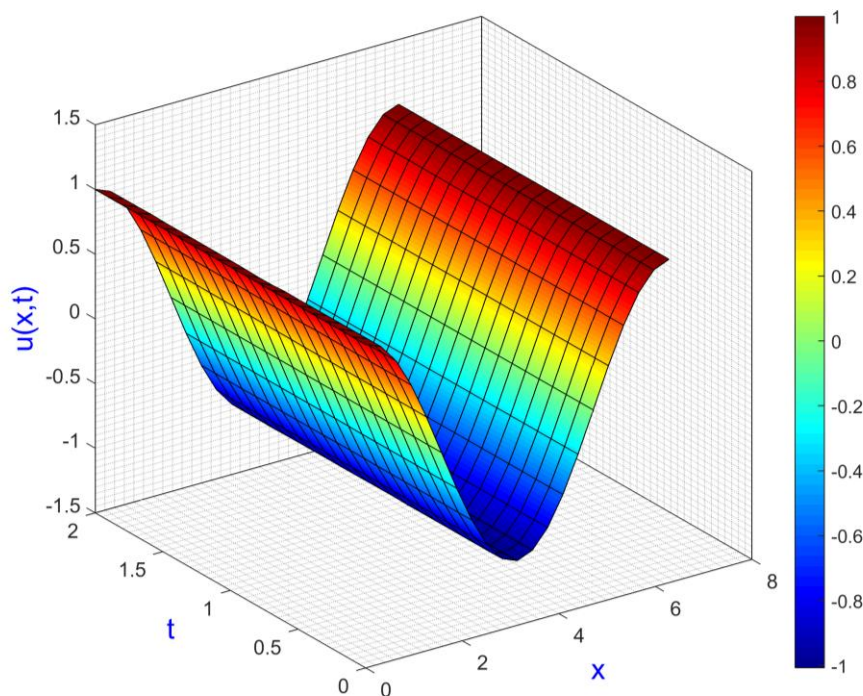


Рис. 4 Візуалізація наближеного розв'язку

В Таблиці 1 наведені похибки розв'язку Задачі №1 в різні проміжки часу.

Таблиця 1. Похибки розв'язку Задачі №1

$t$	$\text{regr}(u)$	$\text{aerr}(u)$	$\text{merr}(u)$
0.5	$3.9309 \times 10^{-4}$	$1.3036 \times 10^{-3}$	$2.6162 \times 10^{-3}$
1	$5.9474 \times 10^{-4}$	$1.9723 \times 10^{-3}$	$3.3835 \times 10^{-3}$
1.5	$6.5737 \times 10^{-4}$	$2.1799 \times 10^{-3}$	$4.2149 \times 10^{-3}$
2	$8.6270 \times 10^{-4}$	$2.8606 \times 10^{-3}$	$5.1334 \times 10^{-3}$

### Задача №2

Розглянемо нелінійне одновимірне нестационарне рівняння Бюргерса:

$$\mu \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \varepsilon u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.8)$$

де  $x \in [0, 1]$ ,  $d_x = 0.01$ ,  $t \in [0, 0.001]$ ,  $\tau = 0.0001$ ,  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\nu = 0.5$ ,  $c = 0.01$ .

Початкові умови:

$$u(x,0) = \frac{2\nu\pi \sin(\pi x)}{2 + \cos(\pi x)} \quad (4.9)$$

Крайові умови:

$$u(0,t) = 0 \quad (4.10)$$

$$u(1,t) = 0 \quad (4.11)$$

Аналітичний розв'язок задано у вигляді:

$$u(x,t) = \frac{2\nu\pi e^{-\pi^2\nu t} \sin(\pi x)}{2 + e^{-\pi^2\nu t} \cos(\pi x)} \quad (4.12)$$

На рис. 5 представлена візуалізація наближеного розв'язку нестационарного рівняння Бюргерса, отриманого з використанням СКМ.

