УДК 517.5:621.3

Клас функцій зі змінним періодом

Я. П. Василенко, Л. П. Дмитроца, М. В. Приймак
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, Україна

В статті наголошено на фактах існування сигналів із змінним періодом та пов’язаних із ними задач дослідження таких сигналів. При цьому вказано на відсутність теорії сигналів із змінним періодом, а також готової методики аналітичного дослідження класу функцій зі змінним періодом. Враховуючи таку ситуацію, в роботі розглянуто клас функцій із змінним періодом та описано його важливий підклас, в якому виділено суперпозиції степеневих функцій з тригонометричними. Передбачається використати такі елементарні функції для побудови аналогів систем ортогональних тригонометричних функцій.

Ключові слова: *сигнали, змінний період, функціональні класи, підкласи, елементарні функції ,степеневі та тригонометричні функції, ортогональні системи.*

В статье отмечены факты существования сигналов с переменным периодом и связанных с ними задач исследования таких сигналов. При этом указано на отсутствие теории сигналов с переменным периодом, а также готовой методики аналитического исследования класса функций с переменным периодом. Учитывая такую ситуацию, в работе рассмотрен класс функций с переменным периодом и описан его важный подкласс, в котором выделены суперпозиции степенных функций с тригонометрическими. Предполагается использовать такие элементарные функции для построения аналогов систем ортогональных тригонометрических функций.

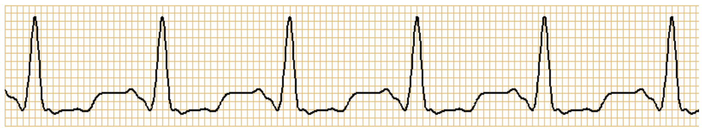
Ключевые слова: *сигналы, переменный период, функциональные классы, подклассы, элементарные, степенные и тригонометрические функции, ортогональные системы.*

The article points that there exist signals having varying period and shows some mathematical problems related with such signals studying. It should be noticed however, that neither theory for such signals is available nor methods are developed to investigate analytically functions with varying period as a class. Taking into account this situation, the article discusses such class and describes its important subclass, in which special attention is paid to superpositions of power and trigonometric functions. The above-mentioned elementary functions are supposed to be used for creating analogues of systems of orthogonal trigonometric functions.

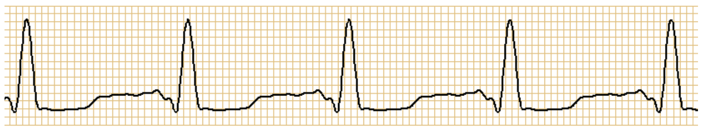
Key words: : *signals, varying period, function classes, subclasses, elementary functions, power functions, trigonometric functions, orthogonal systems.*

1. Вступ

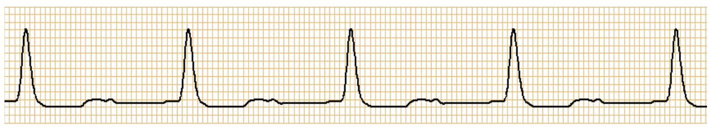
В прикладних дослідженнях зустрічаються випадки необхідності дослідження сигналів (емпіричних функцій) із змінним періодом. Наглядним прикладом таких сигналів є електрокардіограма, але отримана в стані спокою, під час чи після дії на організм пацієнта певного збудника, найпростіше – фізичного навантаження. Якщо таку електрокардіограму розглядати протягом деякого проміжку часу, то при цьому, крім характерної для електрокардіограми повторюваності її основної форми, спостерігається ще одна особливість – період повторюваності неперервно змінюється. При зростанні частоти пульсу період зменшується і навпаки, при зменшені частоти період зростає. Коли ж пульс приходить в «норму» (стабілізується), період електрокардіограми стає постійним. Приклад такої електрокардіограми показано на рис.1, де наведені три відрізки електрокардіограми, кожний тривалістю 3 сек., взяті через певні проміжки часу після дії навантаження. На рис. 1а – електрокардіограма отримана через 60 сек. після дії навантаження, на рис 1б і 1в – відповідно через 120 сек. і 180 сек. після навантаження. Аналізуючи графіки, видно, що форма електрокардіограми повторюється як на кожному із графіків, так і на різних графіках. Але при цьому легко бачити, що період повторюваності змінюється:спочатку збільшується (порівняння графіків на рисунках 1а і 1б показує, що на інтервалах часу тривалістю 3 секунди на верхньому графіку розміщено п’ять періодів електрокардіограми, а на середньому графіку – чотири періоди), а із плином часом стабілізується (на середньому графіку, отриманому через дві хвилини після дії навантаження, розміщено чотири періоди електрокардіограми і стільки ж періодів розміщено на нижньому графіку, отриманому через три хвилини).



