

УДК 519.6

## О верификации S-теории, используемой для описания модуляционных неустойчивостей волнового поля

Е. В. Белкин, А. В. Киричок, В. М. Куклин, А. В. Приймак  
*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина*

Рассмотрена модуляционная неустойчивость интенсивного волнового поля для модели, которая описывается уравнением Лайтхилла с учетом поглощения и внешнего источника. Обсуждается природа появления волн и огибающих волнового поля аномальной амплитуды в нелинейных средах, в частности на поверхности океана. Обсуждаются результаты упрощенного описания на основе модифицированной S-теории и результаты без использования упрощений. Показано, что многие характеристики обеих описаний оказываются достаточно близки, по крайней мере, на начальной стадии нелинейного режима неустойчивости.

**Ключевые слова:** модуляционная неустойчивость, волны аномальной амплитуды, S-теория, уравнение Лайтхилла.

Розглянута модуляційна нестійкість інтенсивного хвильового поля для моделі, яка описується рівнянням Лайтхілла з урахуванням поглинання і зовнішнього джерела. Обговорюється природа появи хвиль і обвідних хвильового поля аномальної амплітуди в нелінійних середовищах, зокрема на поверхні океану. Обговорюються результати спрощеного опису на основі модифікованої S-теорії та результати без використання спрощень. Показано, що багато характеристик обох описів виявляються досить близькими, принаймні, на початковій стадії нелінійного режиму нестійкості.

**Ключові слова:** модуляційна нестійкість, хвилі аномальної амплітуди, S-теорія, рівняння Лайтхілла.

The modulation instability of intense wave field is considered for a model described by the Lighthill equation, taking into account absorption and external source. The nature of the wave appearance and the wave field envelopes of the anomalous amplitude in nonlinear media are discussed, in particular on the ocean surface. The results of the simplified description based on a modified S-theory and the results without the use of simplifications are discussed. Many of the characteristics of both descriptions are close enough for at least in the initial stage of the nonlinear instability mode.

**Key words:** modulation instability, waves of the anomalous amplitude, S-theory, the equation of Lighthill.

### 1. Введение

Периодические волны конечной амплитуды в средах с локальной кубической нелинейностью являются неустойчивыми с возбуждением двух боковых спектров вынужденных возмущений, соответственно с большей и меньшей длиной волны [1-6]. Развитие такой неустойчивости приводит к амплитудной модуляции начальной волны [2]. Исследование модуляционной неустойчивости полезно для изучения эволюции волнового движения и транспортировки волновых пакетов. В консервативных средах с кубической нелинейностью при отсутствии затухания колебаний формируются нелинейные образования - автоволны [7-10], в частности, солитоны. Однако в открытых системах с внешними источниками и поглощением энергии возникают новые виды

нелинейных образований (см, например, [11-13]). Одними из первых изучение открытых нелинейных систем начали авторы работ [14-18], которые сформулировали подходы к описанию нелинейной стадии модуляционной неустойчивости спиновых волн на базе так называемой S-теории. Позднее была предложена модифицированная модель S-теории [19-22], позволившая детально изучить эволюцию волновых пакетов интенсивного волнового движения разной природы.

В данной работе проводится верификация применения S-теории для описания модуляционных неустойчивостей путем сравнения результатов расчетов на ее основе с результатами расчетов общей теории, которая учитывает различные виды взаимодействия мод спектра. Цель работы - показать сходство этих двух подходов, сравнить характеристики процесса неустойчивости, максимальные амплитуды модуляции (оггибающей) и отдельных волн, а также время их появления.

## 2. Математические модели описания модуляционных неустойчивостей волнового поля

Математические модели, представленные в [1-3,6], изложены в единой системе обозначений далее.

При наличии источника и стока (распределенного вывода, поглощения и диссипации) энергии волны уравнение Лайтхилла (разновидность нелинейного уравнения Шредингера) принимает вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\delta A - i\hat{f}A - i\hat{h}A |A|^2 + g, \quad (1)$$

где  $\delta$  - декремент поглощения и  $g$  - внешний источник волновой энергии,  $\hat{f}$  и  $\hat{h}$  - пространственные операторы. Медленно меняющаяся со временем амплитуда колебаний  $A(t, x)$  может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} A &= u_0(t) \exp\{i\phi_{k_0}(t) - ik_0x\} + \sum_{n \neq 0} u_n(t) \exp\{i\phi_{k_n}(t) - ik_nx\} = \\ &= \{u_0(t) + \\ &+ \sum_{n \neq 0} u_n(t) \exp[i(\phi_{k_n} - \phi_{k_0}) - i(k_n - k_0)x]\} \exp\{i\phi_{k_0}(t) - ik_0x\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Т.е. неустойчивость понимают как возбуждение спектра  $\sum_{n \neq 0} u_n(t) \cdot \exp\{i\phi_{k_n}(t)\} \cdot \exp\{i\omega_0 t - ik_n x\}$ , где  $u_n(t) \cdot \exp\{i\phi_{k_n}(t)\}$  - медленно меняющаяся комплексная амплитуда n-ной моды спектра. Суммарное поле представляет собой модулированную волну на частоте  $\omega_0$ .

Действительно, выделяя отвечающий основной волне «быстрый» фазовый множитель  $\exp\{i\omega_0 t - ik_0 x\}$ , получим в этом случае поле колебаний, как произведение

$$A = \exp\{i\omega_0 t - ik_0 x\} \cdot \{u_0 \exp[i\varphi_{k_0}] + \sum_{n \neq 0} u_n \exp[i\varphi_{k_n} - i(k_n - k_0)x]\}, \quad (3)$$

где  $\exp\{i\omega_0 t - ik_0 x\}$  - быстро меняющаяся фаза.

