УДК 517.986.7

Полугруппа оператора интегрирования и его свойства

А. В. Коробская
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Украина

Работа посвящена изучению оператора, который является линейной комбинацией оператора интегрирования и его сопряженного. Для этого несамосопряженного оператора построен локальный узел и вычислена характеристическая функция этого узла. Кроме того, получена полугруппа, инфинитезимальным оператором которой является изучаемый оператор. Найдены собственные функции этого оператора, которые имеют нетривиальный вид.

Ключевые слова: *оператор интегрирования, характеристическая функция, полугруппа оператора, собственные функции.*

Роботу присвячено вивченню оператора, який є лінійною комбінацією оператора інтегрування та спряженого до нього. Для цього несамоспряженого оператора побудовано локальний вузол й обчислено характеристичну функцію цього вузла. Крім того, отримано півгрупу, інфінітезимальним оператором якої є оператор, що вивчається. Знайдено власні функції цього оператора, які мають нетривіальний вигляд.

Ключові слова: *оператор інтегрування, характеристична функція, півгрупа оператора, власні функції.*

The article is devoted to the study of the operator, which is a linear combination of integration operator and its conjugate. For this nonselfadjoint operator a local node is build and the characteristic function of this node are calculated. Moreover, the semigroup where the infinitesimal operator is the studied operator, are obtained. Eigenfunctions of this operator which have nontrivial form are found.

Key words: *integration operator, characteristic function, semigroup of integration operator, eigenfunctions.*

1. Введение

Теория модельных представлений несамосопряженных операторов играет важную роль при изложении новых аналитических подходов к решению задач теории спектральных представлений в области функционального анализа, а также для моделирования некоторых классов неоднородных случайных полей. Так, предпосылками к развитию современных направлений функционального анализа послужили работы по теории характеристических функций [1; 2], функциональных моделей [3], аналитических функций [4], спектральных представлений несамосопряженных операторов [5; 6]. В связи с этим возникает необходимость в изучении различных типов линейных операторов и изучении их характеристических функций.

2. Анализ исследования

В [1; 2] была введена характеристическая функция оператора изометрии, которая впоследствии стала основным элементом спектрального анализа несамосопряженных операторов. Для несамосопряженного оператора аналогом спектрального разложения принято считать треугольную или функциональную модели. Подход, предложенный в [1; 2], привлек внимание достаточно широкого круга исследователей [6; 7; 8]. Следует отметить, что оператор, который представляет собой линейную комбинацию оператора интегрирования и его сопряженного, в данном контексте не изучался. При этом, изучаемый в работе оператор, не всегда является диссипативным и имеет нетривиальные собственные функции, несмотря на то, что оператор интегрирования собственных функций не имеет.

3. Постановка задачи

Распространить подход, предложенный в [2; 6], на оператор интегрирования, вычислить соответствующую полугруппу оператора, найти собственные функции этого оператора.

4. Решение

Рассмотрим в $L^2_{[0;l]}$ оператор вида:

$$B(f)=\alpha i\int_x^l f(t)dt+\beta i\int_0^x f(t)dt\,, \tag{1}$$

где $\alpha\in R$, $\beta\in R$.

Оператор B ограничен. Действительно,

$$\|Bf\|^2=\int_0^l\left|\alpha i\int_x^l f(t)dt+\beta i\int_0^x f(t)dt\right|^2dx=$$

$$=\int_0^l\left|\left\langle \alpha i\int_x^l f(t)dt+\beta i\int_0^x f(t)dt,\overline{\alpha i\int_x^l f(t)dt+\beta i\int_0^x f(t)dt}\right\rangle\right|dx\le$$

$$\le\int_0^l\left[\alpha^2\left|\int_x^l f(t)dt\int_0^x\overline{f(s)}ds\right|+\alpha\beta\left|\int_x^l f(t)dt\int_0^x\overline{f(s)}ds\right|+\right.$$

$$\left.+\alpha\beta\left|\int_0^x f(t)dt\int_x^l\overline{f(s)}ds\right|+\beta^2\left|\int_0^x f(t)dt\int_0^x\overline{f(s)}ds\right|\right]dx \tag{2}$$