а) 1 хвилина після навантаження



б) 2 хвилини після навантаження



в) 3 хвилини після навантаження

Рис.1. Відрізки електрокардіограми, отримані через різні проміжки часу після дії навантаження

Очевидно, подібною до кардіограми буде поведінка спірограми, теж отриманої після дії навантаження чи іншого збудника психофізичного стану людини. Приклади аналогічних сигналів можна також навести із функціонування деяких технічних систем.

2. Аналіз останніх досліджень і публікацій

Огляд літературних джерел показує, що хоча зустрічаються спроби дослідження сигналів із змінним періодом (особливо це стосується згаданих вище електрокардіограм), проте теорія таких сигналів відсутня, не існує аналітичних методів їх дослідження. Основоположний крок в напрямку вивчення сигналів із змінним періодом був здійснений в роботі [1], де була запропонована модель таких сигналів у вигляді функції із змінним періодом.

Наявність класу функцій із змінним періодом відкриває широкі можливості побудови їх теорії, розробки методів дослідження, подібно то того, як розвинута теорія звичайних періодичних функцій, або в термінології цієї статті – функцій із постійним періодом. Один із важливих напрямків дослідження стосується подання функцій із змінним періодом у вигляді тих чи інших аналітичних виразів, формул. Як показує огляд наукових праць, зокрема [2], для вирішення цієї задачі переважно використовується підхід, суть якого може бути висловлена одним словом **«заміна»**. Досліджувана функція (оригінал)замінюється іншою функцією (для зручності назвемо її «копія»),яка в певному сенсі повинна бути «близькою» до «оригіналу» і разом з тим більш простою, зручнішою відносно «оригіналу» щодо можливостей її дослідження. Маючи таку «копію», в подальшому замість дослідження «оригіналу» передбачається досліджувати цю «копію». Ключовим в цьому підході є наступне положення. Якщо буде досягнута необхідна близькість між «оригіналом» і його «копією», то близькими, практично тотожним, будуть їхні властивості. Тому результатами, отриманими в процесі дослідження «копії» (а це значення тих чи інших параметрів «копії», виявлені її певні властивості тощо), буде наділятися і «оригінал».

Сама задача заміни «оригіналу» полягає в побудові його «копії». Для побудови переважно використовується алгоритм наближення [3, с.106-198], суть якого полягає в розкладі досліджуваної функції в деякий ряд, наприклад, ряд Фур'є. Але в нашому випадку проблемним є те, що для реалізації алгоритму наближення необхідно мати первинний «матеріал» – елементарні функції, які можна було б використовувати при побудові ряду, причому ці елементарні функції теж повинні відноситися до класу функцій зі змінним періодом.

3. Мета роботи та постановка задачі

Мета роботи – розглянути поняття функції із змінним періодом, навести аналітичні приклади елементарних функції із змінним періодом, як первинного матеріалу для побудови систем тригонометричних функцій із змінним періодом, записати формули їх змінних періодів.

Функції із змінним періодом – порівняно новий об’єкт досліджень як в загальній теорії функцій, так і в прикладних областях, де приходиться досліджувати емпіричні функції (сигнали) із змінним періодом. Цілком природно, що розвиток теорії і методів аналізу функцій із змінним періодом супроводжується появою нових понять, термінів, позначень тощо. Тому, щоб перейти до основного змісту цієї роботи, нагадаємо деякі основоположні моменти, що стосуються цих функцій.

4. Поняття функції із змінним періодом та змінного періоду

Для сигналів із змінним періодом найбільш характерними є дві особливості: повторюваність значень сигналу та змінність періоду цієї повторюваності. Яким чином врахувати ці особливості сигналу в його моделі, розглядалося в [1]. Як один із основних результатів цієї роботи – був введений клас функцій із змінним періодом. У наступних підрозділах 4.1, 4.2 відтворимо означення та його пояснення за статтею [1].

