

УДК 517.922+519.642.2

## Комбинированный численный метод решения вырожденного нелинейного интегро-дифференциального уравнения с запаздываниями

А. Л. Пивень

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина*

Разработан численный метод решения нелинейного вырожденного интегро-дифференциального уравнения запаздывающего типа, которое возникает при описании переходных процессов в радиотехнических системах. Матричный коэффициент при производной может быть необратимым. Для дискретизации этого уравнения используются метод спектральных проекторов типа Рисса, явная схема Эйлера и квадратурная формула левых прямоугольников. Полученное при дискретизации разностное уравнение решается с помощью метода простых итераций. Доказана теорема сходимости разработанного численного метода.

**Ключевые слова:** вырожденное интегро-дифференциальное уравнение с запаздываниями, численное решение, комбинированный метод, сходимость

Розроблено чисельний метод розв'язання нелінійного виродженого інтегро-диференціального рівняння запізнюючого типу, що виникає при опису перехідних процесів у радіотехнічних системах. Матричний коефіцієнт при похідній може бути необерним. Для дискретизації цього рівняння використовуються метод спектральних проекторів типу Риса, явна схема Ейлера та квадратурна формула лівих прямокутників. Отримане при дискретизації різницеве рівняння розв'язується за допомогою методу простих ітерацій. Доведено теорему про збіжність розробленого чисельного методу.

**Ключові слова:** вироджене інтегро-диференціальне рівняння із запізненнями, комбінований метод, чисельний розв'язок, збіжність.

We have developed a numerical method for solving nonlinear degenerated integro-differential equation with delay, which appears when transients in radio technical systems are described. The matrix coefficient of derivative may be non-invertible. To discretize this equation, the method of Rietz type spectral projectors, explicit Euler scheme and left rectangles quadrature are used. The difference equation obtained during discretization is solved using simple iteration method. Convergence of developed numerical method is proved as a theorem.

**Key words:** degenerate delay integro-differential equation, numeric solution, combined method, convergence.

### 1. Введение

В данной работе предложен численный метод решения начальной задачи

$$\frac{d}{dt}(A_0 u(t)) + \sum_{j=0}^N B_j u(t - \omega_j) + \sum_{j=0}^N \int_{t_0 - \omega_j}^{t - \omega_j} \Phi_j(t, \tau) u(\tau) d\tau = f(t, u(t)), \quad t_0 \leq t \leq T \quad (1.1)$$

$$u(t) = g(t), \quad t_0 - \omega_N \leq t \leq t_0 \quad (1.2)$$

Здесь  $A_0, B_j$  ( $j = 0, \dots, N$ ) – постоянные квадратные матрицы порядка  $n$  с вещественными элементами, элементы  $n \times n$  матриц  $\Phi_j(t, \tau)$  непрерывны по

совокупности переменных на множествах  $\{(t, \tau) \in [t_0, T] \times [t_0 - \omega_j, T] : t_0 - \omega_j \leq \tau \leq t - \omega_j\}$  соответственно,  $f(t, x) \in C([t_0, T] \times R^n, R^n)$ ,  $g(t) \in C([t_0 - \omega_N, t_0], R^n)$ . Запозывания упорядочены :  $0 = \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_N$ . Следуя [1,2], под решением задачи (1.1),(1.2) на отрезке  $[t_0 - \omega_N, T]$  будем понимать вектор-функцию  $u(t) \in C([t_0 - \omega_N, T], R^n)$  такую, что  $A_0 u(t) \in C^1([t_0, T], R^n)$ ,  $u(t)$  удовлетворяет уравнению (1.1) при  $t \in [t_0, T]$  и начальному условию (1.2).

Уравнение (1.1) называется *неявным*, а в случае необратимости матрицы  $A_0$  – *вырожденным* [1,3]. Нелинейное уравнение (1.1) с вырожденной матрицей  $A_0$  получено в [4,5] при описании переходных процессов в радиотехнических системах.

Различные численные методы решения частного случая (1.1) – вырожденных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра

$$\frac{d}{dt}(A_0 u(t)) + B_0 u(t) + \int_{t_0}^t \Phi_0(t, s, u(s)) ds = f(t, u(t)), \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (1.3)$$

строились в [10–12] с путем замены производной в (1.3) конечной разностью и интегрального слагаемого (1.3) – квадратурной суммой. В [6] строилось численное решение дифференциально-алгебраического уравнения с запозываниями индекса 1 вида  $\frac{dx}{dt} = f(x(t), x(t-1), y(t), y(t-1));$

$y(t) = g(x(t), x(t-1), y(t))$  методом Рунге-Кутты и методом BDF. Построенные таким образом численные методы часто приводят к нелинейным разностным уравнениям, для которых не всегда удастся найти точное решение. В [8,9] для системы полулинейных дифференциально-алгебраических уравнений индекса 1 вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), y(t)); \quad (1.4)$$

$$y(t) = g(t, x(t), y(t)) \quad (1.5)$$

предлагались так называемые *комбинированные* численные методы, в которых замены производной конечной разностью в (1.4) приводила к системе разностных нелинейных уравнений, для численного решения которой, в свою очередь, применялись методы итераций или метод Ньютона. Именно, в [8] численное решение системы уравнений (1.4),(1.5) строилось на основе комбинаций разностных схем Эйлера и простых итераций и комбинаций схем Адамса и Ньютона, а в [9] для этой же системы рассмотрены комбинации методов Рунге-Кутты с методами простых итераций и Ньютона.