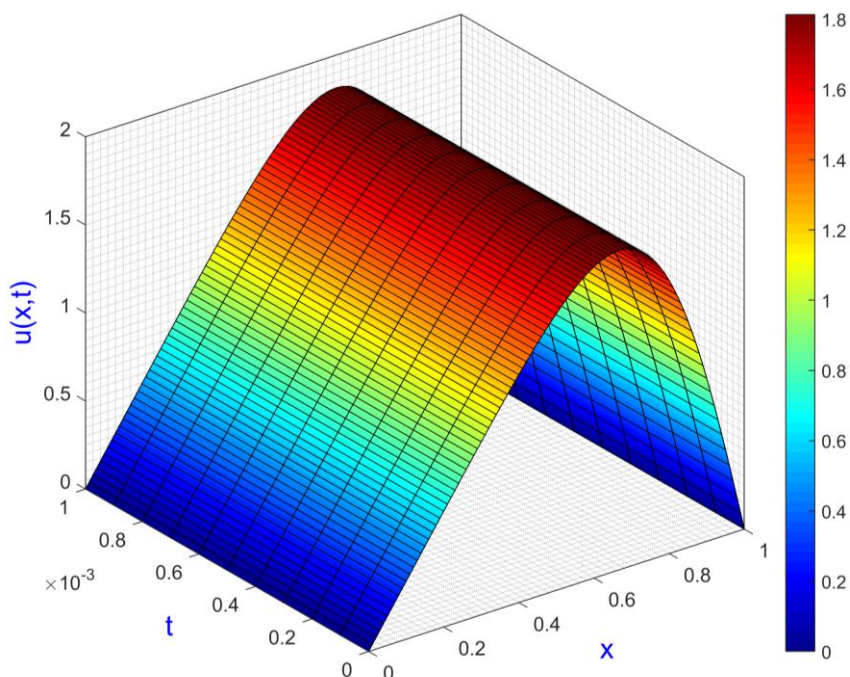


Рис. 5 Візуалізація наближеного розв'язку



В Таблиці 2 наведені похибки розв'язку Задачі №2 в різні проміжки часу.

Таблиця 2. Похибки розв'язку Задачі №2

$t$	$\text{regr}(u)$	$\text{aerr}(u)$	$\text{merr}(u)$
0.0001	$6.3164 \times 10^{-5}$	$7.8001 \times 10^{-4}$	$1.3082 \times 10^{-3}$
0.0002	$1.2635 \times 10^{-4}$	$1.5593 \times 10^{-3}$	$2.6150 \times 10^{-3}$
0.0003	$1.8955 \times 10^{-4}$	$2.3379 \times 10^{-3}$	$3.9205 \times 10^{-3}$
0.0004	$2.5278 \times 10^{-4}$	$3.1158 \times 10^{-3}$	$5.2245 \times 10^{-3}$
0.0005	$3.1602 \times 10^{-4}$	$3.8930 \times 10^{-3}$	$6.5272 \times 10^{-3}$
0.0006	$3.7929 \times 10^{-4}$	$4.6695 \times 10^{-3}$	$7.8285 \times 10^{-3}$
0.0007	$4.4258 \times 10^{-4}$	$5.4453 \times 10^{-3}$	$9.1284 \times 10^{-3}$
0.0008	$5.0589 \times 10^{-4}$	$6.2204 \times 10^{-3}$	$1.0426 \times 10^{-2}$
0.0009	$5.6922 \times 10^{-4}$	$6.9948 \times 10^{-3}$	$1.1724 \times 10^{-2}$
0.001	$6.3257 \times 10^{-4}$	$7.7686 \times 10^{-3}$	$1.3019 \times 10^{-2}$

## 5 Висновки

Розроблена та програмно реалізована система комп'ютерного моделювання для числового вирішення нелінійного одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса. Числове вирішення диференціального рівняння Бюргерса здійснюється за безсітковою схемою з використанням методу часткових розв'язків і радіальних базисних функцій. Ефективність числового вирішення в СКМ продемонстрована на прикладі двох тестових задач для яких були отримані наближені розв'язки, а також пораховані середня відносна, середня абсолютна та максимальна похибки.