В силу неравенства $\left|\int_a^b f(t)dt\int_c^d\overline{f(s)}ds\right|\le\int_a^b|f(t)|dt\int_c^d|f(s)|ds$ из (2) следует:

$$\|Bf\|^2\le\int_0^l\left[\alpha^2\left(\int_x^l|f(t)|dt\right)^2+2\alpha\beta\int_x^l|f(t)|dt\int_0^x|f(s)|ds+\beta^2\left(\int_0^x|f(t)|dt\right)^2\right]dx \tag{3}$$

В силу неравенства Коши-Буняковского $|\langle f,g\rangle|^2\le\|f\|^2\cdot\|g\|^2$, если взять $f=|f(t)|$, $g=1$, то

$$\left(\int_0^l |f(t)|dt\right)^2 \le \|f\|^2 \cdot l. \tag{4}$$

В неравенстве (3) оценим каждое слагаемое отдельно с учетом неравенства (4):

$$\int_x^l |f(t)|dt \int_0^x |f(s)|ds \le \int_0^l |f(t)|dt \int_0^l |f(s)|ds \le \|f\| \cdot l,$$

$$\left(\int_0^x |f(t)|dt\right)^2 \le \left(\int_0^l |f(t)|dt\right)^2 \le \|f\|^2 \cdot l.$$

Объединив полученные результаты, получаем следующую оценку для неравенства (3):

$$\|Bf\|^2 \le \int_0^l \left[\alpha^2 \|f\|^2 l + 2\alpha\beta \|f\|^2 l + \beta^2 \|f\|^2 l\right] dx = (\alpha+\beta)^2 \|f\|^2 l^2.$$

Т. е. доказано, что $\|Bf\|^2 \le C^2 \|f\|^2$, где $C = (\alpha+\beta)\cdot l$.

Легко видеть, что сопряженный оператор B^* к B (1) имеет вид:

$$B^* f = -\alpha i \int_0^x f(t)dt - \beta i \int_x^l f(t)dt.$$

Включим оператор B (1) в узел:

$$\Delta = (A, H, \varphi, E, \sigma).$$

Чтобы найти φ, вычислим $\dfrac{B-B^*}{i}$:

$$\frac{B-B^*}{i} f = \frac{1}{i}\left(\alpha i \int_x^l f(t)dt + \beta i \int_0^x f(t)dt + \alpha i \int_0^x f(t)dt + \beta i \int_x^l f(t)dt\right) =$$

$$= (\alpha+\beta)\int_0^l f(t)dt. \tag{5}$$

Т. е.

$$\frac{B-B^*}{i} f = \varphi^* \sigma \varphi f, \tag{6}$$

где

$$\varphi f = \int_0^l f(t)dt\,,\ \varphi :\ L^2_{[0;l]} \to C \text{ и } E = C\,, \tag{7}$$

а

$$\sigma = \alpha + \beta\,, \tag{8}$$

и $\varphi^* g = g_x$, где g_x – постоянная на $[0;l]$ функция равная g.

Итак, на основе (5), (6), (7), (8) установлено, что операторный узел для B имеет вид:

$$\Delta = \left(B, L^2_{[0;l]}, \varphi, C, \sigma = \alpha + \beta\right) \tag{9}$$

Найдем характеристическую функцию узла (9), которая определена как:

$$S_\Delta(\lambda) = I - i\varphi(B - \lambda I)^{-1}\varphi^*\sigma\,.$$

Рассмотрим функцию $f(x)$:

$$f(x) = (B - \lambda I)^{-1}\varphi^*\sigma g\,, \tag{10}$$

где $g \in C$. Тогда

$$\sigma g = (B - \lambda I)f(x) \tag{11}$$

Распишем левую и правую части равенства (11):

$$(\alpha + \beta)g = \alpha i\int_x^l f(t)dt + \beta i\int_0^x f(t)dt - \lambda f(x).$$