Как и в [8], в настоящей работе для построения численного метода решения задачи (1.1),(1.2) с характеристическим пучком  $\lambda A_0 + B_0$  индекса 1 используются комбинации явной схемы Эйлера и простых итераций, а замена интегральные слагаемые в (1.1) заменяются по формуле левых прямоугольников, как в [12]. Предварительно применяется метод спектральных проекторов типа Рисса [13] для расщепления уравнения на дифференциальное и

алгебраическое. Расщепленные уравнения превращаются в систему вида (1.4),(1.5) в случае отсутствия в (1.1) интегральных слагаемых и слагаемых, отвечающих запаздываниям. В отличие от [11,12] для доказательства сходимости вычислительного процесса не требуется знание точного решения ни в одной точке  $t > t_0$ .

## 2. Теорема существования и единственности решения

Линейной части уравнения (1.1) отвечает характеристический матричный пучок  $\lambda A_0 + B_0$ . Всюду в дальнейшем он предполагается регулярным ( $\det(\lambda A_0 + B_0) \neq 0$ ) [14] индекса 0 или 1. Введем пару взаимно дополнительных спектральных проекторов [13]

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=C_0} (\lambda A_0 + B_0)^{-1} A_0 d\lambda, \quad P_2 = E - P_1; \quad (2.1)$$

$$Q_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda|=C_0} A_0 (\lambda A_0 + B_0)^{-1} d\lambda, \quad Q_2 = E - Q_1,$$

где контур  $\{\lambda : |\lambda| = C_0\}$  охватывает конечный спектр пучка  $\lambda A_0 + B_0$ , а  $E$  – единичная матрица порядка  $n$ . По аналогии с оператором  $G$  из [3] введем матрицу

$$G = A_0 + B_0 P_2 = A_0 + Q_2 B_0.$$

Как и оператор  $G$  из [3], матрица  $G$  обратима. Для проекторов вида (2.1) свойства матрицы  $G$  установлены в [1].

Рассмотрим множество  $D$ , содержащее точку  $T$  и все точки отрезка  $[t_0, T]$ , представимые в виде  $t_0 + \sum_{j=0}^N l_j \omega_j$ , где  $l_j (j=0, \dots, N)$  – целые неотрицательные числа. В следующей теореме устанавливаются условия существования и единственности решения  $u(t) \in C^1([t_0 - \omega_N, T] \setminus D, R^n)$  задачи (1.1),(1.2).

**Теорема 1.** Пусть пучок матриц  $\lambda A_0 + B_0$  регулярный индекса не выше 1,  $f(t, x) \in C^1([t_0, T] \times R^n, R^n)$ ,  $g(t) \in C^1([t_0 - \omega_N, t_0], R^n)$ , элементы  $n \times n$  матриц  $\Phi_j(t, \tau)$  вещественны и непрерывно дифференцируемы по совокупности переменных на множествах  $\{(t, \tau) \in [t_0, T] \times [t_0 - \omega_j, T] : t_0 - \omega_j \leq \tau \leq t - \omega_j\}$  ( $j=0, \dots, N$ ) соответственно и при некоторой постоянной  $M > 0$  выполнено условие Липшица

$$\|G^{-1} Q_1 f(t, x) - G^{-1} Q_1 f(t, y)\| \leq M \|x - y\|, \quad x, y \in R^n, t \in [t_0, T]. \quad (2.2)$$

Предположим, что при некоторой постоянной  $q \in (0, 1)$  матрица Якоби  $J(t, x) = \{\partial(G^{-1} Q_2 f)_j / \partial x_k\}$  удовлетворяет ограничению

$$\|J(t, x)\| \leq q, \quad (t, x) \in [t_0, T] \times R^n \quad (2.3)$$

и выполнено условие согласования

$$Q_2 \sum_{j=0}^N B_j g(t_0 - \omega_j) = Q_2 f(t_0, g(t_0)) \quad (2.4)$$

на начальный вектор в (1.2) и правую часть в (1.1). Тогда существует единственное решение начальной задачи (1.1),(1.2) на  $[t_0 - \omega_N, T]$ , которое непрерывно-дифференцируемо, возможно, за исключением точек множества  $D$ , в которых производная может иметь скачки. При этом  $P_1 u(t) \in C^1([t_0, T], R^n) \cap C^2([t_0, T] \setminus D, R^n)$

**Доказательство** теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 2.8 работы [16], выполненной для нелинейного уравнения

$$\frac{d}{dt}(A_0 u(t)) + B_0 u(t) + B_1 u(t - \omega_1) = f(t, u(t)).$$

**Замечание.** В [1,15,16] получены локальные и глобальные теоремы существования и единственности решения задачи (1.1),(1.2) в бесконечномерных пространствах в случае  $\Phi_j(t, \tau) \equiv 0 (j = 0, \dots, N)$ .

