УДК 519.63:517.958

Математическое моделирование задач обтекания в цилиндрической системе координат

С. Н. Ламтюгова, М. В. Сидоров
Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина

В статье рассматривается стационарная задача обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью. Для линеаризованной (по Озеену) задачи обтекания предлагается численный метод решения, основанный на совместном использовании методов R-функций и Галеркина, для нелинейной – методов R-функций, последовательных приближений и Галеркина. Вычислительный эксперимент проведен для задачи обтекания кругового и эллиптического цилиндров для различных чисел Рейнольдса.

Ключевые слова: *вязкая жидкость, задача обтекания, линеаризация Озеена, метод R-функций, метод последовательных приближений, метод Галеркина.*

В статті розглядається стаціонарна задача обтікання циліндричного тіла в'язкою нестисливою рідиною. Для лінеаризованої (за Озеєном) задачі обтікання пропонується чисельний метод розв'язання, заснований на сумісному використанні методів R-функцій і Гальоркіна, для нелінійної – методів R-функцій, послідовних наближень і Гальоркіна. Обчислювальний експеримент проведено для задачі обтікання кругового і еліптичного циліндрів для різних чисел Рейнольда.

Ключові слова: *в'язка рідина, задача обтікання, лінеаризація Озеєна, метод R-функцій, метод послідовних наближень, метод Гальоркіна.*

In the paper we consider the stationary viscous incompressible fluid flow past the cylindrical body. We propose for the linearized (by Oseen) flow problem a numerical solution method, based on the joint use the R-functions method and the Galerkin method, and for the nonlinear flow problem – on the joint use the R-functions method, the successive approximations method and the Galerkin method. Computational experiment conducted for the task of flow past circular and elliptic cylinders for different Reynolds numbers.

Key words: *viscous fluid, flow problem, the Oseen linearization, the R-functions method, the successive approximations method, the Galerkin metod.*

1. Введение

Математическое моделирование и численный анализ в последнее время все активнее используются при изучении динамики вязкой жидкости. Необходимость моделировать вязкие течения возникает, например, в гидроаэродинамике, теплоэнергетике, химической кинетике, биомедицине и т.д. Описывающие их уравнения Навье-Стокса [1-3] имеют существенные особенности – нелинейность и наличие малого параметра при старшей производной (величина обратная числу Рейнольдса). Кроме того, их часто приходится решать в областях сложной геометрии, которая к тому же может быть неограниченной. В большинстве случаев при численном решении задач обтекания условия на бесконечности сносятся на некоторый контур, расположенный достаточно далеко от обтекаемого тела, что приводит к дополнительным погрешностям в приближенном решении.

Существует обширный класс течений, в которых можно пренебречь нелинейными членами и получить линейную задачу. Полное пренебрежение инерционными членами приводит к так называемым уравнениям ползущего течения или уравнениям Стокса [4-6]. Однако для задачи обтекания цилиндрического тела безграничной вязкой несжимаемой жидкостью не существует решения уравнений Стокса (парадокс Стокса) [4, 5, 7]. В этом случае пользуются приближением Озеена [4, 7, 8].

Точно учесть геометрию области, а также краевые условия, можно, воспользовавшись конструктивным аппаратом теории R-функций акад. НАН Украины В. Л. Рвачева [9]. Метод R-функций в задачах гидродинамики использовался Колосовой С. В., Суворовой И. Г., Максименко-Шейко К. В., Сидоровым М. В., но рассматривались задачи расчета течений идеальной жидкости [10], вязкой в ограниченных областях [11-13] или вязкой при наличии винтовой симметрии [14]. Задачи внешнего обтекания тел вязкой жидкостью с использованием метода R-функций не рассматривались, хотя они составляют важный класс прикладных задач. Поэтому разработка новых, а также совершенствование существующих методов математического моделирования внешних стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости методом R-функций является актуальной научной проблемой.

В данной работе рассматривается применение методов R-функций, последовательных приближений и Галеркина для математического моделирования линейной (линеаризация Озеена) и нелинейной стационарных задач обтекания цилиндрического тела вязкой несжимаемой жидкостью.

Настоящая работа распространяет результаты, полученные в [15], на случай вязкой несжимаемой жидкости и опирается на конструктивный аппарат теории R-функций акад. НАН Украины В. Л. Рвачева [9].