Огибающую этого волнового процесса можно определить следующим образом. Обозначим быструю фазу  $\omega_0 t - k_0 x + \varphi_{k_0} = \varphi$ , а медленную  $(\varphi_{k_n} - \varphi_{k_0}) - (k_n - k_0)x = \psi_n$ . Тогда, например,

$$\operatorname{Re} A = \bar{A} \cdot \{ \cos \varphi \cdot \sin \bar{\varphi} - \sin \varphi \cdot \cos \bar{\varphi} \} = -\bar{A} \cdot \sin(\varphi - \bar{\varphi}),$$

$$\text{где } \sin \bar{\varphi} = (u_0 + \sum_{n \neq 0} u_n \cdot \cos \psi_n) / \bar{A}, \quad \cos \bar{\varphi} = \sum_{n \neq 0} u_n \cdot \sin \psi_n / \bar{A}, \quad \text{причем}$$

амплитуда огибающей

$$\bar{A} = \sqrt{(u_0 + \sum_{n \neq 0} u_n \cdot \cos \psi_n)^2 + (\sum_{n \neq 0} u_n \cdot \sin \psi_n)^2}.$$

Или, возвращаясь к прежним обозначениям

$$\begin{aligned} \bar{A} = & \left\{ (u_0 + \sum_{n \neq 0} u_n \cos[(\varphi_{k_n} - \varphi_{k_0}) - (k_n - k_0)x])^2 + \right. \\ & \left. + (\sum_{n \neq 0} u_n \sin[(\varphi_{k_n} - \varphi_{k_0}) - (k_n - k_0)x])^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (4)$$

На линейной по амплитудам возмущений стадии модуляционной неустойчивости возбуждается спектр колебаний, волновые числа которых располагаются симметрично относительно волнового числа  $k_0$  основной моды конечной амплитуды  $k_n \equiv k_0 + K_n > k_0$  и  $k_{-n} \equiv k_0 - K_n < k_0$ , где  $n > 0$ . Каждая пара симметрично расположенных относительно основной волны мод  $k_n, k_{-n}$  непосредственно взаимодействует с полем основной волны, причем, выполняется соотношение  $k_n + k_{-n} = 2k_0$ , которое обусловлено видом нелинейности.

Основываясь на этой особенности модуляционной неустойчивости, была построена так называемая S-теория, которая учитывала взаимодействие только «спаренных» мод спектра, волновые вектора которых симметрично располагались относительно волнового вектора основной волны конечной амплитуды ( $2k_0 = k_S + k_{-S} = k_n + k_{-n}$ ).

Более общее описание позволяет в выражении для нелинейного слагаемого вида  $\{A|A|^2\}$  в уравнении (1) удерживать все слагаемые, не ограничиваясь симметричными по отношению к накачке модами спектра (то есть  $2k_0 = k_S + k_{-S} = k_n + k_{-n}$ ), которые используются для формирования S-теории.

**Описание огибающей волнового поля в средах со слабой дисперсией.**

Подобные волны большой амплитуды возбуждаются в волноводах, как вакуумных, так и заполненных диэлектриком или плазмой. Уравнение Лайтхилла (1) для комплексной амплитуды волнового поля можно получить [19], полагая  $\mathcal{F} = \partial^2 / \partial x^2$  и  $\mathcal{K} = 1$ . Уравнения для амплитуды и фазы малых мод  $u_n(t) \cdot \exp\{i\varphi_n(t)\}$  в этом случае можно записать в виде

$$\frac{\partial u_n}{\partial \tau} = -\delta u_n - \beta_{1L} A_{n,1} - \beta_{2L} A_{n,2}, \quad (5)$$

$$u_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} = K_n^2 \cdot u_n - \beta_{1L} B_{n,1} - \beta_{2L} B_{n,2}, \quad (6)$$

а для амплитуды и фазы основной волны

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau} = -\delta u_0 - \beta_{1L} A_{0,1} - \beta_{2L} A_{0,2} + G_0, \quad (7)$$

$$u_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} = -\beta_{1L} B_{0,1} - \beta_{2L} B_{0,2}, \quad (8)$$

где  $G_{k_n} \equiv G_n = 0, k_n \neq k_0, n \neq 0$ ;  $G_{k_n} \equiv G_n = \delta, k_n = k_0, n = 0, \varphi_n = \varphi_{k_n}$ .

Причем для  $A_{i,j}$  и  $B_{i,j}$  справедливы выражения

$$A_{0,1} = +u_0 \sum_{m \neq 0} u_m u_{-m} \text{Sin}(2\varphi_0 - \varphi_m - \varphi_{-m}), \quad (9)$$

$$B_{n,1} = [u_0^3 + 2u_0 \sum_{m \neq 0} u_m^2 + u_0 \sum_{m \neq 0} u_m u_{-m} \text{Cos}(\varphi_m + \varphi_{-m} - 2\varphi_0)], \quad (10)$$

$$A_{0,2} = -\sum_m \sum_p u_{-m-p} u_{-p} u_m \cdot \text{Sin}(\varphi_{-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_0) - A_{0,1}, \quad (11)$$

$$B_{0,2} = +\sum_m \sum_p u_{-m-p} u_{-p} u_m \cdot \text{Cos}(\varphi_{-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_0) - B_{0,1}, \quad (12)$$

$$A_{n,1} = -[u_{-n} u_0^2 \text{Sin}(2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}) + u_{-n} \sum_{m \neq 0, n} u_m u_{-m} \text{Sin}(\varphi_m + \varphi_{-m} - \varphi_n - \varphi_{-n})], \quad (13)$$

$$B_{n,1} = [u_n u_n^2 + 2u_n u_0^2 + 2u_n \sum_{m \neq 0, n} u_m^2 + u_{-n} u_0^2 \text{Cos}(2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}) + u_{-n} \sum_{m \neq 0, n} u_m u_{-m} \text{Cos}(\varphi_m + \varphi_{-m} - \varphi_n - \varphi_{-n})], \quad (14)$$

$$A_{n,2} |_{n \neq 0} = -\sum_m \sum_p u_{n-m-p} u_{-p} u_m \cdot \text{Sin}(\varphi_{n-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_n) - A_{n,1}, \quad (15)$$

$$B_{n,2} |_{n \neq 0} = +\sum_m \sum_p u_{n-m-p} u_{-p} u_m \cdot \text{Cos}(\varphi_{n-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_n) - B_{n,1}, \quad (16)$$

где  $-N < n < N = 200$ , для нормировки амплитуды основной волны на единицу на начальной стадии процесса здесь и ниже был выбран уровень внешней накачки  $G = \delta$ . При  $\beta_{1L} = 1$  и  $\beta_{2L} = 0$  приходим к случаю S-теории (а)

[19], при  $\beta_{1L} = 1$  и  $\beta_{2L} = 1$  система уравнений есть следствие полного уравнения Лайтхилла, то есть без упрощений S-теории с данным типом дисперсионного слагаемого (b). Пространственно-временная структура волнового поля и его огибающей может быть представлена выражениями (3) и (4).