### 3. Построение численного решения задачи (1.1),(1.2)

Всюду далее предполагаем выполнение условий теоремы 1. Как и в [1,3] применим к уравнению (1.1) проекторы  $Q_1, Q_2$ . Получим эквивалентную систему дифференциально-алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t)) + Sx(t) + G^{-1}Q_1 \sum_{j=1}^N B_j u(t - \omega_j) + \\ + G^{-1}Q_1 \sum_{j=0}^N \int_{t_0 - \omega_j}^{t - \omega_j} \Phi_j(t, \tau) u(\tau) d\tau = G^{-1}Q_1 f(t, u(t)); \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$y(t) = G^{-1}Q_2 f(t, u(t)) - G^{-1}Q_2 \sum_{j=1}^N B_j u(t - \omega_j) - G^{-1}Q_2 \sum_{j=0}^N \int_{t_0 - \omega_j}^{t - \omega_j} \Phi_j(t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad (3.2)$$

где  $x(t) = P_1 u(t)$ ,  $y(t) = P_2 u(t)$ ,  $S = G^{-1}Q_1 B_0$ .

Рассмотрим сеточную область  $\{t_i = t_0 + ih : i = -m_N, \dots, K\}$ , где шаг сетки  $h = \frac{T - t_0}{K}$  выбирается сколь угодно малым и таким, что величины  $m_k = \frac{\omega_k}{h} (k = 0, \dots, N)$  являются целыми. Обозначим через  $u_i$  значение приближенного решения задачи (1.1),(1.2) в узле сетки  $t_i (i = -m_N, \dots, K)$  и через  $x_i = P_1 u_i$ ,  $y_i = P_2 u_i$  его проекции:  $u_i = x_i + y_i$ . Заменим производную в уравнении (3.1) конечной разностью согласно явной схеме Эйлера, а интегральные слагаемые в (3.1),(3.2) – квадратурной формулой левых прямоугольников, как в [12]. Получаем следующую разностную схему:

$$x_{i+1} = (E - Sh)x_i - h \sum_{j=1}^N G^{-1} Q_1 B_j u_{i-m_j} - h^2 \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j-1} G^{-1} Q_1 \Phi_j(t_i, t_k) u_k + h G^{-1} Q_1 f(t_i, x_i + y_i); \quad (3.3)$$

$$y_{i+1} = G^{-1} Q_2 f(t_{i+1}, x_{i+1} + y_{i+1}) - \sum_{j=1}^N G^{-1} Q_2 B_j u_{i+1-m_j} - h \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} G^{-1} Q_2 \Phi_j(t_{i+1}, t_k) u_k; \quad (3.4)$$

$$u_{i+1} = x_{i+1} + y_{i+1}, \quad i = 0, \dots, K-1, \quad (3.5)$$

В силу принципа сжимающих отображений [20, с.44] уравнение (3.4) относительно неизвестного  $y_{i+1}$  однозначно разрешимо, если выполнено условие (2.3). Разностные уравнения (3.3)–(3.5) решаются при известных начальных условиях:

$$x_i = P_1 g(t_0 + ih), \quad y_i = P_2 g(t_0 + ih), \quad u_i = x_i + y_i, \quad i = -m_N, -m_N + 1, \dots, 0. \quad (3.6)$$

Однако процесс построения численного решения задачи (1.1), (1.2) по разностной схеме (3.3) – (3.6) вызывает трудности, связанные с необходимостью решения уравнения (3.4) относительно  $y_{i+1}$ . Уравнение (3.4) возникает только в случае необратимости матрицы  $A_0$ . В явном виде  $y_{i+1}$  легко находится из (3.4), если проекция  $Q_2 f(t, x)$  не зависит от  $x$ . Такое ограничение было использовано в [2, 15] при доказательстве теорем существования и единственности решения, а также в [17] при построении и доказательстве сходимости численного метода (3.3)–(3.6) решения задачи (1.1), (1.2). В следующей теореме указываются достаточные условия сходимости вычислительного метода (3.3)–(3.6) в условиях теоремы 1 без предположения о независимости проекции  $Q_2 f(t, x)$  от  $x$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда разностная схема (3.3)–(3.6) имеет первый порядок сходимости :

$$\max_{i=0, \dots, K} \|u(t_i) - u_i\| = O(h).$$

**Доказательство.** Пусть  $u(t) \in C^1([t_0 - \omega_N, T] \setminus D, R^n)$  – точное решение задачи (1.1), (1.2), которое существует в силу теоремы 1. Так как  $x(t) = P_1 u(t) \in C^1([t_0, T], R^n) \cap C^2([t_0, T] \setminus D, R^n)$ , то в силу формулы Тейлора и квадратурной формулы левых прямоугольников [18, с. 164]

$$x'(t_i) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} + O(h), \quad i = 0, \dots, K-1; \quad (3.7)$$

$$\int_{t_0 - \omega_j}^{t_i - \omega_j} \Phi_j(t_i, \tau) u(\tau) d\tau = h \sum_{k=-m_j}^{i-m_j-1} \Phi_j(t_i, t_k) u(t_k) + O(h), \quad i = 0, \dots, K, \quad j = 0, \dots, N. \quad (3.8)$$