2. Постановка задачи

Задача 1. Рассмотрим задачу медленного обтекания равномерным потоком вязкой несжимаемой жидкости со скоростью U_∞ цилиндрического тела, сечением которого является конечная область Ω с кусочно-непрерывной границей $\partial\Omega$ [4, 8]:

$$\nu\Delta^2\psi + A(\Delta\psi) = 0 \text{ вне } \overline{\Omega}, \tag{2.1}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0\,,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0\,, \tag{2.2}$$

$$\psi \sim U_\infty\,\rho\sin\varphi \text{ при } \rho\to\infty\,, \tag{2.3}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$, $\Delta^2\psi = \Delta(\Delta\psi)$, $A\zeta = -\cos\varphi\dfrac{\partial\zeta}{\partial\rho} + \dfrac{\sin\varphi}{\rho}\dfrac{\partial\zeta}{\partial\varphi}$, $\nu = \mathrm{Re}^{-1}$, Re – число Рейнольдса, $\psi = \psi(\rho,\varphi)$ – функция тока, связанная с компонентами вектора скорости соотношениями $v_\rho = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial\psi}{\partial\varphi}$, $v_\varphi = -\dfrac{\partial\psi}{\partial\rho}$, $v_z = 0$, $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Задача 2. Рассмотрим нелинейную стационарную задачу обтекания цилиндрического тела потоком вязкой несжимаемой жидкости [16]:

$$\nu\Delta^2\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial(\Delta\psi)}{\partial\varphi} \text{ вне } \overline{\Omega}. \qquad (2.4)$$

Уравнение (2.4) дополняется краевыми условиями (2.2) и условием на бесконечности (2.3).

3. Метод решения задач 1 и 2

Для решения задач 1 и 2 предлагается использовать метод R-функций акад. НАН Украины В. Л. Рвачева [9].

Пусть вне $\overline{\Omega}$ известна достаточно гладкая функция $\omega(\rho,\varphi)$, обладающая следующими свойствами:

$$1)\ \omega(\rho,\varphi) > 0 \text{ вне } \overline{\Omega};$$
$$2)\ \omega(\rho,\varphi)\big|_{\partial\Omega} = 0; \qquad (3.1)$$
$$3)\ \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = -1,$$

где $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Введем в рассмотрение достаточно гладкую функцию $y = f_M(x)$ из [15], которая удовлетворяет условиям:

$$\text{а) } f_M(0) = 0; \quad \text{б) } f_M'(0) = 1;$$
$$\text{в) } f_M'(0) \ge 0\ \forall x \ge 0; \qquad (3.2)$$
$$\text{г) } f_M(x) \equiv 1\ \forall x \ge M\ (M = const > 0).$$

Условиям (3.2) удовлетворяет, например, функция [15]:

$$f_M(x) = \begin{cases} 1 - \exp\dfrac{Mx}{x-M}, 0 \le x < M; \\ 1, \qquad x \ge M. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Очевидно, $f_M(x) \in C^\infty[0,\infty)$. Обозначим $\omega_M(\rho,\varphi) = f_M[\omega(\rho,\varphi)]$.

Легко проверить, что функция $\omega_M(\rho,\varphi)$ удовлетворяет условиям 1) – 3) из (3.1). Кроме того, $\omega_M(\rho,\varphi) \equiv 1$, если $\omega(\rho,\varphi) \ge M$.

Заметим, что это условие означает, что если функция $\omega(\rho,\varphi)$ монотонно возрастает при удалении от $\partial\Omega$, то функция $\omega_M(\rho,\varphi)$ отлична от единицы лишь в некоторой кольцеобразной области $\{0 \le \omega(\rho,\varphi) < M\}$, которая содержится во внешности $\overline{\Omega}$ и прилегает к $\partial\Omega$.

Нами доказана следующая теорема [6].