4.1. Означення функції зі змінним періодом

Функція $f(x)$ дійсного аргументу $x \in I \subseteq R$ називається функцією із змінним періодом, якщо існує така функція $T(x) > 0$, що для всіх $x \in I$, таких, що $x + T(x) \in I$, виконується рівність

$$f(x) = f(x + T(x)). \tag{4.1}$$

Функція $T(x)$,яку назвемо змінним періодом, вважається диференційовною функцією. Вважатимемо надалі, що область визначення $I = [a,b]$ в кожному конкретному випадку повинна уточнюватися, що буде зустрічатися нижче.

Із (4.1) випливає, що при $T(x) = T = const$ функція f є звичайною періодичною функцією з постійним періодом T.

Приклад змінного періоду $T(x)$ показано на рис.2. В точці x_1 період функції $f(x)$ дорівнює $T(x_1)$, тому значення функції в точках x_1 і $x_1 + T(x_1)$ рівні: $f(x_1) = f(x_1 + T(x_1))$. В точці x_2 періодом є число $T(x_2)$, причому значення періоду $T(x)$ в точках x_1 і x_2 різні: $T(x_1) > T(x_2)$.

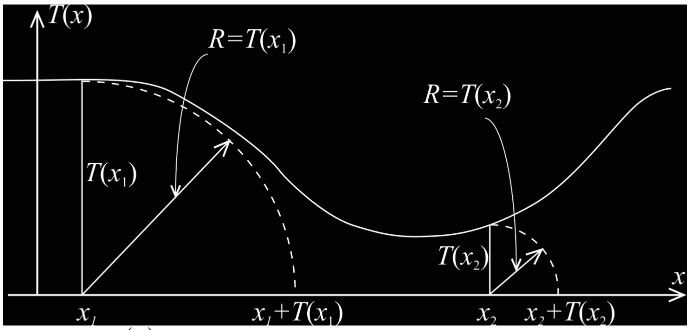


Рис.2. Змінний період $T(x)$, його значення в точках x_1 і x_2 та відповідні їм точки $x_1 + T(x_1)$ і $x_2 + T(x_2)$, в яких значення функції $f(x)$ повторюються.

4.2. Змінний період $T^-(x)$ та його взаємозв'язок із періодом $T(x)$

Відомо, що для періодичної функції $g(x)$ з постійним періодом T виконується рівність $g(x) = g(x+T) = g(x-T)$. Нескладні міркування, зокрема звернення до рис.1, показують, що для функції $f(x)$ із змінним періодом $T(x)$аналогічна рівність $f(x) = f(x + T(x)) = f(x - T(x))$ в загальному не виконується. Тому для випадку, коли аргумент x зменшується, змінний період повторюваності функції $f(x)$ позначимо через $T^-(x)$. При цьому, якщо x і $x - T^-(x)$ належать області визначення I, то

$$f(x) = f\left(x - T^-(x)\right). \tag{4.2}$$

5. Елементарні функції із змінним періодом та їх змінні періоди

Вище мова йшла про наявність емпіричних функцій із змінним періодом та про загальне визначення таких функцій. Але при цьому відкритим залишається цілком природне запитання щодо аналітичного подання функцій із змінним періодом. Щоб ця надзвичайно важлива задача могла бути реалізована, найперше необхідно мати «первинний матеріал» для такої реалізації, тобто деякі елементарні функції, які можна використовувати для побудови (наближення) «не елементарних», тобто більш складних функцій. Тут цілком природно йти шляхом аналогій. І подібно, як для періодичних функцій таким «матеріалом» є тригонометричні функції, для функцій із змінним періодом цим «матеріалом», цими елементарними функціями можуть бути теж тригонометричні функції, але вже із змінним періодом.