При  $i = 0$  правая часть уравнения (3.8) равна  $O(h)$ . Положим в уравнении (3.1)  $t = t_i$ , в уравнении (3.2)  $t = t_{i+1}$  и воспользуемся формулами (3.7),(3.8). Получим

$$x(t_{i+1}) = (E - hS)x(t_i) - h \sum_{j=1}^N G^{-1} Q_1 B_j u(t_{i-m_j}) - h^2 \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j-1} G^{-1} Q_1 \Phi_j(t_i, t_k) u(t_k) + h G^{-1} Q_1 f(t_i, u(t_i)) + O(h^2), i = 0, \dots, K - 1; \tag{3.9}$$

$$y(t_{i+1}) = G^{-1} Q_2 f(t_{i+1}, u(t_{i+1})) - \sum_{j=1}^N G^{-1} Q_2 B_j u(t_{i+1-m_j}) - h \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} G^{-1} Q_2 \Phi_j(t_{i+1}, t_k) u(t_k) + O(h), i = 0, \dots, K - 1. \tag{3.10}$$

Обозначим  $\varepsilon_i^x = \|x_i - x(t_i)\|, \varepsilon_i^y = \|y_i - y(t_i)\|, i = -m_N, \dots, K$ . Очевидно, что

$$\varepsilon_i^x = \varepsilon_i^y = 0, \quad i = -m_N, \dots, 0. \tag{3.11}$$

В силу условия Липшица (2.2) и ограничения (2.3) имеем

$$\|G^{-1} Q_1 (f(t_i, u_i) - f(t_i, u(t_i)))\| \leq M(\varepsilon_i^x + \varepsilon_i^y), \quad i = 0, \dots, K. \tag{3.12}$$

$$\|G^{-1} Q_2 (f(t_i, u_i) - f(t_i, u(t_i)))\| \leq q(\varepsilon_i^x + \varepsilon_i^y), \quad i = 0, \dots, K. \tag{3.13}$$

Вычитая из уравнений (3.3),(3.4) уравнения (3.9),(3.10) соответственно, с учетом (3.12),(3.13) получим оценки

$$\varepsilon_{i+1}^x \leq (1 + Mh)\varepsilon_i^x + O(h)\varepsilon_i^y + O(h) \sum_{j=1}^N (\varepsilon_{i-m_j}^x + \varepsilon_{i-m_j}^y) + O(h^2) \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j-1} (\varepsilon_k^x + \varepsilon_k^y) + O(h^2); \quad i = 0, \dots, K - 1, \tag{3.14}$$

$$\varepsilon_{i+1}^y \leq q_0 \varepsilon_{i+1}^x + \sum_{j=1}^N L_j (\varepsilon_{i+1-m_j}^x + \varepsilon_{i+1-m_j}^y) + O(h) \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} (\varepsilon_k^x + \varepsilon_k^y) + O(h); \quad i = 0, \dots, K - 1, \tag{3.15}$$

где  $L_j = \frac{\|G^{-1} Q_2 B_j\|}{1 - q} (j = 1, \dots, N), q_0 = \frac{q}{1 - q}$ . Оценим  $\varepsilon_{i+1}^x$  в правой части (3.15)

с помощью неравенства (3.14). Тогда (3.15) примет вид

$$\varepsilon_{i+1}^y \leq q_0(1 + Mh)\varepsilon_i^x + \sum_{j=1}^N L_j (\varepsilon_{i+1-m_j}^x + \varepsilon_{i+1-m_j}^y) +$$

$$+ O(h) \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} (\varepsilon_k^x + \varepsilon_k^y) + O(h); \quad i = 0, \dots, K-1, \quad (3.16)$$

Применяя рекуррентно (3.14),(3.16) и учитывая начальные условия (3.11), получим оценки

$$\varepsilon_i^x \leq \sum_{l=1}^i (1+Mh)^{i-l} F_{l-1}^1 + F_{i-1}^1, \quad i = 1, \dots, K \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_i^y \leq q_0 \sum_{l=1}^i (1+Mh)^{i-l} F_{l-1}^1 + F_{i-1}^2, \quad i = 1, \dots, K, \quad (3.18)$$