Теорема. При любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1 \cdot \rho^{-1} \to 0$ при $\rho \to +\infty$) краевым условиям (2.2) и условию на бесконечности (2.3) точно удовлетворяет функция вида

$$\psi = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2(1 - \omega_M)\Phi_2, \qquad (3.4)$$

где $\psi_0 = U_\infty(\rho - R^2 \cdot \rho^{-1})\sin\varphi$ – решение задачи об обтекании идеальной жидкостью кругового цилиндра радиуса R (считаем, что цилиндр радиуса R целиком лежит внутри обтекаемого тела), $\omega_M = f_M(\omega)$, $f_M(\omega)$ имеет вид (3.3), а ω – функция, обладающая свойствами (3.1).

Задача 1. Для аппроксимации неопределенных компонент Φ_1 и Φ_2 воспользуемся проекционным методом Галеркина [17]. Функции Φ_1 и Φ_2 представим в виде

$$\Phi_1 \approx \Phi_1^{m_1} = \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k\,,\quad \Phi_2 \approx \Phi_2^{m_2} = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j\,, \tag{3.5}$$

где $\{\varphi_k(\rho,\varphi)\} = \left\{\rho^{2-k} \begin{matrix}\cos k\varphi \\ \sin k\varphi\end{matrix}, k = 3,4,...; \rho^{-k} \begin{matrix}\cos k\varphi \\ \sin k\varphi\end{matrix}, k = 1,2,...\right\}$ – полная система частных решений уравнения $\Delta^2\psi = 0$ относительно внешности цилиндра конечного радиуса; $\{\tau_j(\rho,\varphi)\} = \left\{\cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \rho^{j+2} \begin{matrix}\cos j\varphi \\ \sin j\varphi\end{matrix}, \rho^j \begin{matrix}\cos j\varphi \\ \sin j\varphi\end{matrix}, j = 1,2,...\right\}$ – полная система частных решений уравнения $\Delta^2\psi = 0$ относительно области $\{\omega(\rho,\varphi) < M\}$.

Таким образом, приближенное решение нашей задачи ищем в виде

$$\psi \approx \psi_N = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1^{m_1}) + \omega_M^2(1 - \omega_M)\Phi_2^{m_2}\,. \tag{3.6}$$

Зададимся полной относительно всей плоскости последовательностью функций

$$\{f_i(\rho,\varphi)\} = \left\{\omega_M^2(\rho,\varphi)\rho^{2-k} \begin{matrix}\cos k\varphi \\ \sin k\varphi\end{matrix}, k = 3,4,...; \omega_M^2(\rho,\varphi)\rho^{-k} \begin{matrix}\cos k\varphi \\ \sin k\varphi\end{matrix}, k = 1,2,...; \right.$$
$$\left. \omega_M^2(\rho,\varphi) \begin{matrix}\cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi\end{matrix}, \omega_M^2(\rho,\varphi)\rho^{j+2} \begin{matrix}\cos j\varphi \\ \sin j\varphi\end{matrix}, \omega_M^2(\rho,\varphi)\rho^j \begin{matrix}\cos j\varphi \\ \sin j\varphi\end{matrix}, j = 1,2,...\right\}. \tag{3.7}$$

Значения коэффициентов α_k $(k = 1,2,...,m_1)$ и β_j $(j = 1,2,...,m_2)$ в соответствии с методом Галеркина найдем из условия ортогональности невязки $R_n = \nu\Delta^2\psi_n + A(\Delta\psi_n)$ первым N $(N = m_1 + m_2)$ элементам последовательности (3.7)

$$(R_N, f_i) = 0\,,\ i = 1, 2, ..., N\,, \tag{3.8}$$

причем в силу свойств функции ω_M и координатных функций интегрирование в (3.8) при вычислении скалярных произведений можно производить только по конечной области $\{0 \le \omega(\rho,\varphi) < M\}$.

Задача 2. Задача (2.4), (2.2), (2.3) была решена методом последовательных приближений. В качестве начального приближения $\psi^{(0)}$ было взято приближенное решение соответствующей линейной задачи Озеена. Если приближение $\psi^{(p)}$ известно, то следующее приближение $\psi^{(p+1)}$ находим как решение линейной задачи

$$\nu\Delta^2\psi^{(p+1)} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi^{(p)}}{\partial\varphi}\frac{\partial\Delta\psi^{(p)}}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi^{(p)}}{\partial\rho}\frac{\partial\Delta\psi^{(p)}}{\partial\varphi} \text{ вне } \overline{\Omega},$$

$$\psi^{(p+1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi^{(p+1)}}{\partial\mathbf{n}}\Bigg|_{\partial\Omega} = 0, \quad \psi^{(p+1)} \sim U_\infty\rho\sin\varphi \text{ при } \rho\to\infty, \ p = 0,1,2,...$$