Для отримання елементарних функцій із змінним періодом використаємо основні елементарні періодичні функції $\sin x$, $\cos x$, $tg\,x$ і $ctg\,x$ та застосуємо до них принцип суперпозиції. Нехай для функцій $\sin t$, $\cos t$ аргумент $t = x^{\alpha}$, $\alpha > 0,\ x \ge 0$. В результаті суперпозиції цих функцій отримуємо функції

$$\sin x^{\alpha}, \cos x^{\alpha}, tg\,x^{\alpha},\ ctg\,x^{\alpha}\ ,\ \ \alpha > 0,\ \ x \ge 0\ , \tag{5.1}$$

які і будуть функціями із змінним періодом. Для цих функцій характерними є декілька особливостей, зокрема:

- при значеннях аргументу α таких, що $0 < \alpha < 1$, ці функцій із збільшенням аргументу x «розтягуються», тобто хоча повторюваність їх значень зберігається, але при цьому період повторюваності збільшується;
- якщо $\alpha > 1$, функції (5.1) із зростанням аргументу «стискаються», тобто період їх повторюваності зменшується.

Ці особливості будуть проілюстровані нижче конкретними прикладами.

Простою підстановкою можна пересвідчитися, що для функцій

$$\sin x^{\alpha}, \cos x^{\alpha},\ \ \alpha > 0,\ \ x \ge 0\ ,$$

їх змінними періодами є функції

$$T_{\alpha}(x) = -x + \left(x^{\alpha} + 2\pi\right)^{1/\alpha},\ x \in [0, \infty), \tag{5.2}$$

$$T_{\alpha}^{-}(x) = x - \left(x^{\alpha} - 2\pi\right)^{1/\alpha},\ x \in [T(0), \infty). \tag{5.3}$$

Для функцій

$$tg\,x^{\alpha}\ ,\ \ ctg\,x^{\alpha} \tag{5.4}$$

їх змінні періоди

$$T_{\alpha}(x) = -x + \left(x^{\alpha} + \pi\right)^{1/\alpha},\ x \in [0, \infty), \tag{5.5}$$

$$T_{\alpha}^{-}(x) = x - \left(x^{\alpha} - \pi\right)^{1/\alpha},\ x \in [T(0), \infty). \tag{5.6}$$

Розглянемо конкретні приклади для функцій $\sin x^{\alpha}$, $tg\,x^{\alpha}$ та їх періодів, при значеннях $\alpha = 13/16$ та $\alpha = 16/13$.

Приклад 1. Для функції $\sin x^{13/16}$ її графік поданий на рис.3 (неперервна лінія). Для порівняння наведений також графік функції $\sin x$ (пунктирна лінія).

Із поведінки графіка видно, що із збільшенням аргументу функція $\sin x^{13/16}$ розтягається. Якщо на інтервалі $[0, 30]$ вміщається більше чотирьох з половиною періодичних коливань функції $\sin x$, то для функція $\sin x^{13/16}$ – лише два з половиною.

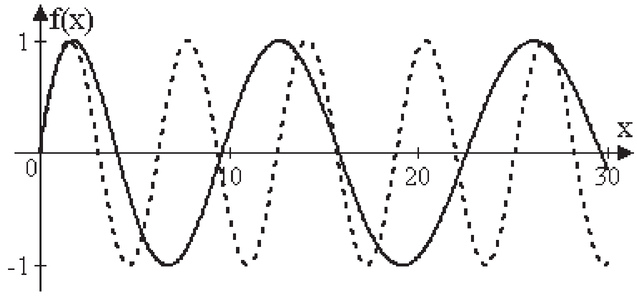


Рис.3.Графіки функцій $\sin x^{13/16}$ *(неперервна лінія),* $\sin x$ *(пунктирна лінія).*

Поведінку функції $\sin x^{13/16}$ підтверджують і її змінні періоди, отримані згідно (5.2) і (5.3) при $\alpha = 13/16$. На рис.4 зображений період $T(x) = -x + \left(x^{13/16} + 2\pi\right)^{16/13}$, $x \geq 0$ (неперервна лінія), та враховуючи значення $T(0) = (2\pi)^{16/13} \approx 9{,}602$, період $T^{-}(x) = x - \left(x^{13/16} - 2\pi\right)^{16/13}$, $x \geq 9{,}602$, (пунктирна лінія). Для порівняння також наведений період $T = 2\pi$ (штрих-пунктирна лінія) для функції $\sin x$.