**Описание волнового поля в средах с сильной дисперсией.**

Рассмотрим для определенности случай модуляционной неустойчивости гравитационных поверхностных волн на глубокой воде в форме [21-22], представляющих особый интерес для судоходства в районах с высоким уровнем океанского волнения. Для частоты волн большой амплитуды [23] справедливо следующее выражение

$$\omega = kW = \sqrt{gk} \cdot \left\{ 1 + \frac{a^2 k^2}{2} + \dots \right\}, \quad (17)$$

где  $\eta$  - отклонение поверхности,  $W$  - скорость волны,  $g$  - ускорение свободного падения. Уравнение Лайтхилла-Невилла (1) для комплексной амплитуды отдельной моды спектра волнового поля при этом представляется в виде [21-22]

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_K}{\partial t} &= -\delta A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)}A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \{|A|^2 A\}_K = \\ &= -\delta A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)}A_K - i\sqrt{g(k_0 + K)} \frac{(k_0 + K)^2}{2} \cdot \\ &\cdot \{A_K [2|A_0|^2 + 2 \sum_{K' \neq K, 0} |A_{K'}|^2 + |A_K|^2] + A_{-K}^* \{A_0^2 + \sum_{K \neq K, 0} A_K \cdot A_{-K}\}\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнения для амплитуды и фазы малых мод можно записать в виде

$$\frac{\partial u_n}{\partial \tau} = -\delta u_n - \beta_1 A_{n,1} - \beta_2 A_{n,2}, \quad (19)$$

$$u_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} = -2 \left\{ \frac{\sqrt{1+n \cdot \Delta} - 1}{\alpha} \right\} u_n - \beta_1 B_{n,1} - \beta_2 B_{n,2}. \quad (20)$$

Уравнения для амплитуды и фазы моды основной волны

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau} = -\delta u_0 - \beta_1 A_{0,1} - \beta_2 A_{0,2} + G_0, \quad (21)$$

$$u_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} = -\beta_1 B_{0,1} - \beta_2 B_{0,2}, \quad (22)$$

где

$$A_{0,1} = -[u_0 \sum_{m \neq 0, n} u_m u_{-m} \text{Sin}(\varphi_m + \varphi_{-m} - 2\varphi_0)], \quad (23)$$

$$B_{0,1} = [u_0 u_0^2 + 2u_0 \sum_{m \neq 0} u_m^2 + u_0 \sum_{m \neq 0} u_m u_{-m} \text{Cos}(\varphi_m + \varphi_{-m} - 2\varphi_0)], \quad (24)$$

$$A_{0,2} = -\sum_m \sum_p u_{-m-p} u_{-p} u_m \cdot \text{Sin}(\varphi_{-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_0) - A_{0,1}, \quad (25)$$

$$B_{0,2} = +\sum_m \sum_p u_{-m-p} u_{-p} u_m \cdot \text{Cos}(\varphi_{-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_0) - B_{0,1}, \quad (26)$$

$$A_{n,1} = -(1+n \cdot \Delta)^{5/2} [u_{-n} u_0^2 \text{Sin}(2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}) + u_{-n} \sum_{m \neq 0, n} u_m u_{-m} \text{Sin}(\varphi_m + \varphi_{-m} - \varphi_n - \varphi_{-n})], \quad (27)$$

$$B_{n,1} = (1+n \cdot \Delta)^{5/2} [u_n u_n^2 + 2u_n u_0^2 + 2u_n \sum_{m \neq 0, n} u_m^2 + u_{-n} u_0^2 \text{Cos}(2\varphi_0 - \varphi_n - \varphi_{-n}) + u_{-n} \sum_{m \neq 0, n} u_m u_{-m} \text{Cos}(\varphi_m + \varphi_{-m} - \varphi_n - \varphi_{-n})], \quad (28)$$

$$A_{n,2} |_{n \neq 0} = -(1+n \cdot \Delta)^{5/2} \sum_m \sum_p u_{n-m-p} u_{-p} u_m \cdot \quad (29)$$

$$\cdot \text{Sin}(\varphi_{n-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_n) - A_{n,1},$$

$$B_{n,2} |_{n \neq 0} = +(1+n \cdot \Delta)^{5/2} \sum_m \sum_p u_{n-m-p} u_{-p} u_m \cdot \quad (30)$$

$$\cdot \text{Cos}(\varphi_{n-m-p} - \varphi_{-p} + \varphi_m - \varphi_n) - B_{n,1}.$$

При  $\beta_{1L} = 1$  и  $\beta_{2L} = 0$  приходим к случаю S-теории (а) [21-22], при  $\beta_{1L} = 1$  и  $\beta_{2L} = 1$ , система уравнений есть следствие полного уравнения Лайтхилла вида (18), то есть без упрощений S-теории (б). Пространственно-временная структура волнового поля в системе покоя основной волны может быть представлена выражением

$$E(\xi, \tau) = u_0 \text{Cos}(\xi + \varphi_0) + \sum_{\substack{n \neq 0 \\ n > 0}} [u_n \cdot \text{Cos}\{-2 \frac{\sqrt{(1+n \cdot \Delta)} - (1+n \cdot \Delta)}{\alpha} \tau + (1+n \cdot \Delta) \cdot \xi + \varphi_n\} + u_{-n} \cdot \text{Cos}\{2 \frac{\sqrt{(1-n \cdot \Delta)} - (1-n \cdot \Delta)}{\alpha} \tau + (1-n \cdot \Delta) \cdot \xi + \varphi_{-n}\}], \quad (31)$$

где  $k_0 x = \xi$  и область пространства рассмотрения  $-\pi / \Delta < \xi < \pi / \Delta$ ,

$$\alpha = k_0^2 |A_0|^2, \tau = t \cdot \omega_0 \frac{k_0^2 |A_0|^2}{2} = t \cdot \sqrt{gk_0} \frac{k_0^2 |A_0|^2}{2}, \quad k_n / k_0 = 1 + n \cdot \Delta,$$

$-N < n < N = 200$ .

### 3. Численный анализ процессов модуляционной неустойчивости

#### Постановка задачи.

Для выполнения цели работы проводится ряд численных экспериментов и анализ результатов. Разработано программное обеспечение, реализующее представленные выше математические модели. Для среды со слабой дисперсией определяется поведение основной волны и ее энергии, спектров неустойчивости и их энергии, амплитуды огибающей волнового поля. Для среды с сильной дисперсией определяется поведение основной волны, спектров неустойчивости, распределение размахов (расстояний между гребнем и впадиной) волн и определение величины и частоты появления аномальных размахов.

Численный эксперимент представляет собой решение задачи Коши методом Эйлера. Численные эксперименты проводятся на графическом процессоре с помощью технологии CUDA. Все вычисления выполняются в двойной точности, кроме вычисления тригонометрических функций. Вычисление тригонометрических функций синуса и косинуса происходит в урезанной точности (функции `__sinf(x)`, `__cosf(x)`), что не влияет на точность вычислений в целом, при этом уменьшая время численного эксперимента на 70%.

**Огибающая волнового поля в средах со слабой дисперсией.** Практический интерес связан с транспортировкой волн большой амплитуды при малых уровнях поглощения вдали от порога  $\delta = \delta_{thr} = 1$ . Характерные времена модуляции амплитуды основной волны при уровне поглощения  $\delta = 0.1$  при учете всех видов взаимодействия мод становятся менее регулярными (рис. 1).