Выразим отсюда g:

$$g = \frac{\alpha i\int_x^l f(t)dt + \beta i\int_0^x f(t)dt - \lambda f(x)}{(\alpha + \beta)} \tag{12}$$

Подставим значения $x = l$ и $x = 0$ в (12), тогда получим:

$$\begin{cases} \beta i\int_0^l f(t)dt - \lambda f(l) = (\alpha + \beta)g \\ \alpha i\int_0^l f(t)dt - \lambda f(0) = (\alpha + \beta)g. \end{cases}$$

Отсюда

$$\alpha f_l - \beta f_0 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{-\lambda}g\,. \tag{13}$$

Продифференцируем уравнение (12) по x :

$$0 = -\lambda f'_x - \alpha i f(x) + \beta i f(x).$$

Выразим f'_x : $f'_x = -i\dfrac{(\alpha-\beta)}{\lambda} f(x)$.

Сделаем замену: $k = -i\dfrac{(\alpha-\beta)}{\lambda}$, тогда

$$f'(x) = kf(x);$$

$$f(x) = Ce^{kx}. \qquad (14)$$

Подставим полученное выражение (14) в (13) и получим:

$$-\lambda\left(\alpha Cf^{kl} - \beta C\right) = \left(\alpha^2 - \beta^2\right)g;$$

$$C = \frac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)g}{-\lambda\left(\alpha f^{kl} - \beta\right)}.$$

Тогда с учетом (7), (10), (14) получим:

$$S_\Delta(\lambda)g = g - i\varphi f = g - i\int_0^l f(t)dt = g - i\int_0^l Ce^{kx}dx = g - \frac{iC}{k}\left(e^{kl}-1\right) =$$

$$= g - \frac{(\alpha+\beta)g\left(e^{kl}-1\right)}{\alpha e^{kl} - \beta}.$$

Т. е. характеристическая функция узла (9) имеет вид:

$$S_\Delta(\lambda) = 1 - \frac{(\alpha+\beta)\left(e^{kl}-1\right)}{\alpha e^{kl}-\beta} = \frac{\alpha - \beta e^{kl}}{\alpha e^{kl} - \beta}.$$

С учетом того, что $k = -i\dfrac{(\alpha-\beta)}{\lambda}$, окончательно получаем представление для $S_\Delta(\lambda)$:

$$S_\Delta(\lambda) = \frac{\alpha - \beta e^{-i\frac{\alpha-\beta}{\lambda}l}}{\alpha e^{-i\frac{\alpha-\beta}{\lambda}l} - \beta}.$$

Вычислим полугруппу Z_t, отвечающую оператору B.

Пусть задана полугруппа

$$Z_t f(x) = e^{iBt} f(x), \qquad (15)$$

отвечающая оператору B (1) и пусть

$$f(x,t) = Z_t f(x) \tag{16}$$

Продифференцировав (16) по t получим

$$f_t'(x,t) = iB(f(x,t)). \tag{17}$$

Если в $f(x,t)$ подставить $t=0$, то получим функцию, зависящую только от x:

$$f(x,0) = f(x) \tag{18}$$

Равенство (17) означает, что

$$f_t'(x,t) = -\alpha\int_x^l f(x,\xi)d\xi - \beta\int_0^x f(x,\xi)d\xi \tag{19}$$

Продифференцируем (19) по x:

$$f_{xt}''(x,t) = \alpha f(x,t) - \beta f(x,t) \tag{20}$$

Заметим, что

$$\begin{cases} f_t'(l,t) = -\beta\int_0^l f(x,\xi)d\xi \\ f_t'(0,t) = -\alpha\int_0^l f(x,\xi)d\xi. \end{cases}$$