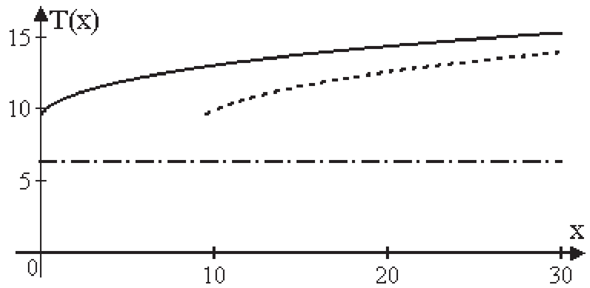


Рис.4. Змінні періоди для функції $\sin x^{13/16}$*:* $T(x)$, $x \geq 0$ *(неперервна лінія),* $T^{-}(x)$, $x \geq 9{,}602$*, (пунктирна лінія); період* $T = 2\pi$ *(штрих-пунктирна лінія) функції* $\sin x$.

Приклад 2. Розглянемо тепер функцію $\sin x^{\alpha}$ при $\alpha = {16}/{13}$. Графік функції $\sin x^{16/13}$ показаний на рис.5 (неперервна лінія). Для порівняння пунктирною лінією зображений графік функції $\sin x$. На відміну від поведінки функції $\sin x^{13/16}$, розглянутої в прикладі 1, функція $\sin x^{16/13}$ із збільшенням аргументу стискається, тобто її період є спадною функцією. В той час, як на інтервалі $[0, 15]$ для функції $\sin x$ спостерігається менше двох з половиною коливань, для функції $\sin x^{16/13}$ на цьому ж інтервалі розміщується більше чотирьох періодичних коливань.

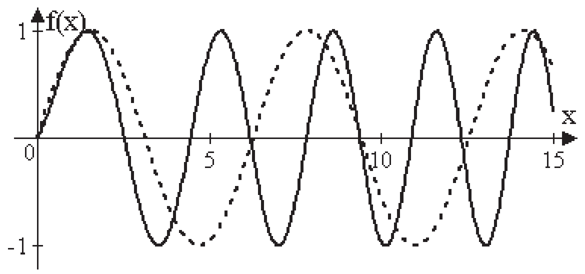


Рис.5.Графіки функцій $\sin x^{16/13}$ *(неперервна лінія),* $\sin x$ *(пунктирна лінія).*

Поведінку періодів функції $\sin x^{16/13}$ ілюструють графіки на рис.6. Період $T(x) = -x + \left(x^{16/13} + 2\pi\right)^{13/16}$ показаний неперервною лінією, період $T^{-}(x) = x - \left(x^{16/13} - 2\pi\right)^{13/16}$, $x \geq 4{,}452$ – пунктирною лінією, період $T = 2\pi$ для функції $\sin x$ – штрих-пунктирна лінія.

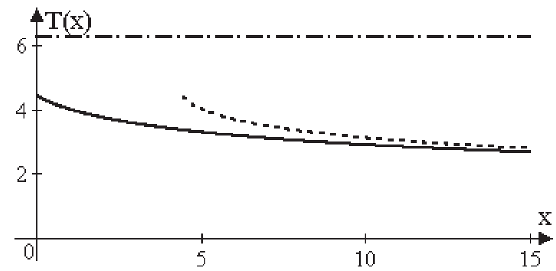


Рис.6.Змінні періоди для функції $\sin x^{16/13}$*:* $T(x)$ *(неперервна лінія),* $T^{-}(x)$, $x \geq 4{,}452$ *(пунктирна лінія), період* $T = 2\pi$ *функції* $\sin x$ *(штрих-пунктирна лінія).*

Зауважимо, що подібною до поведінки функцій $\sin x^{13/16}$ і $\sin x^{16/13}$ буде поведінка функцій $\cos x^{13/16}$ і $\cos x^{16/13}$, а їх періоди $T(x)$ і $T^{-}(x)$, що в загальному випадку виражаються формулами (5.2) і (5.3), співпадають із періодами функцій $\sin x^{13/16}$ і $\sin x^{16/13}$.