На каждом шаге итерационного процесса приближенное решение ищем в виде функции $\psi^{(p+1)} = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1^{(p+1)}) + \omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2^{(p+1)}$, которая при любом выборе достаточно гладких функций $\Phi_1^{(p+1)}$ и $\Phi_2^{(p+1)}$ ($\Phi_1^{(p+1)}\cdot\rho^{-1}\to 0$ при $\rho\to+\infty$) точно удовлетворяет краевым условиям (2.2) и условию на бесконечности (2.3). Для аппроксимации неопределенных компонент $\Phi_1^{(p+1)}$ и $\Phi_2^{(p+1)}$ используем проекционный метод Галеркина [17]. Функции $\Phi_1^{(p+1)}$ и $\Phi_2^{(p+1)}$ аппроксимируются выражениями вида (3.5). В результате решения полученной системы линейных уравнений получаем новое приближение. Итерации следует прекратить, когда $\left\|\psi^{(p+1)} - \psi^{(p)}\right\| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – малое число.

Можно доказать сходимость итерационного процесса при малых числах Рейнольдса. Вычислительный эксперимент показал, что итерационный процесс расходится при $\mathrm{Re} > 10$.

При $\mathrm{Re} > 10$ предлагается использовать нелинейный метод Галеркина. Приближенное решение задачи (2.4), (2.2), (2.3) ищем в виде (3.6), где Φ_1 и Φ_2 имеют вид (3.5). Коэффициенты α_k и β_j найдем из условия ортогональности невязки Q_N элементам f_1, ..., f_N проекционной последовательности (3.7):

$$(Q_N,\ f_i) = 0,\ i = \overline{1,\ N},\ N = m_1 + m_2, \tag{3.9}$$

где $Q_N = \nu\Delta^2\psi_N - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_N}{\partial\varphi}\frac{\partial(\Delta\psi_N)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi_N}{\partial\rho}\frac{\partial(\Delta\psi_N)}{\partial\varphi}$, причем в силу свойств функции ω_M и координатных функций интегрирование в (3.9) при вычислении скалярных произведений можно производить только по конечной области $\{0 \le \omega(\rho,\varphi) < M\}$.

В результате получим систему нелинейных уравнений, каждое из которых представляет собой квадратичную функцию относительно α_k и β_j. Полученная система решается методом Ньютона. В качестве начального приближения выбирается набор α_k и β_j, соответствующий решению задачи Озеена, или, при больших числах Рейнольдса, решению, полученному при меньших числах Рейнольдса.

4. Вычислительный эксперимент

Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания кругового цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ при $U_\infty = 1$, $R = 1$, $m_1 = 8$, $m_2 = 14$, $\mathrm{Re} = 0,01;\ 5;\ 10;\ 15$ и эллиптического цилиндра $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ при $U_\infty = 1$, $a = 2$, $b = 1$, $m_1 = 12$, $m_2 = 18$, $\mathrm{Re} = 0,01;\ 10;\ 20;\ 30$.

На рис. 1 – 4 представлены линии уровня функции тока полученного приближенного решения для задачи обтекания кругового цилиндра.

Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей за круговым цилиндром представлены на рис. 5 – 8.