где

$$F_i^1 = F_i^1(\varepsilon_1^x, \varepsilon_1^y, \dots, \varepsilon_i^x, \varepsilon_i^y) = O(h)\varepsilon_i^y + O(h) \sum_{j=1}^N (\varepsilon_{i-m_j}^x + \varepsilon_{i-m_j}^y) + O(h^2) \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j-1} (\varepsilon_k^x + \varepsilon_k^y) + O(h^2),$$

$$F_i^2 = F_i^2(\varepsilon_1^x, \varepsilon_1^y, \dots, \varepsilon_i^x, \varepsilon_i^y) = \sum_{j=1}^N L_j (\varepsilon_{i+1-m_j}^x + \varepsilon_{i+1-m_j}^y) + O(h) \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} (\varepsilon_k^x + \varepsilon_k^y) + O(h).$$

Тогда с учетом нулевых начальных условий (3.11), вида вектор - функций  $F_i^1, F_i^2$ , оценок (3.17),(3.18) и неравенств

$$(1+Mh)^i \leq e^{M(T-t_0)}, \quad i = 1, \dots, K, \quad (3.19)$$

получаем линейное дискретное разностное неравенство для норм векторов

$$\varepsilon_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_i^x \\ \varepsilon_i^y \end{pmatrix}$$

$$\|\varepsilon_i\| \leq O(h) \sum_{j=0}^{i-1} \|\varepsilon_j\| + O(h), \quad i = 1, \dots, k_1 = \min\{m_1, K\}. \quad (3.20)$$

В силу следствия 4.1.2 [19, с. 186] из (3.20) получаем

$$\max_{i=1, \dots, k_1} \|\varepsilon_i\| \leq O(h)(1+O(h))^{k_1} = O(h), \quad (3.21)$$

что доказывает сходимость вычислительного процесса на отрезке  $[t_0, t_0 + \omega_1] \cap [t_0, T]$ . Если  $t_0 + \omega_1 < T$ , то рассмотрим систему разностных

неравенств (3.17),(3.18) для  $i = m_1, \dots, k_2 - 1$ , где  $k_2 = \min\{K, 2m_1\}$ . Эта система исследуется при начальном условии

$$\|\varepsilon_i\| = O(h), \quad i = -m_N, \dots, m_1, \quad (3.22)$$

справедливым в силу соотношений (3.11) и (3.22). Повторяя проведенные выше рассуждения относительно неравенств (3.14), (3.16) с учетом начального условия (3.22) и оценки (3.19), получим  $\max_{i=1, \dots, k_2} \|\varepsilon_i\| = O(h)$ . За конечное число

шагов получим оценку

$$\max_{i=1, \dots, K} \|\varepsilon_i\| = O(h),$$

которая доказывает теорему.

Как уже отмечалось выше, процесс построения численного решения задачи (1.1),(1.2) по разностной схеме (3.3)–(3.6) связан с трудностями разрешимости уравнения (3.4) относительно  $y_{i+1}$ . Условие сжимаемости (2.3) позволяет построить приближенное решение этого уравнения с использованием метода простых итераций подобно тому, как это делалось в [9] для дифференциально-алгебраических уравнений вида (1.4). Поэтому мы изменим вычислительную схему (3.3)–(3.6). Будем искать приближенное решение  $\hat{u}_i = \hat{x}_i + \hat{y}_i = P_1 \hat{u}_i + P_2 \hat{u}_i$  в узлах сетки  $t_i (i = -m_N, \dots, K)$ . Разностное уравнение (3.4) заменим следующим

$$\begin{aligned} \hat{x}_{i+1} = & (E - Sh)\hat{x}_i - h \sum_{j=1}^N G^{-1} Q_1 B_j \hat{u}_{i-m_j} - h^2 \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j-1} G^{-1} Q_1 \Phi_j(t_i, t_k) \hat{u}_k + \\ & + h G^{-1} Q_1 f(t_i, \hat{x}_i + \hat{y}_i), \quad i = 0, \dots, K-1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Численное решение  $\hat{u}_i$  также удовлетворяет начальным условиям (3.6):

$$\hat{x}_i = P_1 g(t_0 + ih), \quad \hat{y}_i = P_2 g(t_0 + ih), \quad \hat{u}_i = \hat{x}_i + \hat{y}_i, \quad i = -m_N, -m_N + 1, \dots, 0. \quad (3.24)$$

Для нахождения  $\hat{y}_{i+1} (i = 0, \dots, K-1)$  с учетом найденных уже векторов  $\hat{x}_{i+1}, \hat{u}_k (k = 0, \dots, i)$  определяем последовательность итераций

$$\begin{aligned} z_{i+1,0} = & \hat{y}_i, \quad z_{i+1,s} = G^{-1} Q_2 f(t_{i+1}, \hat{x}_{i+1} + z_{i+1,s-1}) - \sum_{j=1}^N G^{-1} Q_2 B_j \hat{u}_{i+1-m_j} - \\ & - h \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} G^{-1} Q_2 \Phi_j(t_{i+1}, t_k) \hat{u}_k, \quad s = 1, \dots, m; \quad i = 0, \dots, K-1, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где  $m = m(h) = \left\lceil \frac{2 \ln h}{\ln q} \right\rceil + 1$ ,  $[x]$  – целая часть числа  $x$ . В силу принципа сжимающих отображений [20, с.44] существуют предельные векторы  $z_{i+1} = \lim_{s \rightarrow \infty} z_{i+1,s} (i = 0, \dots, K-1)$ , удовлетворяющие соответствующим уравнениям