Варто відзначити, що зворотна мультіквадратична функція, яка використовується в СКМ для апроксимації, містить параметр форми, який впливає як на точність отриманого розв'язку, так і на обумовленість системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Оптимальні параметри форми в Задачі №1 і в Задачі №2 для всіх розрахунків були знайдені експериментально. Вибір оптимальних параметрів форми РБФ все ще залишається невирішеним питанням.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Cole J. D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1951. Vol. 9. P. 225–236. doi: <https://doi.org/10.1090/qam/42889>.
2. Hopf E. The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ . *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 1950. Vol. 3. P. 201–230. doi: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160030302>.
3. Benton E. R., Platzman G. W. A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1972. Vol. 30. P. 195–212. doi: <https://doi.org/10.1090/qam/306736>.
4. Hassanien I. A., Salama A. A., Hosham H. A. Fourthorder finite difference method for solving Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*. 2005. Vol. 170, Issue 2. P. 781–800. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.12.052>.
5. Kutluay S., Esen A., Dag I. Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2004. Vol. 167, Issue 1. P. 21–33. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.09.043>.
6. Belytschko T., Lu Y. Y., Gu L. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1994. Vol. 37, Issue 2. P. 229–256. doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620370205>.
7. Belytschko T., Rongauz Y., Organ D. Meshless methods: An overview and recently developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1996. Vol. 139. P. 3–47. doi: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01078-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01078-X).
8. Протектор Д. О., Лисин Д. А., Лисина О. Ю. Численный анализ решений двумерных задач теплопроводности по бессеточной схеме с использованием фундаментальных и общих решений. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2019. Т. 2, № 1. С. 98–111. doi: <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-8>.
9. Xie H., Zhou J., Jiang Z. Approximations for Burgers' equations with C-N scheme and RBF collocation methods. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*. 2016. Vol. 9, Issue 6. P. 3727–3734. doi: <http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.06.23>.



## REFERENCES

1. J. D. Cole, "On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics". *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 9, pp. 225-236, 1951. doi: <https://doi.org/10.1090/qam/42889>.
2. E. Hopf, "The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ ". *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 3, pp. 201-230, 1950. doi: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160030302>.
3. E. R. Benton and G. W. Platzman, "A table of solutions of the one-dimensional Burgers equation". *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 30, pp. 195-212, 1972. doi: <https://doi.org/10.1090/qam/306736>.
4. A. Hassanien, A. A. Salama, and H. A. Hosham, "Fourthorder finite difference method for solving Burgers' equation". *Applied Mathematics and Computation*, vol. 170, no. 2, pp. 781-800, 2005. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.12.052>.
5. S. Kutluay, A. Esen, and I. Dag, "Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 167, no. 1, pp. 21-33, 2004. doi: <https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.09.043>.
6. T. Belytschko, Y. Y. Lu and L. Gu "Element-free Galerkin methods". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, no. 2, pp. 229-256, 1994. doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620370205>.
7. T. Belytschko, Y. Rongauz and D. Organ "Meshless methods: An overview and recently developments". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 3-47, 1996. doi: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01078-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01078-X).
8. D. O. Protektor, D. A. Lisin and O. Yu. Lisina "Numerical analysis of solutions of two-dimensional heat conduction problems by meshless approach using fundamental and general solutions". *Applied Questions of Mathematical Modelling*, vol. 2, no. 1, pp. 98-111, 2019. doi: <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-8>. [in Russian]
9. H. Xie, J. Zhou and Z. Jiang "Approximations for Burgers' equations with C-N scheme and RBF collocation methods". *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, vol. 9, no. 6, pp. 3727-3734, 2016. doi: <http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.06.23>.

**Гарячевська Ірина Василівна** – кандидат технічних наук, доцент; директор навчально-наукового інституту комп'ютерної фізики та енергетики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: [i.garyachevskaya@karazin.ua](mailto:i.garyachevskaya@karazin.ua); ORCID: 0000-0002-4630-9519.

**Протектор Денис Олегович** – аспірант; навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики, Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, Харків-22, Україна, 61022; e-mail: [d.protector@karazin.ua](mailto:d.protector@karazin.ua); ORCID: 0000-0003-3323-7058.

**Garyachevskaya Irina V.** PhD, Associate Professor, Director of the Education and Research Institute Computer Physics and Energy V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine; e-mail: [i.garyachevskaya@karazin.ua](mailto:i.garyachevskaya@karazin.ua); ORCID: 0000-0002-4630-9519.

**Protektor Denys O.** Postgraduate student of the Education and Research Institute Computer Physics and Energy V. N. Karazin Kharkiv National University, Svobody Sq 4, 61022, Kharkiv, Ukraine; e-mail: [d.protector@karazin.ua](mailto:d.protector@karazin.ua); ORCID: 0000-0003-3323-7058.

**Гарячевская Ирина Васильевна** – кандидат технических наук, доцент; директор учебно-научного института компьютерной физики и энергетики, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: [i.garyachevskaya@karazin.ua](mailto:i.garyachevskaya@karazin.ua); ORCID: 0000-0002-4630-9519.

**Протектор Денис Олегович** – аспирант; учебно-научный институт компьютерной физики и энергетики, Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, площадь Свободы, 4, Харьков-22, Украина, 61022; e-mail: [d.protector@karazin.ua](mailto:d.protector@karazin.ua); ORCID: 0000-0003-3323-7058.