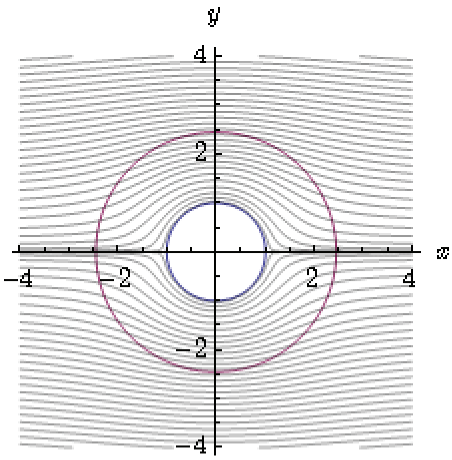

Рис. 1. Линии уровня функции тока при $\mathrm{Re} = 0,01$

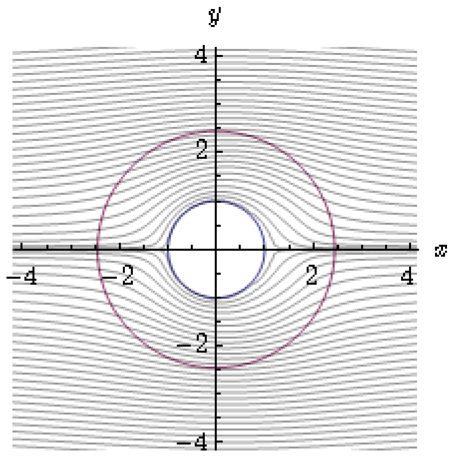

Рис. 2. Линии уровня функции тока при $\mathrm{Re} = 5$

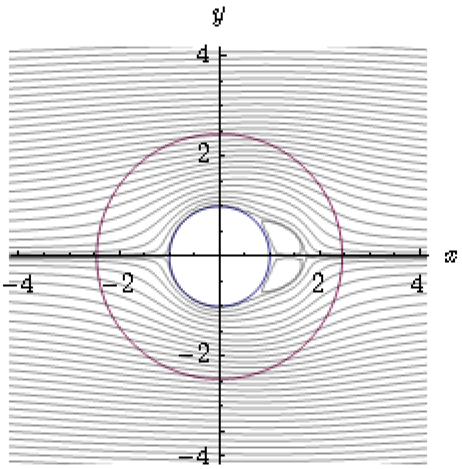

Рис. 3. Линии уровня функции тока при $\mathrm{Re} = 10$

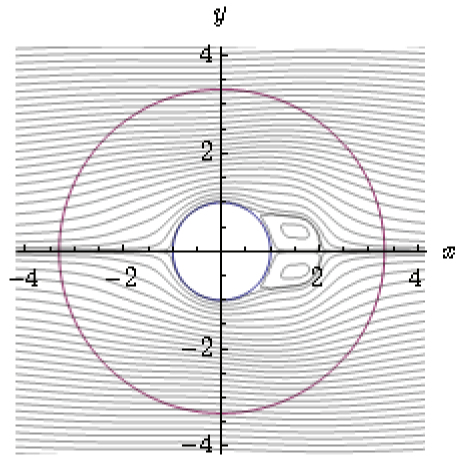

Рис. 4. Линии уровня функции тока при $\mathrm{Re} = 15$

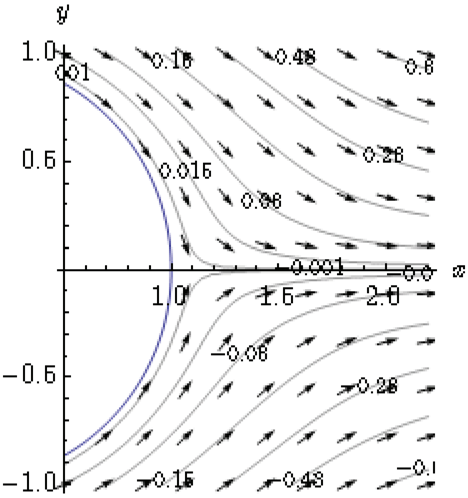

Рис. 5. Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей при $\mathrm{Re} = 0{,}01$

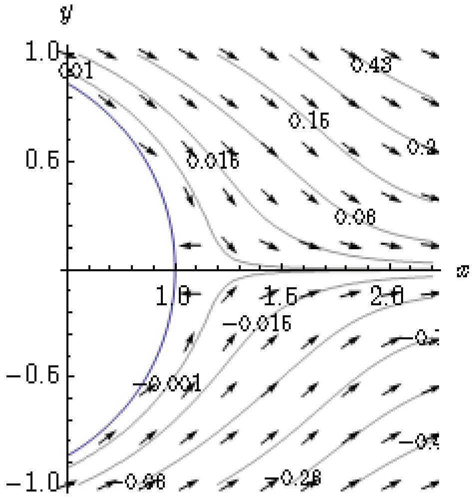

Рис. 6. Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей при $\mathrm{Re} = 5$