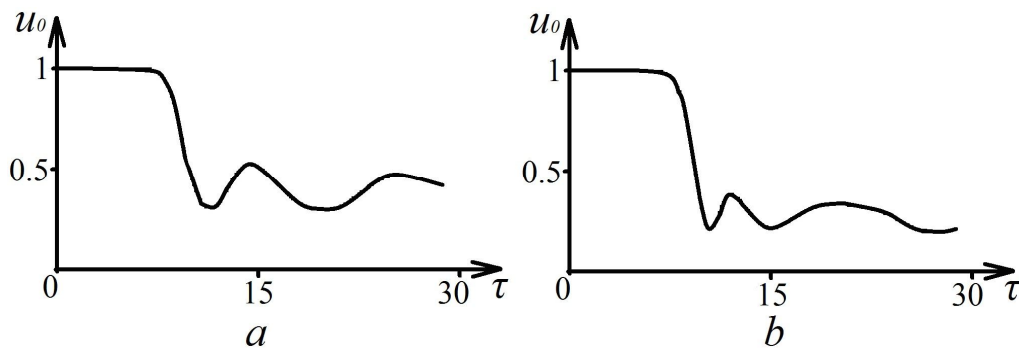


Рис. 1. Поведение амплитуды основной волны со временем для случаев применения S-теории (a) и рассмотрения без приближений (b) при  $\delta = 0.1$ ,  $N = 200$ .

Зависимости энергии спектра мод  $\sum_{m \neq 0} u_m^2$  и энергии основной волны

$u_0^2$  от времени в процессе развития неустойчивости, представлены на рис. 2. Явно заметен осцилляторный характер обмена энергией между основной волной и спектром неустойчивых мод.

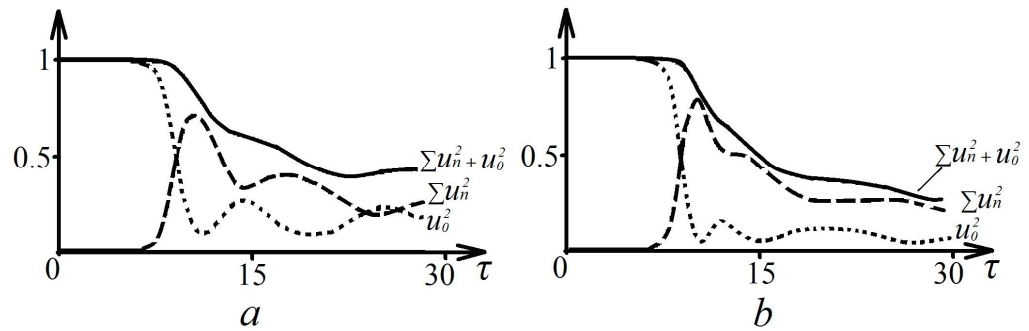


Рис.2. Зависимости энергии спектра мод  $\sum_{m \neq 0} u_m^2$ , энергии основной волны  $u_0^2$  и их суммы от времени для случаев применения S-теории (a) и рассмотрения без приближений (b) при  $\delta = 0.1$ ,  $N = 200$ .

Максимумы амплитуды огибающей в обоих случаях достигаются практически в одно время и примерно равны друг другу (рис.3).

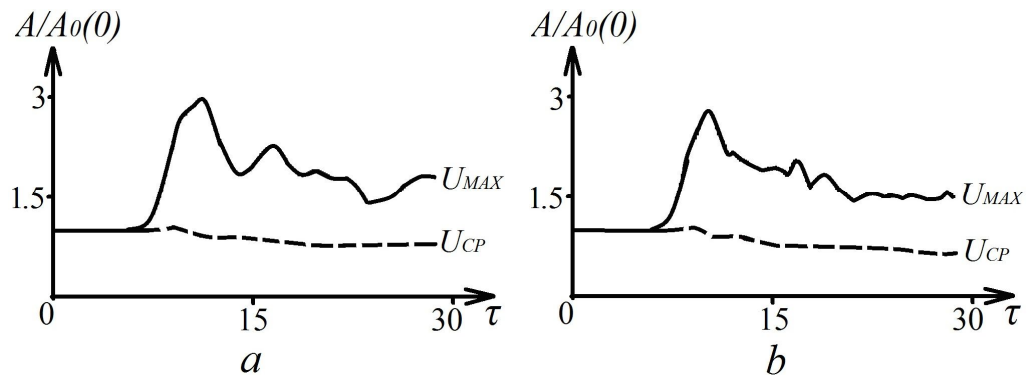


Рис.3. Максимальная (сплошная кривая) и средняя (пунктир) амплитуды огибающей волнового поля для случаев применения S-теории (a) и рассмотрения без приближений (b) при  $\delta = 0.1$ ,  $N = 200$ .

Изменяется и поведение спектра неустойчивости. Характерный для модуляционной неустойчивости двугорбый спектр в случае описания в рамках S-теории (a) сужается, а при рассмотрении без приближений (b) наблюдается противоположная тенденция к расширению. Времена рассмотрения спектра выбраны на линейной по амплитудам возмущений стадии процесса, в момент достижения максимальной амплитуды огибающей волнового поля и в стадии развитой неустойчивости (рис.4).

В условиях слабого поглощения энергия спектра модуляционной неустойчивости достигает значений, сравнимых с начальной энергией волны конечной амплитуды. Из рис.3 видно, что на начальной стадии нелинейного режима процесса возможно появление волн и всплесков огибающей с весьма большой амплитудой. В дальнейшем происходит



снижение амплитуды основной волны (рис.2, рис.3) и ее влияние на интерференцию мод спектра ослабляется, а амплитуда мод уменьшается.