$$z_{i+1} = G^{-1}Q_2 f(t_{i+1}, \hat{x}_{i+1} + z_{i+1}) - \sum_{j=1}^N G^{-1}Q_2 B_j \hat{u}_{i+1-m_j} - \\ - h \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} G^{-1}Q_2 \Phi_j(t_{i+1}, t_k) \hat{u}_k, \quad i = 0, \dots, K-1 \quad (3.26)$$

и оценкам [20, с. 45]

$$\|z_{i+1} - \hat{y}_{i+1}\| \leq \frac{q^m}{1-q} \|\hat{y}_i - G^{-1}Q_2 f(t_{i+1}, \hat{x}_{i+1} + \hat{y}_i) + \sum_{j=1}^N G^{-1}Q_2 B_j \hat{u}_{i+1-m_j} + \\ + h \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} G^{-1}Q_2 \Phi_j(t_{i+1}, t_k) \hat{u}_k\|, \quad i = 0, \dots, K-1 \quad (3.27)$$

Таким образом, соотношения (3.23)–(3.25), (3.6) приводят к построению численного решения  $\hat{u}_i$  задачи (1.1), (1.2) в узле сетки  $t_i$ . Докажем теорему сходимости вычислительного метода (3.23)–(3.25), (3.6). Предварительно докажем вспомогательную лемму, в которой по существу устанавливается сходимость вычислительной схемы (3.23)–(3.25), (3.6) к решению задачи (3.3)–(3.6).

**Лемма 1.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$\max_{i=0, \dots, K} \|\hat{u}_i - u_i\| = O(h).$$

**Доказательство.** Обозначим  $\delta_i^x = \|x_i - \hat{x}_i\|$ ,  $\delta_i^y = \|y_i - \hat{y}_i\|$ ,  $i = -m_N, \dots, K$ . Вычитая из уравнения (3.3) уравнение (3.23), с учетом условия Липшица (2.2), получаем неравенство (ср. с (3.14))

$$\delta_{i+1}^x \leq (1 + Mh)\delta_i^x + O(h)\delta_i^y + O(h) \sum_{j=1}^N \left( \delta_{i-m_j}^x + \delta_{i-m_j}^y \right) + \\ + O(h^2) \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j-1} (\delta_k^x + \delta_k^y) + O(h^2); \quad i = 0, \dots, K-1 \quad (3.28)$$

Вычитая из уравнения (3.4) уравнение (3.26) с учетом условия сжимаемости (2.3), получаем неравенство (ср. с (3.15))

$$\|y_{i+1} - z_{i+1}\| \leq q_0 \delta_{i+1}^x + \sum_{j=1}^N L_j \left( \delta_{i+1-m_j}^x + \delta_{i+1-m_j}^y \right) + \\ + O(h) \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} (\delta_k^x + \delta_k^y), \quad i = 0, \dots, K-1. \quad (3.29)$$

Теперь с учетом (3.27) и (3.29) получаем оценку для  $\delta_{i+1}^y$ :

$$\begin{aligned} \delta_{i+1}^y \leq & \|y_{i+1} - z_{i+1}\| + \|\hat{y}_{i+1} - z_{i+1}\| \leq q_0 \delta_{i+1}^x + \sum_{j=1}^N L_j \left( \delta_{i+1-m_j}^x + \delta_{i+1-m_j}^y \right) + \\ & + O(h) \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} (\delta_k^x + \delta_k^y) + \frac{q^m}{1-q} \|\hat{y}_i - G^{-1} Q_2 f(t_{i+1}, \hat{x}_{i+1} + \hat{y}_i) + \\ & + \sum_{j=1}^N G^{-1} Q_2 B_j \hat{u}_{i+1-m_j} + h \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} G^{-1} Q_2 \Phi_j(t_{i+1}, t_k) \hat{u}_k\|, \quad i = 0, \dots, K-1. \quad (3.30) \end{aligned}$$

В силу теоремы 2 и непрерывности функции  $f(t, x)$  существует постоянная  $C_2 > 0$  такая, что при достаточно малых  $h > 0$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|y_i - G^{-1} Q_2 f(t_{i+1}, x_{i+1} + y_i) + \\ & + \sum_{j=1}^N G^{-1} Q_2 B_j u_{i+1-m_j} + h \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} G^{-1} Q_2 \Phi_j(t_{i+1}, t_k) u_k\| \leq C_2, \quad i = 0, \dots, K-1. \quad (3.31) \end{aligned}$$