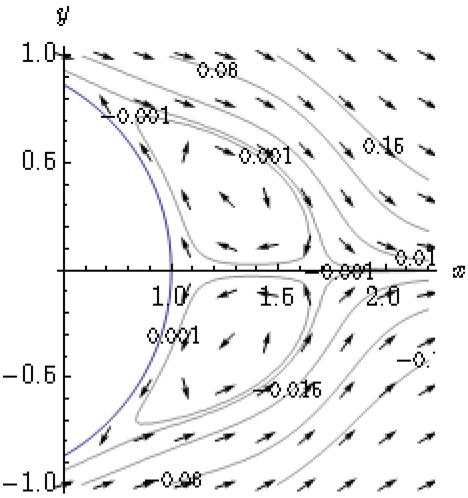

Рис. 7. Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей при $\mathrm{Re} = 10$

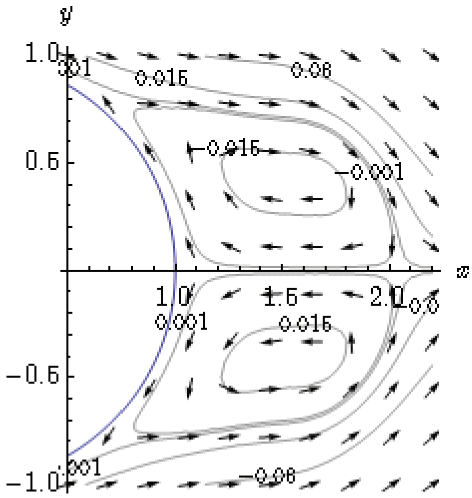

Рис. 8. Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей при $\mathrm{Re} = 15$

На рис. 9 – 12 представлены линии уровня функции тока полученного приближенного решения для задачи обтекания эллиптического цилиндра.

Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей за эллиптическим цилиндром представлены на рис. 13 – 16.