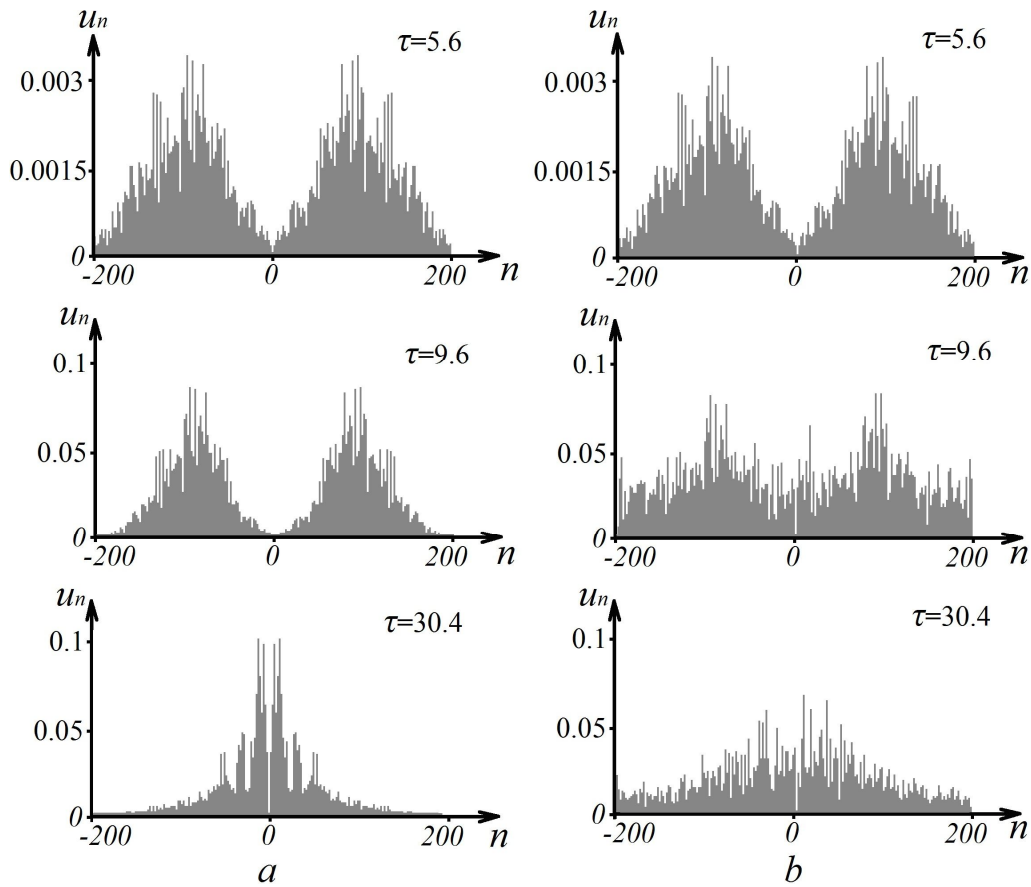


Рис. 4. Спектры неустойчивости для трех моментов времени в случае описания в рамках S-теории (а) и рассмотрения без приближений (б) при  $\delta = 0.1$ ,  $N = 200$ .

Характер модуляции основной волны в пространстве (фрагмент вблизи области с максимальной амплитудой огибающей) для тех же моментов времени для двух случаев описания неустойчивости представлен на рис.5.

Из результатов численного моделирования следует, что на начальной стадии процесса интенсивность поля в области максимума огибающей волн примерно на порядок превосходит средний уровень интенсивности.

**Волновое поле в средах с сильной дисперсией. Океанские волны.** В реальных условиях поглощение энергии гравитационных волн большой амплитуды на поверхности океана весьма мало. Поэтому рациональным будет проводить сравнение двух моделей описания для реалистичного случая очень малого поглощения  $\delta = 0.01$  и значительной амплитуды волнения

$$\Delta = \frac{0.566}{N}; \alpha = 0.01.$$

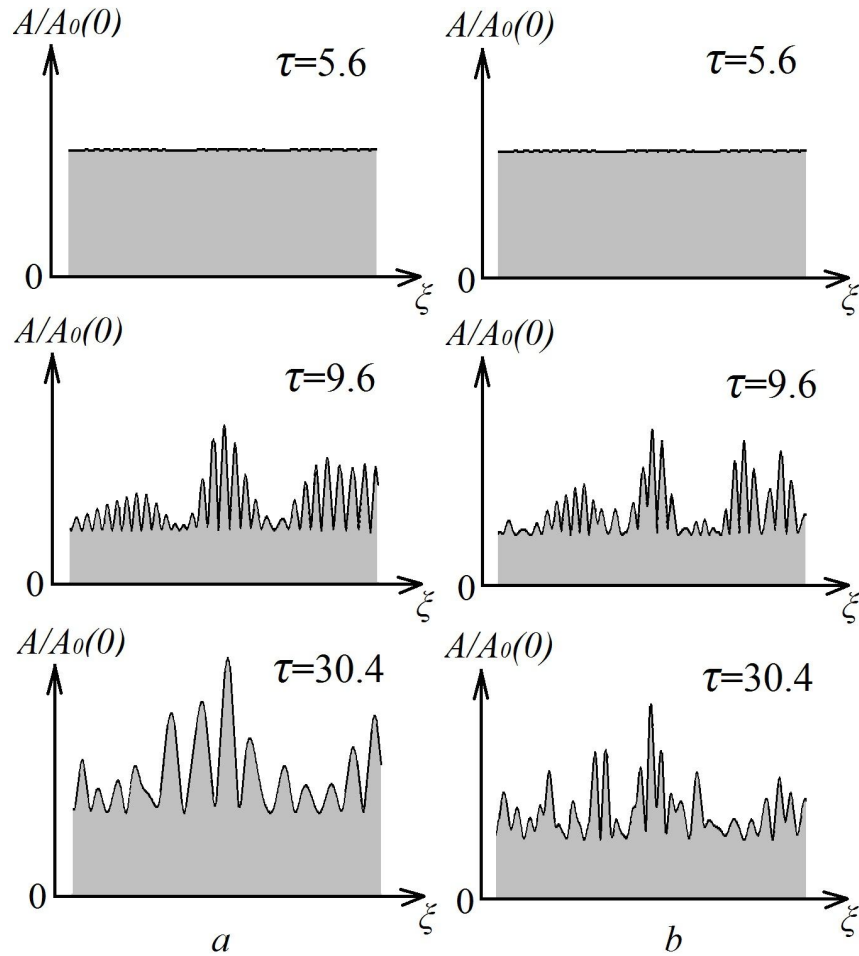


Рис.5. Модуляция основной волны для трех моментов времени в случае описания в рамках S-теории (a) рассмотрения без приближений (b) при  $\delta = 0.1$ ,  $N = 200$ .

Для анализа размахов волн (т.е. расстояния между верхней точкой гребня волны и нижней точкой впадины) выделим из них треть наибольших. Критерий, по которому выделяют anomalно большие волны обычно

$$U_{AG} > 2U_{SWH}, \quad (32)$$

где  $U_{AG}$  - anomalная волна,  $U_{SWH}$  - среднее значения размаха трети самых больших размахов.

На рис.6-10 приведем результаты расчетов, демонстрирующие развитие спектра неустойчивости для трех моментов времени в случае описания в рамках S-теории (a) и в общем случае рассмотрения без приближений (b).

Легко видеть формирование характерного двугорбого спектра (рис.6) модуляционной неустойчивости. Если в случае описания в рамках S-теории такая форма спектра сохраняется, то в общем случае описания спектр с развитием неустойчивости сглаживается.