Умножив первое равенство на α, а второе на $-\beta$ и сложив, получим:

$$\alpha f_t'(l,t) - \beta f_t'(0,t) = 0. \tag{21}$$

Объединяя условия (18), (20) и (21), получаем задачу Коши с начально-краевыми условиями:

$$\begin{cases} f_{xt}''(x,t) = (\alpha-\beta)f(x,t), \\ \alpha f_t'(l,t) - \beta f_t'(0,t) = 0, \\ f(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Решим уравнение (20) методом разделения переменных. Представим $f(x,t)$ в виде:

$$f(x,t) = X(x)T(t). \tag{22}$$

Тогда уравнение (20) будет иметь вид:

$$T'(t)X'(x) = (\alpha-\beta)X(x)T(t). \tag{23}$$

Обозначим $\mu = \alpha - \beta$, тогда (23) примет вид:

$$T'(t)X'(x) = \mu X(x)T(t). \tag{24}$$

Сгруппируем (24) по переменным:

$$\frac{T'(t)}{\mu T(t)} = \frac{X(x)}{X'(x)} = \frac{1}{\lambda}$$

и получим уравнения для функций $X(x)$ и $T(t)$:

$$T'(t) = \frac{\mu}{\lambda} T(t), \tag{25}$$

$$X'(x) = \lambda X(x). \tag{26}$$

Подставим в (21) представление функции (22), тогда из $\alpha X(l)T'(t) = \beta X(0)T'(t)$ следует, что

$$\alpha X(l) = \beta X(0). \tag{27}$$

Получаем следующую задачу Коши для $X(x)$:

$$\begin{cases} X'(x) = \lambda X(x) \\ \alpha X(l) = \beta X(0). \end{cases}$$

Из (26) следует, что

$$X(x) = Ce^{\lambda x} \tag{28}$$

Подставив (28) в (27) мы сможем найти $\lambda = a + ib$:

$$e^{\lambda l} = e^{la} e^{ilb} = \frac{\beta}{\alpha},$$

Так как $\frac{\beta}{\alpha} \in R$, то $e^{ilb} = 1$, $b = \frac{2\pi n}{l}$.

Найдем теперь вещественную часть a числа λ:

$$e^{la} = e^{\ln\frac{\beta}{\alpha}},$$

$$a = \frac{\ln\frac{\beta}{\alpha}}{l}.$$

Т. е.

$$\begin{cases} a = \dfrac{\ln\frac{\beta}{\alpha}}{l}; \\ b = \dfrac{2\pi n}{l}. \end{cases} \tag{29}$$

В результате с учетом (29) получаем, что последовательность λ_n равна:

$$\lambda_n = \frac{\ln\frac{\beta}{\alpha} + 2\pi n i}{l}. \tag{30}$$

Подставим найденное λ_n (30) в (28) и получим коэффициенты ряда:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n T_n, \tag{31}$$

где

$$X_n(x) = C_n e^{\frac{x}{l}\left(\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi n i\right)}. \tag{32}$$

Найдем теперь $T_n(t)$ из условия (25):

$$T(t) = Ce^{\frac{\mu}{\lambda}t},$$

$$T_n(t) = C_n e^{\frac{\mu l}{\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi n i}t}. \tag{33}$$

Из условия (18) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{x}{l}\left(\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi n i\right)} T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{x}{l}\left(\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi n i\right)} = f(x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{x}{l}} e^{\frac{2\pi n i}{l}x} = f(x).$$

Умножим последнее равенство на $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{x}{l}}$, получим:

$$f(x)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{x}{l}} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{2\pi n i}{l}x}. \tag{34}$$

Применим к (34) $e^{-\frac{2\pi k i}{l}x}\int_0^l dx$. При этом, учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-inx} dx = \begin{cases} 2\pi, \text{ при } k = n, \\ 0, \text{ при } k \neq n, \end{cases}$$

получим:

$$C_n = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{x}{l}} e^{-\frac{2\pi ki}{l}x} dx . \qquad (35)$$

Теперь можем выписать разложение функции $f(x,t)$ с учетом равенств (31), (32), (33), (35):