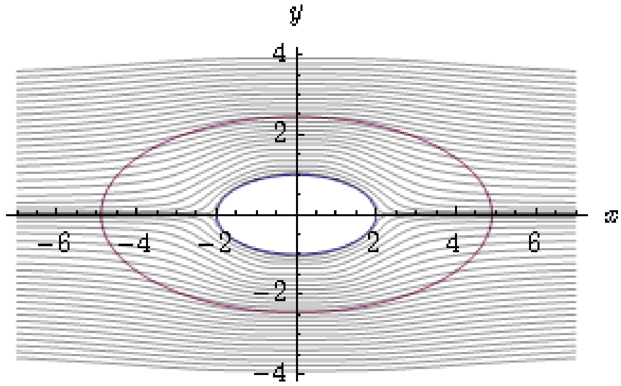

Рис. 9. Линии уровня функции тока при $\mathrm{Re} = 0{,}01$

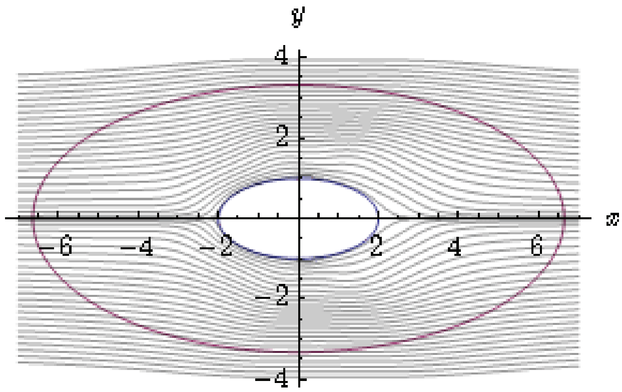

Рис. 10. Линии уровня функции тока при $\mathrm{Re} = 10$

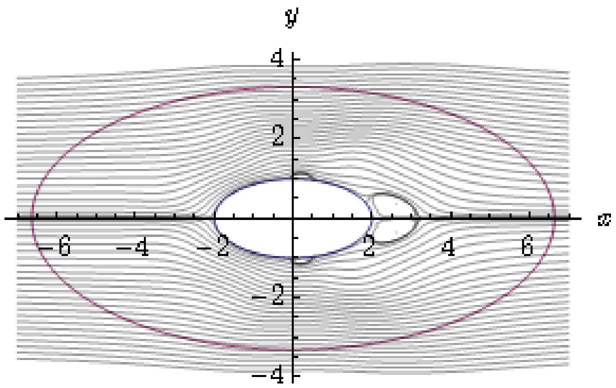

Рис. 11. Линии уровня функции тока при $\mathrm{Re} = 20$

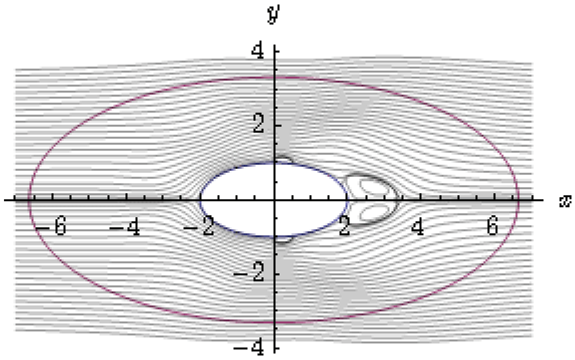

Рис. 12. Линии уровня функции тока при $\mathrm{Re} = 30$

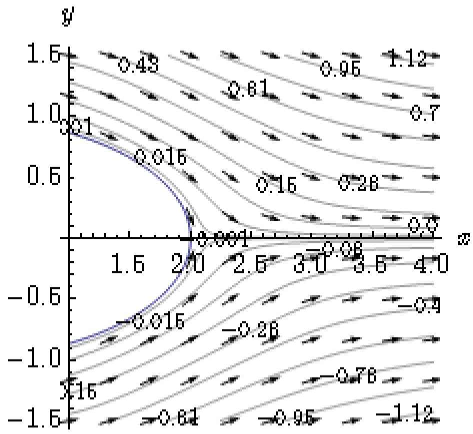

Рис. 13. Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей при $\mathrm{Re} = 0,01$

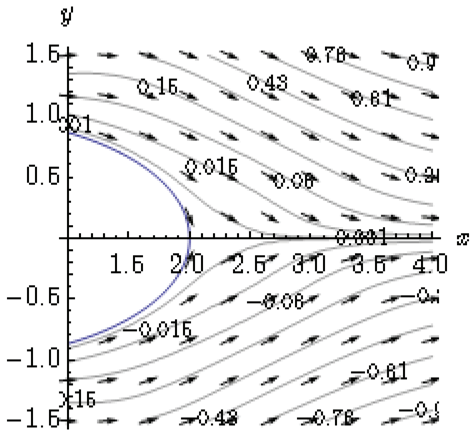

Рис. 14. Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей при $\mathrm{Re} = 10$

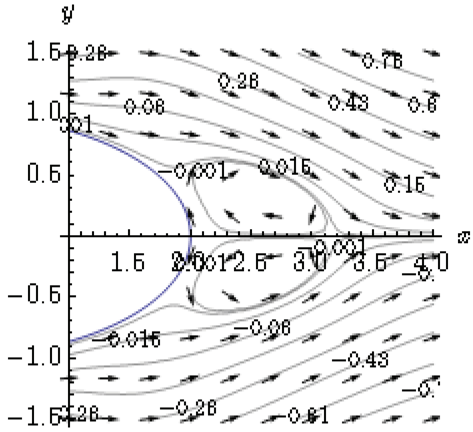

Рис. 15. Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей при $\mathrm{Re} = 20$

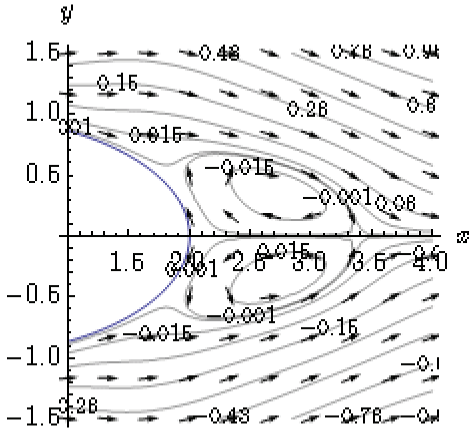

Рис. 16. Детализированные картины линий уровня и векторных полей скоростей при $\mathrm{Re} = 30$