Оценим правую часть неравенства (3.30) с помощью (3.28), (3.31) и неравенства  $q^m \leq h^2 = O(h^2)$ , вытекающего из определения  $m = m(h)$ . Получим оценку

$$\begin{aligned} \delta_{i+1}^y \leq & q_0(1 + Mh) \delta_i^x + \sum_{j=1}^N L_j \left( \delta_{i+1-m_j}^x + \delta_{i+1-m_j}^y \right) + \\ & + O(h) \sum_{j=0}^N \sum_{k=-m_j}^{i-m_j} (\delta_k^x + \delta_k^y) + O(h^2); \quad i = 0, \dots, K-1, \quad (3.32) \end{aligned}$$

Система неравенств (3.28), (3.32) исследуется аналогично системе неравенств (3.14), (3.16), полученной при доказательстве теоремы 2, с учетом начальных условий  $\delta_i^x = \delta_i^y = 0, i = -m_N, \dots, 0$ . Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 2 для (3.14), (3.16), получим  $\max_{i=0, \dots, K} (\delta_i^x + \delta_i^y) = O(h)$ .

Лемма доказана.

Теперь из утверждений теоремы 2 и леммы 1 непосредственно вытекает теорема сходимости вычислительного метода (3.23)–(3.25).

**Теорема 3.** В условиях теоремы 1 численный метод (3.23)–(3.25), (3.6) имеет первый порядок сходимости:  $\max_{i=0, \dots, K} \|u(t_i) - u_i\| = O(h)$

#### 4. Пример

На рис. 1–2 приведены в графической форме результаты численного решения задачи (1.1), (1.2). Эта задача рассмотрена в пространстве  $R^2$  на отрезке  $[t_0, T] = [0, 100]$ , причем  $N = 2, \omega_j = j (j = 1, 2), A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ -0.3 & 0.1 \end{pmatrix}, f(t, x) = \begin{pmatrix} \cos t + 0.01 \sin^2 x_1 \\ \sin t + 0.01 \sin(x_1 + x_2) \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$g(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_0(t, \tau) = \frac{1}{(t-\tau)^2 + 1} \begin{pmatrix} (t-\tau)^2 & t-\tau \\ (t-\tau)+4 & t-\tau+1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1(t, \tau) = \frac{1}{(t-\tau)^2 + 1} \begin{pmatrix} t-\tau+2 & t-\tau \\ (t-\tau)^2 & t-\tau \end{pmatrix}, \Phi_2(t, \tau) = \frac{1}{(t-\tau)^2 + 1} \begin{pmatrix} 2(t-\tau) & 1 \\ (t-\tau) & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Пучок}$$

$\lambda A_0 + B_0$  регулярный и имеет индекс 1. При этом  $P_1 = Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$P_2 = Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $G = E$  и выполняются соотношения (2.3), (2.4). Функция

$f(t, x)$  удовлетворяет ограничениям (2.2), (2.3) с постоянными  $M = q = 0.02$ .

Поэтому условия теорем 1–3 выполнены. В силу теоремы 3 для нахождения численного решения этой задачи на отрезке  $[0, T]$  можно использовать вычислительную схему (3.23)–(3.25), (3.6), которая имеет первый порядок сходимости.