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n T_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\xi}{l}} e^{-\frac{2\pi ki}{l}\xi} d\xi \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{x}{l}} e^{\frac{2\pi ki}{l}x} e^{\frac{\mu l}{\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi ki}t} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{x}{l}} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi ki}t} e^{\frac{2\pi ki}{l}x}\right]\cdot\left[\int_0^l f(\xi)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\xi}{l}} e^{-\frac{2\pi ki}{l}\xi} d\xi\right]. \qquad (36)$$

Пусть

$$c_k = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{x}{l}} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi ki}t} e^{\frac{2\pi ki}{l}x}, \qquad (37)$$

$$\widetilde{\varphi}_k = \int_0^l f(\xi)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\xi}{l}} e^{-\frac{2\pi ki}{l}\xi} d\xi . \qquad (38)$$

Докажем сходимость ряда (36) по норме в $L^2_{[0;l]}$.

Рассмотрим часть ряда (38) и применим теорему Риса-Фишера.

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система функций в $L^2_{[a;b]}$, а последовательность чисел $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 < \infty$, то $\exists\ f(t) \in L^2_{[a;b]}$ для которой $\int_a^b |f(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2$, $c_n = \int_a^b f(t)\varphi_n(t)dt$, $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k(t)$.

В нашем случае: $c_n = \widetilde{\varphi}_k$, $f(t) = \sqrt{l}\, f(\xi)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\xi}{l}}$, $\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{l}} e^{-\frac{2\pi ki}{l}\xi}$.

Докажем сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^l f(\xi)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\xi}{l}} e^{-\frac{2\pi ki}{l}\xi} d\xi\right|^2 < \infty$.

Очевидно, что $\left\{ \frac{1}{\sqrt{l}} e^{-\frac{2\pi k i}{l}\xi} \right\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная система, т. к.

$$\text{при } n \neq k \quad \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} e^{-\frac{2\pi k i}{l}\xi}, \frac{1}{\sqrt{l}} e^{-\frac{2\pi n i}{l}\xi} \right\rangle = \frac{1}{l}\int_0^l e^{\frac{2\pi(n-k)i}{l}\xi} d\xi = 0,$$

$$\text{при } n = k \quad \left\langle \frac{1}{\sqrt{l}} e^{-\frac{2\pi k i}{l}\xi}, \frac{1}{\sqrt{l}} e^{-\frac{2\pi n i}{l}\xi} \right\rangle = \frac{1}{l}\int_0^l d\xi = 1.$$

Т. к. $f(\xi) \in L^2_{[0;l]}$, $\sqrt{l}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\xi}{l}} \in L^2_{[0;l]}$, то $\exists\ \sqrt{l} f(\xi)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\xi}{l}} \in L^2_{[0;l]}$.

Следовательно, $\exists\ \sqrt{l} f(\xi)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\xi}{l}} \in L^2_{[0;l]}$, что

$$\int_0^l \left| f(\xi)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{\xi}{l}} e^{-\frac{2\pi k i}{l}\xi} \right|^2 d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{\varphi}_k|^2 < \infty, \tag{39}$$

где $\tilde{\varphi}_k$ имеет вид (38).

Докажем теперь сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \cdot c_k \cdot \tilde{\varphi}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{x}{l}} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi k i}t} e^{\frac{2\pi k i}{l}x} \cdot \tilde{\varphi}_k$, где c_k и $\tilde{\varphi}_k$ имеют вид (37) и (38) соответственно. Для этого покажем, что $\sum_{k=1}^{\infty}\left| \frac{1}{l}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{x}{l}} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi k i}t} \cdot \tilde{\varphi}_k \right|^2 < \infty$.