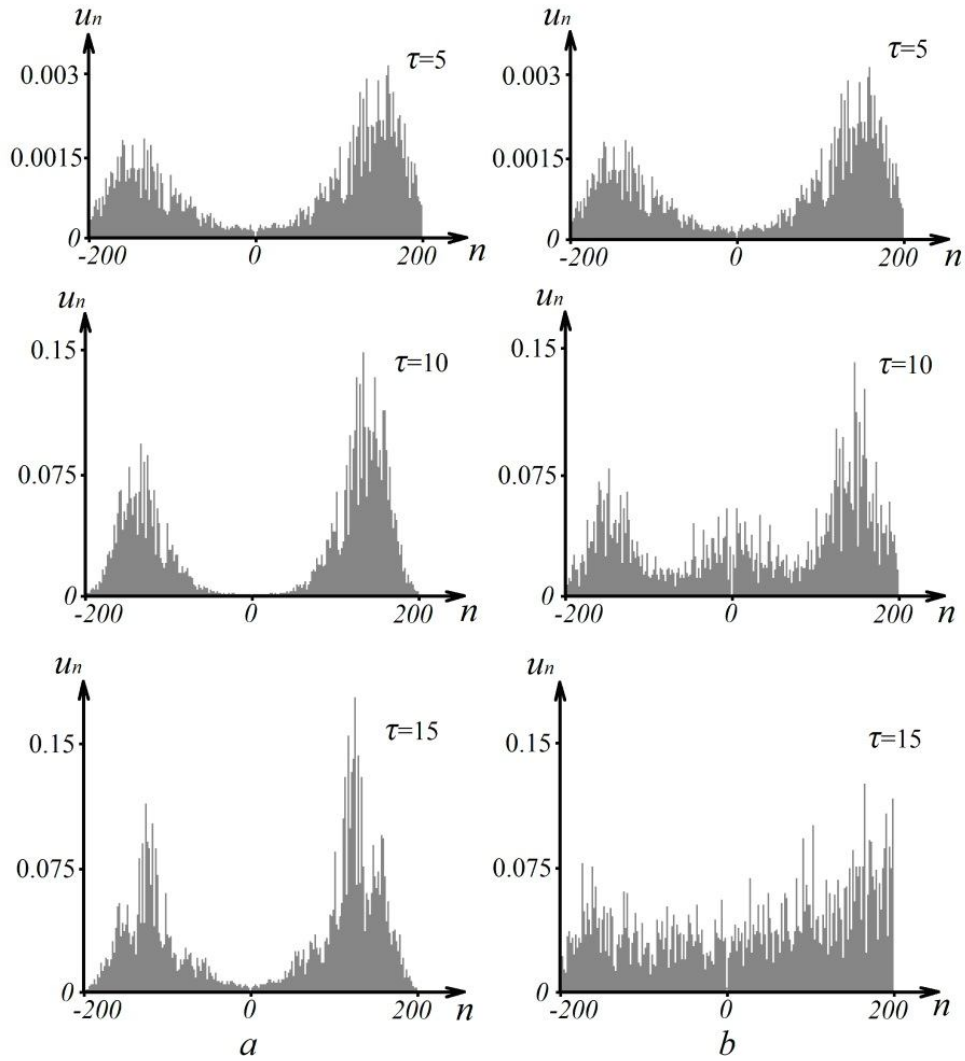


Рис. 6. Спектр неустойчивости для трех моментов времени в случае описания в рамках S-теории (a) и в общем случае рассмотрения без приближений (b).

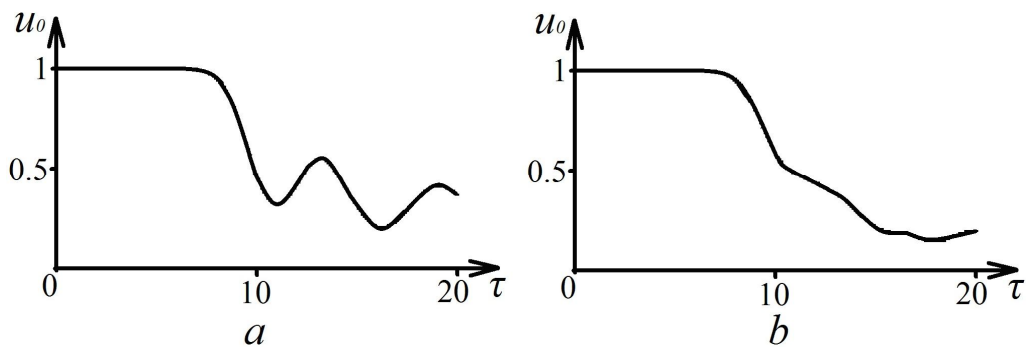


Рис. 7. Изменение амплитуды основной волны со временем в случае описания в рамках S-теории (a) и в общем случае рассмотрения без приближений (b).

Из рис.7 видно, что нерезонансные взаимодействия, для которых не выполнены соотношения S-теории, приводят к срыву осцилляторного режима поведения амплитуды основной волны, характерного для режима резонансного взаимодействия, описываемого S-теорией [21-22].