5. Выводы

В работе впервые разработан численный метод расчета внешних течений вязкой несжимаемой жидкости, основанный на совместном применении методов R-функций, последовательных приближений и Галеркина, который отличается от известных методов универсальностью (алгоритм не изменяется при изменении геометрии области) и тем, что структура решения точно учитывает как краевые условия на границе обтекаемого тела, так и условие на бесконечности. Для различных чисел Рейнольдса численно решена задача обтекания кругового и эллиптического цилиндров вязкой несжимаемой жидкостью. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами физических экспериментов [17, 18] и результатами, полученными другими авторами [3, 19-22]. Разработанный метод позволяет проводить математическое моделирование разных физико-механических и биологических внешних течений. Этим и определяется научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика: в 2 т. – Ижевск: РХД, 2003. – Т. 1. – 542 с. – Т.2. – 482 с.
2. Ландау Л. Ф., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: в 10 т. – М.: Физматлит, 2001 – 2005. – Т. 6: Гидродинамика. – 736 с.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
4. Кутепов А. М., Полянин А. Д., Запрянов З. Д. [и др.]. Химическая гидродинамика: справочное пособие. – М.: Квантум, 1996. – 336 с.
5. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. – М.: Мир, 1976. – 630 с.
6. Ламтюгова С. Н. Математическое моделирование линеаризованных задач обтекания в сферической и цилиндрической системах координат // Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – № 1. – С. 112 – 122.
7. Шкадов В. Я., Запрянов З. Д. Течения вязкой жидкости. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 200 с.
8. Бабенко К. И., Введенская Н. Д., Орлова М. Г. Расчет стационарного обтекания кругового цилиндра вязкой жидкостью // Журнал вычислит. математики и мат. физики. – 1975. – 15 (№ 1). – С. 183 – 196.
9. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
10. Колосова С. В. Применение проекционных методов и метода R-функций к решению краевых задач в бесконечных областях. Дисс. … к. ф.-м. н.: 01.01.07 – Вычислительная математика. – Харьков: ХИРЭ, 1972. – 85 с.
11. Колосова С. В., Сидоров М. В. Применение метода R-функций к расчету плоских течений вязкой жидкости // Вісн. ХНУ. Сер. Прикл. матем. і мех. – 2003. – № 602. – С. 61 – 67.

12. Суворова И. Г. Компьютерное моделирование осесимметричных течений жидкости в каналах сложной формы // Вестн. НТУ ХПИ. – Харьков, 2004. – № 31. – С. 141 – 148.
13. Тевяшев А. Д., Гибкина Н. В., Сидоров М. В. Об одном подходе к математическому моделированию плоских стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости в конечных односвязных областях // Радиоэлектроника и информатика. – 2007. – № 2. – С. 50 – 57.
14. Максименко-Шейко К. В. Математическое моделирование теплообмена при движении жидкости по каналам с винтовым типом симметрии методом R-функций // Доп. НАН України. – 2005. – № 9. – С. 41 – 46.
15. Стрельченко А.Й., Колосова С.В., Рвачов В.Л. Про один метод розв'язування крайових задач // Доп. АН УРСР, сер. А. – № 9. – 1972. – С. 837 – 839.\
16. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. – М.: Физматлит, 2002. – 432 с.
17. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. [и др.]. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
18. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964. – 660 с.
19. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир, 1986. – 184 с.
20. Приходько А. А., Редчиц Д. А. Численное моделирование нестационарного течения в следе за цилиндром на основе уравнений Навье-Стокса // Прикладна гідромеханіка. – 2005. – 7 (79), № 1. – С. 56–71.
21. Ермаков М. К. Исследование возможностей матричных методов для решения уравнений Навье-Стокса // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. – 2010. – Т. 9. – С. 1 – 8.
22. Dennis S. C. R., Chang Gau-Zu. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100 // J. Fluid Mech. – 1970. – V. 42. – P. 471 – 489.
23. D. Arumuga Perumal, Gundavarapu V. S. Kumar and Anoop K. Dass. Lattice Boltzmann simulation of viscous flow past elliptical cylinder // CFD Letters. – 2012. – V. 4(3). – P. 127 – 139.

Надійшла у першій редакції 14.04.2014, в останній - 25.04.2014.