Приклад 3. Розглянемо ще одну із тригонометричних функцій (5.4), а саме функцію $tg\, x^{\alpha}$, $x \geq 0$. На рис.7 зображено графік функції $tg\, x^{13/16}$ (неперервні лінії) та для порівняння графік функції $tg\, x$ (штрих-пунктирні лінії). Із рисунка видно, що із збільшенням аргументу функція $tg\, x^{13/16}$ в порівнянні із функцією $tg\, x$ розтягується, тобто її періоди є зростаючими функціями. Про це свідчить поведінка періодів цієї функції, знайдених на основі формул (5.5) і (5.6):

$$T(x) = -x + \left(x^{13/16} + \pi\right)^{16/13}, \; x \geq 0, \tag{5.7}$$

$$T^{-}(x) = x - \left(x^{13/16} - \pi\right)^{16/13}, x \in \left[T(0) \approx 4.092, \infty\right). \tag{5.8}$$

Графіки цих періодів подані на рис.8 і для порівняння поміщено період $T = \pi$ функції $tg\, x$.

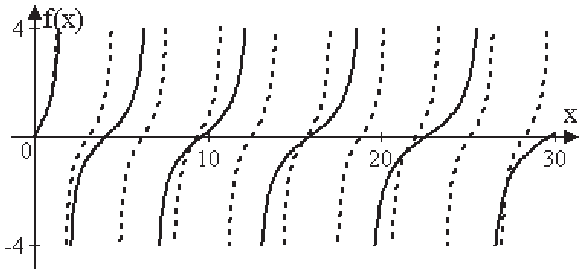


Рис.7.Графіки функцій $tg\, x^{13/16}$ (неперервні лінії) та $tg\, x$ (пунктирні лінії).

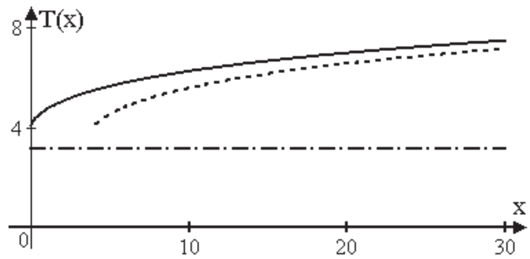


Рис.8.Змінні періоди для функції $tg\, x^{13/16}$: $T(x)$, $x \geq 0$, (неперервна лінія), $T^{-}(x)$, $x \in [4.092, \infty)$ (пунктирна лінія). Період $T(x) = \pi$ (штрих-пунктирна лінія) для функції $tg\, x$.

Метод отримання елементарних тригонометричних функцій із змінним періодом згідно формули (5.1) можна узагальнювати. Розглянемо деякі способи таких узагальнень.

6. Узагальнення методу отримання тригонометричних функцій із змінним періодом

Нехай функція $g(x),\ x \in I = [a,b]$ – строгозростаюча (спадна) диференційовна функція, причому:

- ✓ відноситься до класу елементарних функцій;
- ✓ в області визначення $I = [a,b]$ її варіація $V_a^b(g) >> 2\pi$.

При цих умовах функції

$$\sin g(x),\ \cos g(x),\ tg\ g(x),\ ctg\ g(x),\quad \alpha > 0,\ \ x \in I\ , \tag{6.1}$$

є елементарними періодичними функціями.

Якщо для функції $g(\bullet)$ існує обернена функція $g^{-1}(\bullet)$, то для функцій (6.1) можна записати їх змінні періоди. Для функцій $\sin g(x), \cos g(x)$ змінні періоди визначаються формулами

$$T(x) = -x + g^{-1}(g(x) + 2\pi),\ x \geq 0\ , \tag{6.2}$$

$$T^{-}(x) = x - g^{-1}(g(x) - 2\pi),\ x \in [T(0), \infty). \tag{6.3}$$

Для функцій $tg\ g(x),\ ctg\ g(x)$ їх змінні періоди

$$T(x) = -x + g^{-1}(g(x) + \pi),\ x \geq 0\ , \tag{6.4}$$

$$T^{-}(x) = x - g^{-1}(g(x) - \pi),\ x \in [T(0), \infty). \tag{6.5}$$

Нагадаємо, що наявність змінних періодів для функцій (6.1) означає їх повторюваність через період. Наприклад, для функції $\sin g(x)$ виконуються рівності

$$\sin g(x + T(x)) = \sin g(x),\ \sin g\left(x - T^{-}(x)\right) = \sin g(x).$$

Подібні рівності виконуються і для функцій $\cos g(x),\ tg\ g(x),\ ctg\ g(x)$.