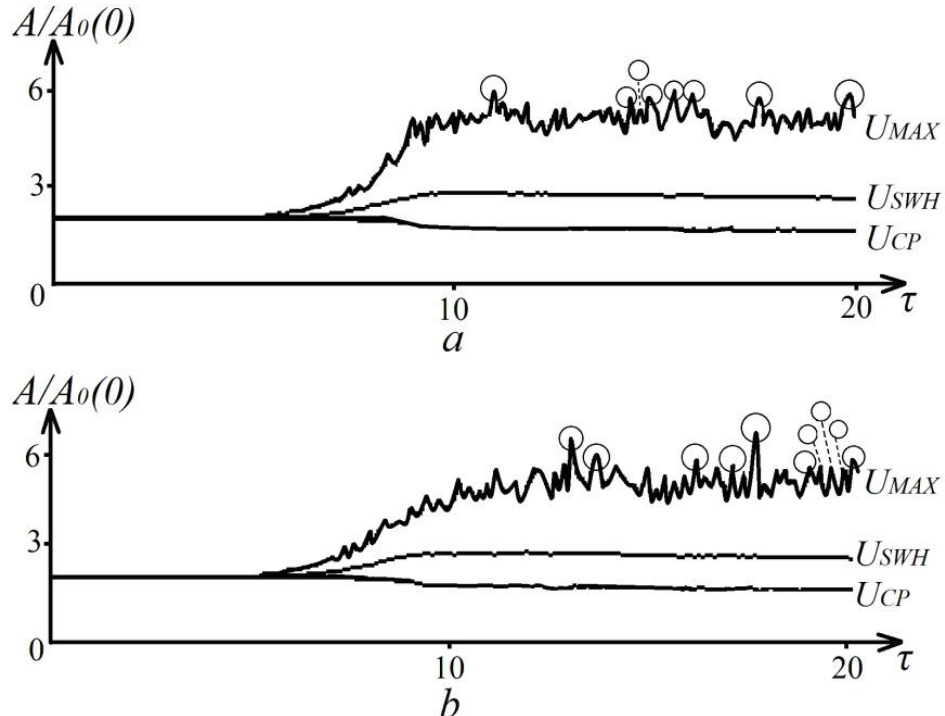


Рис.8. Средняя амплитуда  $U_{CP}$ , средняя амплитуда трети наибольших мод  $U_{SWH}$  и самый большой размах волны из ансамбля  $U_{Max}$ , как функции времени. Кружками отмечено появление волн аномальной амплитуды  $U_{AG}$  (32) в рамках S-теории (a) и в общем случае рассмотрения без приближений (b).

Распределения амплитуд размахов  $H$ , т.е. расстояний между верхней точкой гребня волны и нижней точкой впадины, в режиме развитой неустойчивости за все время расчетов представлены на рис. 9. Подсчет волн происходил в одном и том же варианте расчета через моменты времени, равные времени жизни аномально большой волны, в отличие от случая [21-22], где волны с разными амплитудами подсчитывались в многочисленных расчетах. В двух этих случаях частоты появления аномальных волн в статистике по ансамблям и времени почти не отличаются (одна аномальная волна на 15-20 тысяч волн).

Характер распределения размахов подобен [21-22], где их число подсчитывалось в разных реализациях и величины усреднялись по ансамблю реализаций. Число и распределение размахов обнаруженных волн аномальной амплитуды представлены в таблице 1. Следует обратить внимание на наличие выраженных «хвостов» распределений в обоих случаях.

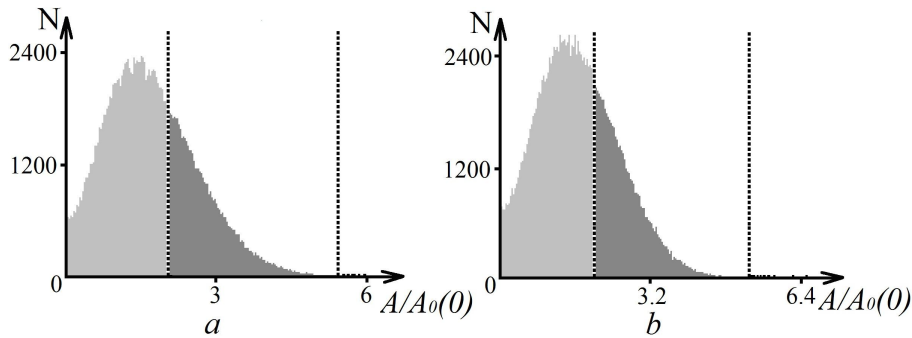


Рис.9. Распределение амплитуд размахов за все время расчетов в случае описания в рамках S-теории (а) и в общем случае рассмотрения без приближений (б). Пунктирные линии определяют границу между модами малой амплитуды и третью самых больших мод и величиной, в два раза превышающей среднее значение от трети самых больших мод. а) - всего размахов 173526, треть наибольших размахов 57842, размахов в 2 раза больше среднего трети наибольших размахов 8, б) - всего размахов 176386, треть наибольших размахов 58795, размахов в 2 раза больше среднего трети наибольших 10.

Табл.1. Число и распределение размахов обнаруженных волн аномальной амплитуды

$U_{AG} / 2U_{SWH}$	от 2 до 2.1	от 2.1 до 2.2	от 2.2 до 2.3	от 2.3 до 2.4	от 2.4 до 2.5	всего
Случай а: $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0$	4	2	2	-	-	8
Случай б: $\beta_1 = 1, \beta_2 = 1$	7	1	-	1	1	10

Анализ наблюдений и численных экспериментов показывает [24-34], что аномальные волны часто возникают в составе групп волн, имеющих форму солитоноподобных образований. И в данном случае такие волны появляются в составе групп больших волн, причем в общем случае длина модуляции меньше, чем при описании в рамках S-теории (см. рис.10). Большая волна с амплитудой, сравнимой с  $2U_{SWH}$  приходится на  $10^4$  волн, что согласуется со статистическими оценками, однако волны с амплитудой больше  $2.5U_{SWH}$  появляются значительно чаще, чем можно ожидать при случайной интерференции волнового движения.

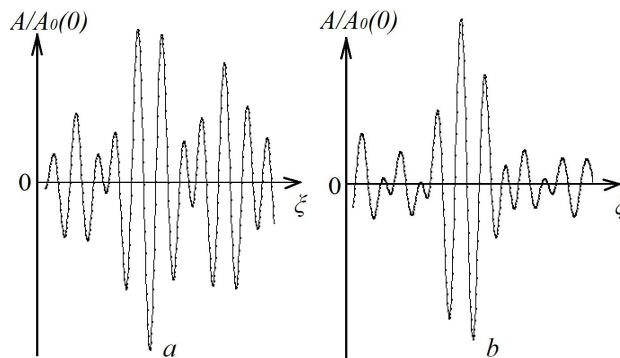


Рис.10. Характерный вид аномальных волн в составе групп волн в случае описания в рамках S-теории (а) и в общем случае рассмотрения без приближений (б).

#### 4. Выводы

При сравнении S-теории и более общей теории (то есть без упрощений S-теории) модуляционных неустойчивостей определено, что многие характеристики процесса неустойчивости оказываются близки, по крайней мере, на начальной стадии нелинейного режима неустойчивости. Подобными оказываются достигаемые максимальные амплитуды модуляции (оггибающей), отдельных волн, времена их появления. Таким образом, S-теория позволяет не только качественно, но количественно описывать начальную стадию нелинейного режима процесса модуляционной неустойчивости.