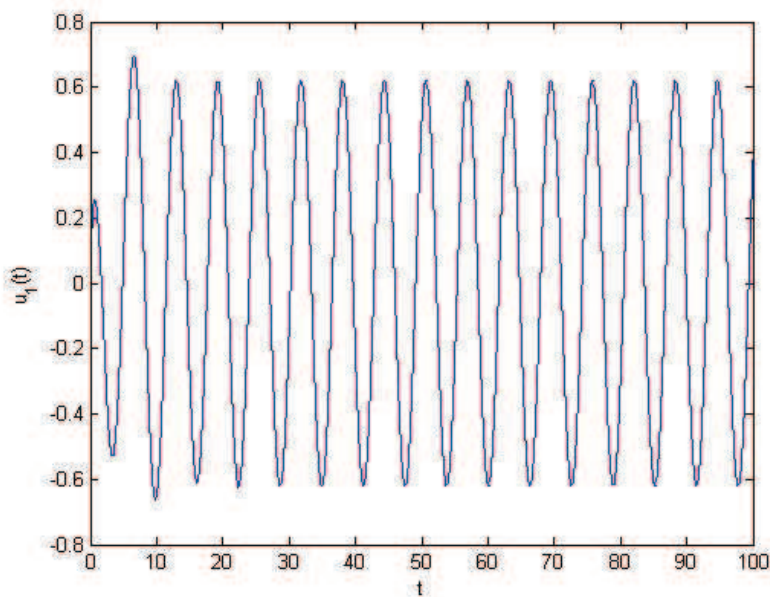


Рис. 1

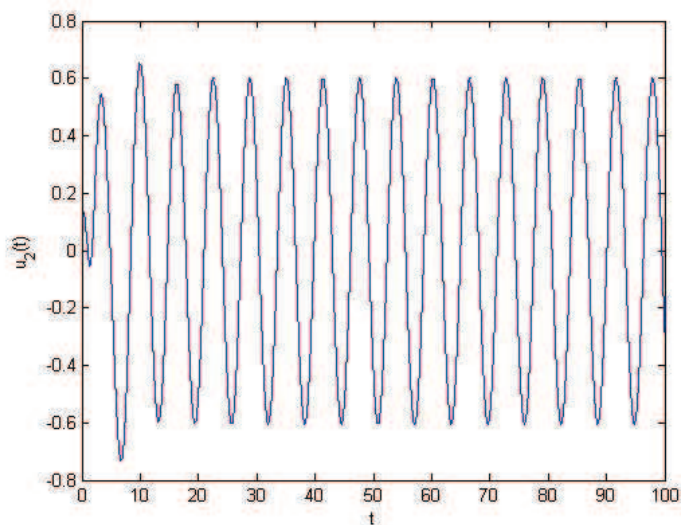


Рис.2

### 5. Выводы

Вычислительная схема (3.23)–(3.25),(3.6) позволяет находить численное решение определенных классов вырожденных интегро-дифференциальных уравнений вида (1.1). Условия сходимости этой схемы установлены в теореме 3. Разработанный в статье численный метод может быть использован для построения приближенного решения уравнений вида (1.1), удовлетворяющих условиям теоремы 1.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Rutkas A.G., Vlasenko L.A. Existence, uniqueness and continuous dependence for implicit semilinear functional differential equations // *Nonlinear Analysis. TMA.*–2003–V. 55, № 1-2.–P.125–139.
2. Пивень А.Л. Существование и единственность решения одного вырожденного интегро-дифференциального уравнения с запаздываниями // *Вісник Харк. Нац. Університету імені В.Н. Каразіна. Серія Математика, прикладна математика і механіка.*–2011.–№ 967.– С. 17–31.
3. Власенко Л.А., Мышкис А.Д., Руткас А.Г. Об одном классе дифференциальных уравнений параболического типа с импульсными воздействиями // *Дифференциальные уравнения.*–2008.–Т.44, № 2.– С. 222–231.
4. Власенко Л.А. Руткас А.Г. Переходные процессы в цепях с диспергирующими многопроводными линиями передачи // *Радиотехника.*–2010.– № 161.– С. 105–114.
5. Rutkas A.G., Vlasenko L.A. Time-domain descriptor models for circuits with multiconductor transmission lines and lumped elements // *Proceedings of IEEE*

- 5-th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals.–Sevastopol, Ukraine, September 6–10.–2010.–P. 102–104.
6. Ascher M., Petzold L. The numerical solution of delay-differential-algebraic equations of retarded and neutral type // *SIAM J.Numer.Anal.*–1995.–Vol.32, №5.–P.1635–1657.
  7. Brennan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. Numerical solution of initial-value problems in differential algebraic equations.–SIAM: Classic in Applied Mathematics, 1995.–256 p.
  8. Куликов Г.Ю. О численном решении автономной задачи Коши с алгебраической связью на фазовые переменные // *Журнал выч. математики и мат. физики.* – 1993.– Т.33, № 4.–С. 522–540.
  9. Куликов Г.Ю. Теоремы сходимости для итеративных методов Рунге-Кутты с постоянным шагом интегрирования // *Журнал выч. математики и мат. физики.* – 1996.– Т.36, № 8.–С. 73–89.
  10. Булатов М.В., Чистякова Е.В. Численное решение интегро-дифференциальных систем с вырожденной матрицей перед производной многошаговыми методами // *Дифференциальные уравнения.*–2006.–Т. 42, № 9.– С. 1248–1255.
  11. Чистякова Е.В. Дифференциально-алгебраические уравнения с малым нелинейным членом // *Дифференциальные уравнения.*–2009.–Т. 45, № 11.– С. 1365–1368.
  12. Чистякова Е.В., Чистяков В.Ф. О разрешимости вырожденных систем квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений общего вида // *Вычислительные технологии.*–2011.–Т. 16, № 5.– С. 100–113.
  13. Руткас А.Г. Задача Коши для уравнения  $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$  // *Дифференциальные уравнения.*–1975.–Т.11, № 11.–С. 1996–2010.
  14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.– М.: Наука, 1988.– 548 с.
  15. Власенко Л.А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. – Днепропетровск: Системные технологии, 2006.–273 с.
  16. Власенко Л.А. Математические модели с уравнениями типа Соболева: Учебное пособие.– Харьков: ХНУ им.В.Н.Каразина, 2011.– 112 с.
  17. Пивень А.Л. Численное решение вырожденного интегро-дифференциального уравнения с запаздываниями// *Вісник Харк. Нац. Університету імені В.Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління».*–2013.–№ 1058.–С. 132–141.
  18. Agarval R. Difference equations and inequalities. Theory, methods and applications. – Marcel: Chapman and Hall/CRC Pure and Applied Mathematics, 2000.–971 p.
  19. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.:Наука, 1989.– 432 с.
  20. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа.–М.: Физматлит, 1965.–520 с.