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left| \frac{1}{l}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{x}{l}} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi k i}t} \cdot \tilde{\varphi}_k \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{l}\right|^2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{2x}{l}} \left| e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi k i}t} \right|^2 \cdot |\tilde{\varphi}_k|^2 <$$

$$< \frac{1}{l^2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{2x}{l}} \sum_{k=1}^{\infty}\left|e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi ki}t}\right|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left|\widetilde{\varphi}_k\right|^2 .$$

Очевидно, что $\left|e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi ki}t}\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$, тогда $\sum_{k=1}^{\infty}\left|e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi ki}t}\right|^2 \le C < \infty$.

С учетом (39) следует:

$$\frac{1}{l^2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{2x}{l}} \sum_{k=1}^{\infty}\left|e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi ki}t}\right|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\left|\widetilde{\varphi}_k\right|^2 < \infty . \tag{40}$$

Тогда из условия (40) $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{l}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{x}{l}} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi ki}t} \cdot \widetilde{\varphi}_k\right|^2 < \infty$, а следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\frac{x}{l}} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi ki}t} e^{\frac{2\pi ki}{l}x} \cdot \widetilde{\varphi}_k$ сходится.

Теорема 1. Полугруппа $Z_t f(x) = e^{iBt} f(x)$ (15), где B имеет вид (1), задается выражением:

$$Z_t f(x) = \frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{x-\xi}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{(\alpha-\beta)l}{\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi ki}t} e^{\frac{2\pi ki}{l}(x-\xi)} d\xi .$$

Найдем собственные функции f_λ (1):

$$Bf_\lambda = \lambda f_\lambda . \tag{41}$$

Распишем левую часть равенства (41) и продифференцируем его по x :

$$\alpha i\int_x^l f(t)dt + \beta i\int_0^x f(t)dt = \lambda f ,$$

$$-\alpha i f + \beta i f = \lambda f'_x ,$$

$$f'_x = \frac{\beta i - \alpha i}{\lambda} f \,,$$

$$f = Ce^{\frac{\beta i - \alpha i}{\lambda} x} . \tag{42}$$

Зададим краевые условия. Подставим в (41) $x = l$ и $x = 0$:

$$\beta i \int_0^l f(t) dt = \lambda f(l), \tag{43}$$

$$\alpha i \int_0^l f(t) dt = \lambda f(0). \tag{44}$$

Умножим (43) на α и прибавим (44) умноженное на $(-\beta)$, получим следующее краевое условие:

$$\alpha f(l) = \beta f(0). \tag{45}$$

Подставляя (42) в краевое условие (45), получим:

$$\alpha Ce^{\frac{(\beta-\alpha)i}{\lambda} l} = \beta C \,,$$

$$e^{\frac{(\beta-\alpha)i}{\lambda} l} = \frac{\beta}{\alpha} \,,$$

где λ – комплексное число. Представим его в виде $\lambda = a + ib$. Найдем a и b:

$$\frac{\beta}{\alpha} = e^{\frac{(\beta-\alpha)i}{a+ib} l} = e^{\frac{(\beta-\alpha)bl}{a^2+b^2}} \cdot e^{\frac{(\beta-\alpha)al}{a^2+b^2} i} = e^{\ln\frac{\beta}{\alpha}} .$$

Отсюда следует:

$$e^{\frac{(\beta-\alpha)bl}{a^2+b^2}} = e^{\ln\frac{\beta}{\alpha}} , \tag{46}$$

$$e^{\frac{(\beta-\alpha)al}{a^2+b^2} i} = 1 . \tag{47}$$

С учетом равенства $1 = e^{2\pi n i}$ из (46) и (47) следует, что

$$\begin{cases} \dfrac{(\beta - \alpha)al}{a^2 + b^2} = 2\pi n, \\ \dfrac{(\beta - \alpha)bl}{a^2 + b^2} = \ln \dfrac{\beta}{\alpha}. \end{cases} \tag{48}$$

Умножая первое равенство на $\ln\dfrac{\beta}{\alpha}$, а второе на $(-2\pi n)$, получим:

$$\begin{cases} \ln\frac{\beta}{\alpha}(\beta-\alpha)al - 2\pi n\ln\frac{\beta}{\alpha}\left(a^2+b^2\right)=0, \\ -2\pi n(\beta-\alpha)bl + 2\pi n\ln\frac{\beta}{\alpha}\left(a^2+b^2\right)=0. \end{cases}$$