Результаты моделирования обнаруживают формирование цугов волн, короткое время жизни таких групп волн и поясняют природу расширения масштаба и уменьшения амплитуды модуляции волнового движения. Аномальные волны сверхвысокого размаха и амплитуды выявлены на начальной стадии модуляционной неустойчивости. На больших временах процесса амплитуда аномально больших волн оказывается меньше, чем на начальной стадии развитой неустойчивости. Определено, что частота появления аномальных волн и их амплитуды отвечают оценкам [33,35,36].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Contribution to the theory of waves in nonlinear dispersive system / M. J. Lighthill. // J.Inst. Math. Appl. 1965, V.1, N.2. p.269-306.
2. Zakharov V. E. Stability of nonlinear waves in dispersive media. // J Teor. Prikl.Fiz., 1966. V. 51, p 668-671. Weak-turbulence spectrum in a plasma without a magnetic field // Sov. Phys. JETP. - 1967. - Vol. 24(2), P.455-459. The Instability of Waves in Nonlinear Dispersive Media // Sov. Phys. JETP. - 1967. - Vol. 24. - P.740.
3. Silin V.P. Parametric resonance in plasma. / JETP. - 1965. - Vol. 48, N6. - P. 1679-1691.
4. Aliev Ju.M., Silin V.P. Oscillations theory of plasma, which situated in HF electromagnetic field. // JETP. - 1965. - V.48, N.3. - P.901-912.
5. Gorbunov L.M., Silin V.P. On the plasma instability in strong HF field // JETP. - 1965. - V.49, N.6. - P.1973-1981.
6. T. B. Benjamin and J. E. Feir. The disintegration of wave trains on deep water, J.Fluid Mech. - 1967. - P.417-430.
7. Автоволновые процессы. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г., // под ред. Д.С.Чернавского. - М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. , 1987. - с.240.
8. Автоволновые процессы в системах с диффузией // под редакцией М.Т. Греховой . - Горький: ИПФ АН СССР, 1981. - с.246.
9. Теория солитонов: метод обратной задачи. // Под ред. С.П. Новикова. - М.: Наука, 1980. - 327с.
10. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука. - 1978. - 240с.
11. Space dissipative Structures / V. M. Chernousenko, V. M. Kuklin, I. P. Panchenko, V. M. Vorob'ev // Nonlinear World. - 1990. - Vol. 2 (IV

- International Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, 1989, Singapore). - P.776-803.
12. Роль поглинання та дисипації енергії у формуванні просторових нелінійних структур у нерівноважних середовищах/ В. М. Куклин // УФЖ. Огляди. - 2004. - Т. 1, № 1. - С. 49-81.
  13. Куклин В.М. Об интерференционной природе формирования тонкой структуры лазерных импульсов и аномальных всплесков амплитуды колебаний в модели Лайтхилла / VIII Харитоновские научные чтения. 21-24 марта, 2006 г. Саров, Россия, Сб. докладов. - Саров, 2006. - С. 450-456. Effect of induced interference and the formation of spatial perturbation fine structure in nonequilibrium open-ended system. / V. M. Kuklin // Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ) Сер. «Плазменная электроника и новые методы ускорения». - 2006. - № 5 (5). - С. 63-68.
  14. Suhl H. Effective Nuclear Spin Interactions in Ferromagnets // Phys Rev. - 1958. - V.109, N2. - P.606.
  15. Schlomann E., Saunder J.H., Sirvets M.H. Band Ferromagnetic Resonance Experiments at High Peak Power Levels // J.Appl.Phys. - 1960. - V.31, Suppl. - P.386-395.
  16. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Новый механизм ограничения амплитуды СВ при параллельной накачке. // ФТТ. - 1969, т.11, с. 2047- 2055.
  17. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. Турбулентность спиновых волн за порогом их параметрического возбуждения // УФН. - 1974. - т. 114, №4. - с.609-654.
  18. Львов В.С. Нелинейные спиновые волны. - М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1987. - 272 с.
  19. Об интерференции в многомодовых режимах модуляционных неустойчивостей / Белкин Е.В., Киричок А.В., Куклин В.М. // Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ), сер. «Плазменная электроника и новые методы ускорения». - 2008. - № 4 (6). - С. 222-227.
  20. Belkin E.V. The mathematical models of the modulation instability processes of waves in media with cubic nonlinearity/- manuscript. PhD-thesis by speciality 01.05.02 - mathematical modeling and computational methods. V.N.Karasin's Kharkiv National University, Kharkiv, 2010. 150 P.
  21. Модуляционная неустойчивость волн, поддерживаемых внешним источником в среде с поглощением. / Белкин Е.В., Киричок А.В., Куклин В.М. // ВАНТ, Сер. «Плазменная электроника и новые методы ускорения, 2010, №4(68) ), с.291-295.
  22. Belkin E.V., Kirichok A.V., Kuklin V.M. Development of modulation instabilities in media with damping and forcing / Мощная импульсная электрофизика. High-power pulsed electrophysics. Международная конференция XIV Харитоновские тематические научные чтения. International conference XIV Khariton's topical scientific readings. Сборник докладов. Digest of technical papers - Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2013. - 534 с. - ил. с. 14-20.
  23. Нелинейные волны в диспергирующих средах / Карпман В.И. - М. Наука. 1973. - 175 с.

24. Statistical theory of gravity and capillary waves on the surface of a finite-depth fluid. Three-dimensional aspects of air-sea interaction. / Zakharov V.E. // *Eur. J. Mech. B Fluids* 1999, V.18(3), P.327-344.
25. L.W. Schwartz, J.D. Fenton. Strongly nonlinear waves, *Ann. Rev. Fluid. Mech.* - 1982. - V.14. - P.39-60.
26. L. Debnath. *Nonlinear Water Waves*. Academic Press, Boston, 1994.
27. Куркин А.А., Пелиновский Е.Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. Нижний Новгород: ННГУ, 2004.
28. Modulation instability of stokes wave - Freak wave. / Dyachenko A.I., Zakharov V.E. // *JETPLett* 2005, V.81(6). - P. 255-259.
29. Kharif C. and Pelinovsky E. Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon, *Eur. J. Mech. B-Fluid.*, 2006. - V.22(6) . - P.603-633.
30. D.-I. Yeom, B.J. Eggleton. Photonics: rogue waves surface in light. *Nature*. 2007. - V.450. - P.953-962.
31. D.R. Solli, C. Ropers, P. Koonath, B. Jalali. Optical rogue waves. *Nature*. 2007. - V.450. - P.1054-1064.
32. L.F. Burlaga, N.F. Ness, M.H. Acuna. Linear magnetic holes in a unipolar region of the heliosheath observed by Voyager 1, *J. Geophys. Res.*, 112 (2007) A07106.
33. C. Kharif, E. Pelinovsky, A. Slunyaev. *Rogue Waves in the Ocean*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009.
34. M.S. Ruderman. Freak waves in laboratory and space plasmas, *Eur. Phys. J. Special Topics*. - 2010. - V.185. - P.57-66.
35. Влияние гигантских волн на безопасность морской добычи и транспортировки углеводородов / С.Бадулин, А.Иванов, А.Островский. // *Технологии, ТЭК, №2*, 2005.
36. Distributions of extreme wave, crest and trough heights measured in the North Sea. / Stansell, P. // *Ocean Engineering*, 2005, vol. 32, no. 8-9. - P.1015-1036.