Приклад 4. Нехай $g(x) = e^{\sqrt{x}}$. Розглянемо тригонометричну функцію $\sin e^{\sqrt{x}}$, $x \geq 0$. Графік цієї функції, а також для порівняння графік функції $\sin x$, показаний на рис.9.

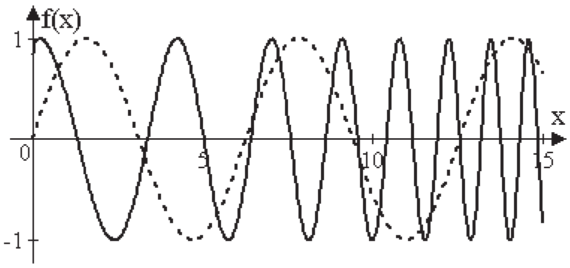


Рис.9. Графіки функцій $\sin e^{\sqrt{x}}$ *(неперервна лінія) та* $\sin x$ *(пунктирна лінія).*

Із рисунка видно, що графік функції $\sin e^{\sqrt{x}}$ із збільшенням аргументу швидко «стискається»: якщо на інтервалі $[0,\,15]$ розміщується менше двох з половиною періодичних коливань функції $\sin x$, то для функції $\sin e^{\sqrt{x}}$ таких коливань спостерігається вже більше семи.

Змінні періоди функції $\sin e^{\sqrt{x}}$, знайдені на основі формул (6.2) і (6.3), мають вигляд

$$T(x) = -x + \ln^2\left(e^{\sqrt{x}} + 2\pi\right),\ x \ge 0\,, \tag{6.6}$$

$$T^-(x) = x - \ln^2\left(e^{\sqrt{x}}) - 2\pi\right),\ x \in [T(0) \approx 3.942, \infty)\,. \tag{6.7}$$

Графіки цих періодів зображені на рис.10: період $T(x) = -x + \ln^2\left(e^{\sqrt{x}} + 2\pi\right),\ x \ge 0$, – неперервна лінія, $T^-(x) = x - \ln^2\left(e^{\sqrt{x}}) - 2\pi\right)\ x \in [T(0) \approx 3.942, \infty)$, – пунктирна лінія. Для порівняння показано також період $T(x) = T = 2\pi$ функції $\sin x$ (штрих-пунктирна лінія).

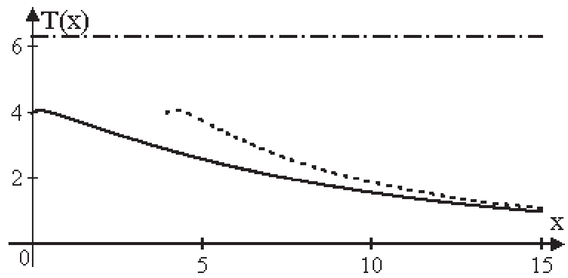


Рис.10.Змінні періоди для функції $\sin e^{\sqrt{x}}$ *:* $T(x),\ x \ge 0$ *, (неперервна лінія),* $T^-(x),\ x \in [3.942, \infty)$ *(пунктирна лінія). Період* $T(x) = 2\pi$ *(штрих-пунктирна лінія).*

Поведінка змінних періодів $T(x)$ і $T^-(x)$ підтверджує зроблені вище зауваження про те, функція $\sin e^{\sqrt{x}}$ із зростанням аргументу x стискається. Про швидкість стиснення можна судити по значеннях періодів, обчислених для деяких значень аргументу. Результати обчислення наведені в таблиці 1 (зауважимо, що згідно (6.7) період $T^-(x)$ для аргументу $x = 0$ не визначений).