Сложив уравнения системы и преобразовав, получим:

$$\ln\frac{\beta}{\alpha}(\beta-\alpha)al - 2\pi n(\beta-\alpha)bl = 0\ ,$$

$$a = \frac{2\pi nb}{\ln\frac{\beta}{\alpha}}\ . \tag{49}$$

Подставим (49) во второе равенство системы (48):

$$\frac{(\beta-\alpha)bl}{\left(\frac{2\pi nb}{\ln\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2 + b^2} = \ln\frac{\beta}{\alpha}\ ,$$

$$b = \frac{(\beta-\alpha)l\ln\frac{\beta}{\alpha}}{(2\pi n)^2 + \left(\ln\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}\ . \tag{50}$$

Для нахождения a подставим (50) в (49):

$$a = \frac{2\pi n(\beta-\alpha)l}{(2\pi n)^2 + \left(\ln\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}\ . \tag{51}$$

Таким образом, с учетом (50) и (51) λ_n имеет вид:

$$\lambda_n = a_n + ib_n = \frac{(\beta-\alpha)l\left(2\pi n + i\ln\frac{\beta}{\alpha}\right)}{(2\pi n)^2 + \left(\ln\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}\ .$$

Тогда, с учетом (42), собственные функции оператора B (1) равны:

$$f_n = C_n e^{\frac{\beta i - \alpha i}{\lambda_n}x} = C_n e^{\frac{(2\pi n)^2 + \left(\ln\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{l\left(\ln\frac{\beta}{\alpha} - 2\pi ni\right)}x} = C_n e^{\frac{\left(\ln\frac{\beta}{\alpha} + 2\pi ni\right)}{l}x}\ .$$

Теорема 2. Собственные функции оператора $B(f)=\alpha i\int_x^l f(t)dt+\beta i\int_0^x f(t)dt$ имеют вид:

$$f_n(x)=C_n e^{\frac{\left(\ln\frac{\beta}{\alpha}+2\pi n i\right)}{l}x}.$$

5. Выводы

Предложенный в статье операторный подход реализован для получения полугруппы оператора $B(f)=\alpha i\int_x^l f(t)dt+\beta i\int_0^x f(t)dt$, который является линейной комбинацией оператора интегрирования и его сопряженного. Такой оператор включен в узел, вычислена его характеристическая функция, найдены собственные функции этого оператора, которые имеют нетривиальный вид. Результаты статьи могут служить основой для получения новых модельных представлений операторов, а также для построения спектральных разложений некоторых классов нестационарных случайных функций и получения модельных представлений для корреляционных функций нестационарных случайных процессов, которые можно использовать для обработки статистических данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М. С. Операторы колебания волны. Открытые системы / М. С. Лившиц. – М., 1966. – 298 с.
2. Лившиц М. С. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах / М. С. Лившиц, А. А. Янцевич. – Х. : Изд-во Харьк. ун-та, 1971. – 160 с.
3. Надь Б. С. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве / Б. С. Надь, Ч. Фояш. – М. : Мир, 1970. – 431 с.
4. Гарнет Дж. Ограниченные аналитические функции / Дж. Гарнет. – М. : Мир, 1984. – 496 с.
5. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов / М. С. Бродский. – М. : Наука, 1969. – 287 с.
6. Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов / В. А. Золотарев. – Х. : [ХНУ], 2003. – 342 с.
7. Бродский М. С. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы / М. С. Бродский, М. С. Лившиц //УМН, 1958. – XII, 1/79. – С. 3-86.
8. Никольский Н. К. Лекции об операторе сдвига / Н. К. Никольский. – М. : Наука, 1980. – 383 с.

Надійшла у першій редакції 13.04.2014, в останній - 21.04.2014.