Таблиця 1.Значення періодів $T(x)$ *і* $T^-(x)$ *в дискретних точках*

x	0	5	10	20	100	1000
$T(x)$	3.94248	2.56145	1.54715	0.62476	$5{,}70439\times10^{-3}$	$7{,}16227\times10^{-12}$
$T^-(x)$	–	3.73944	1.85992	0.66060	$5{,}70585\times10^{-3}$	$7{,}50333\times10^{-12}$

Множину елементарних тригонометричних функцій із змінним періодом можна розширювати. Один із таких методів розширення полягає в застосуванні до функцій $\sin g(x), \cos g(x), tg\, g(x), ctg\, g(x)$, $x \in I$, які є суперпозицією функцій, нових суперпозицій і чотирьох основних арифметичних операцій – додавання, віднімання, множення і ділення. Якщо, наприклад, до функції із змінним періодом $\sin g(x)$ застосувати операцію додавання, а суперпозицію провести з використанням показникової функції, то отримаємо нову функцію

$$(\sin g(x) + s)^{\theta}, \qquad (6.8)$$

період якої теж буде змінним. В (6.8) параметри $\theta > 0$, s – деякі числа. Метод отримання проілюструємо наступним прикладом.

Приклад 5. Вище розглядалася функція $\sin e^{\sqrt{x}}$. Застосуємо до цієї функції перетворення типу (6.8), взявши значення $s = 1$, $\theta = 2$. В результаті отримаємо функцію $\left(\sin e^{\sqrt{x}} + 1\right)^2$. Її графік зображений на рис.10 (неперервна лінія), а для порівняння показано також графік функції $(\sin x + 1)^2$ (пунктирна лінія). Із поведінки графіків добре видно, що період функції $\left(\sin e^{\sqrt{x}} + 1\right)^2$ змінюється, а саме зменшується, період функції $(\sin x + 1)^2$ залишається постійним. Можна показати, що як і для функції $\sin e^{\sqrt{x}}$, періоди функції $\left(\sin e^{\sqrt{x}} + 1\right)^2$ визначаються формулами (6.6) і (6.7).

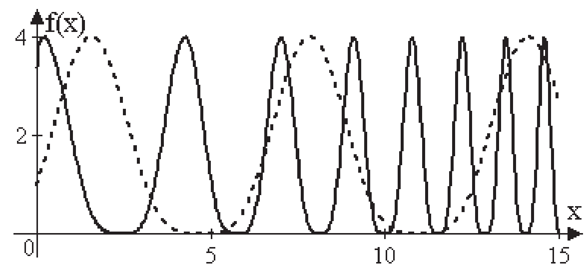


Рис.11. Графіки функції $\left(\sin e^{\sqrt{x}} + 1\right)^2$ *(неперервна лінія) та функції* $(\sin x + 1)^2$ *(пунктирна лінія).*

Розглянуті приклади елементарних тригонометричних функцій із змінним періодом та їх змінні періоди є підставою для здійснення подальших кроків щодо розвитку теорії функцій із змінним періодом і розробки методів їх дослідження. Передбачається, що першим таким кроком повинно бути створення системи тригонометричних функцій із змінним періодом. Це надзвичайно важлива задача, оскільки наявність такої системи є необхідною умовою розв’язку задач наближення (по суті побудови рядів Фур'є) функцій із змінним періодом (як емпіричних так і аналітично заданих) та дослідження їх аналітичними методами.

7. Висновки

Наведено приклади сигналів (емпіричних функцій) із змінним періодом та вказано на відсутність теорії таких сигналів та методів їх дослідження. Враховуючи, що раніше був введений клас функцій із змінним періодом, представники якого можуть бути використані як моделі емпіричних сигналів із змінним періодом, намічено шляхи дослідження таких функцій. Зроблено перший крок в цьому напрямку – введено нові елементарні функції, а саме тригонометричні функції із змінним періодом та записані формули їх змінних періодів. Передбачається на основі таких елементарних функцій створення ортогональних систем тригонометричних функцій із змінним періодом із подальшим використанням таких системи для розвитку теорії наближення функцій із змінним періодом, в першу чергу побудови їх рядів Фур'є.

ЛІТЕРАТУРА

1. Приймак М.В., Боднарчук І.О., Лупенко С.А. Умовно періодичні випадкові процеси із змінним періодом. // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – Т.10, №2. – С. 143-152.
2. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.-Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1949. – 454 с.
3. Гутер Р.С., Кудрявцев Л.Д., Левитан Б.М. Элементы теории функций (функции действительного переменного, приближение функций, почти периодические функции). – М.: Физматгиз, 1963. – 244 с.

Надійшла у першій редакції 02.03.2014, в останній - 25.04.2014.