

УДК 539.3

## Гибридный метод оптимизации в задаче отстройки цилиндрического резервуара от резонансных частот

О. Д. Егорова, Г. А. Шелудько

*Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина*

Решена задача отстройки от резонансных частот для цилиндрического резервуара. Данная задача рассмотрена с позиций методов оптимального проектирования. Для ее решения применен гибридный адаптивный метод оптимизации. Последовательность поисковых точек, величина шага и направление поиска генерируются с помощью специально разработанных процедур.

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, резонансные частоты, оптимизация.

Розв'язано задачу відбудови від резонансних частот для циліндричного резервуара. Ця задача розглянута з позицій методів оптимального проектування. Для її вирішення застосовано гібридний адаптивний метод оптимізації. Послідовність пошукових точок, величина кроку і напрямок пошуку генеруються за допомогою спеціально розроблених процедур.

**Ключові слова:** циліндрична оболонка, резонансні частоти, оптимізація.

The problem of detuning from resonance frequencies was solved for cylindrical tank. This problem was considered from the standpoint of optimal design methods. To solve it, the adaptive hybrid optimization method was applied. The sequence of search points as well as search step size and direction are generated by specially designed procedures.

**Key words:** cylindrical shell, the resonance frequencies, optimization.

### 1. Введение

Тонкостенные конструкции типа оболочек встречаются в различных областях техники, таких как машиностроение, приборостроение, авиастроение, ракетостроение, в различных видах наземного транспорта, в энергетическом строительстве. Формы объектов, которые могут быть причислены к этому классу, довольно разнообразны: корпуса различных машин, улитки турбин, корпуса ракет, судов, трубопроводы, цистерны, элементы нефте- и газопроводов, резервуары и другие емкости в промышленной аппаратуре. Большое распространение оболочек объясняется их экономичностью по сравнению с равнопрочными конструкциями, состоящими из плоских пластин. Цилиндрические оболочки – наиболее употребляемые в практике объекты, относящиеся к классу оболочек вращения. Цистерны, воздушные и газовые баллоны обычно представляют собой оболочки вращения цилиндрической формы[1]. Отметим также, что не только оценка состояния существующего оборудования, но и проектирование новых высокоэффективных машин и сооружений, обладающих необходимым уровнем надежности, требует определения прочностных характеристик их элементов. Эти данные позволяют оценить предел прочности конструкции при ударном либо сейсмическом воздействии, произвести отстройку от нежелательных резонансных частот, выявить еще на стадии проектирования наиболее опасные с точки зрения концентрации напряжений зоны.

## 2. Существующие методы прочностного расчета оболочек

Анализ работ, посвященных расчету оболочек, в том числе тех, которые моделируют резервуары с опасными наполнителями, позволяет выделить на данный момент как основные и наиболее эффективные методы численного интегрирования метод конечных разностей и методы конечных и граничных элементов. Методы численного интегрирования применяются, в основном, для расчета оболочек вращения. Эти методы основаны на сведении краевой задачи к ряду задач Коши, которые решаются хорошо разработанными методами численного интегрирования обычных дифференциальных уравнений.

В 1961 году С.К. Годунов предложил метод ортогонализации [2], который позволяет получить численное решение краевых задач для линейных дифференциальных уравнений, когда одновременно существуют быстро возрастающие и быстро убывающие решения. На основе этого метода разработаны эффективные алгоритмы расчета оболочек. К задачам статики несимметрично нагруженных изотропных оболочек вращения метод впервые был применен Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко [3]. Универсальный алгоритм расчета на прочность, устойчивость и колебания осесимметрично нагруженных конструкций, составленных из набора изотропных и ортотропных оболочек вращения, соединенных между собой непосредственно или при помощи упругих шпангоутов, предложен А.В. Кармишиным, В.А. Лясковцом, В.И. Мяченковым, А.И. Фроловым [4].

## 3. Постановка задачи

В данной работе для решения задачи об отстройке цилиндрического резервуара от резонансных частот будем использовать гибридный метод оптимизации [5]. В работе определяются параметры цилиндрической оболочки, при которых наименьшая собственная частота будет больше заданной, чтобы избежать резонанса.

Приведем уравнения движения цилиндрической оболочки.

Определим положение произвольной точки  $M$  на срединной поверхности оболочки координатами  $\alpha = x/R$  и  $\beta = S/R$ , где  $x$  - координата вдоль образующей,  $S$  - длина дуги в окружном направлении,  $R$  - радиус кривизны срединной поверхности (рис.1) [6].

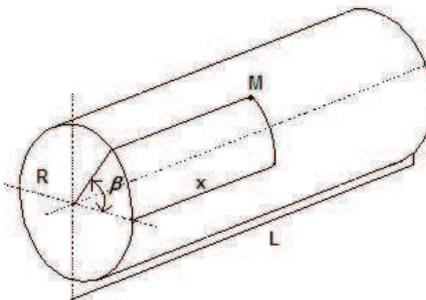


Рис. 1 Цилиндрическая оболочка

Уравнения движения цилиндрической оболочки могут быть записаны в таком виде:

$$\begin{cases} N_{11} U + N_{12} V + N_{13} W = \rho \cdot h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \\ N_{21} U + N_{22} V + N_{23} W = \rho \cdot h \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}; \\ N_{31} U + N_{32} V + N_{33} W = \rho \cdot h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}; \end{cases} \quad (1)$$

где  $U, V, W$  - компоненты перемещения точки срединной поверхности в направлениях  $\alpha$ - и  $\beta$ - координатных линий и по нормали;  $\rho h$  - масса оболочки на единицу срединной поверхности;  $N_{ij}$  - дифференциальные операторы. Структура операторов  $N_{ij}$  для оболочек произвольной формы весьма сложна. Поэтому уравнения движения в виде (1), т.е. в перемещениях, имеет смысл привести только для простейшего случая цилиндрической оболочки постоянной толщины, для которой коэффициенты уравнений постоянны. В этом случае

$$\begin{cases} N_{11} = \frac{E \cdot h}{(1 - \mu^2) R^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right); \\ N_{12} = N_{21} = \frac{E \cdot h}{(1 - \mu^2) R^2} \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}; \\ N_{13} = -N_{31} = \frac{E \cdot h}{(1 - \mu^2) R^2} \mu \frac{\partial}{\partial \alpha}; \\ N_{22} = \frac{E \cdot h}{(1 - \mu^2) R^2} \left\{ \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + a^2 \left[ 2(1 - \mu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \right\}; \\ N_{23} = -N_{32} = \frac{E \cdot h}{(1 - \mu^2) R^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} - a^2 \left[ (2 - \mu) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \right] \right\}; \\ N_{33} = -\frac{E \cdot h}{(1 - \mu^2) R^2} \left[ 1 + a^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right)^2 \right]; \end{cases} \quad (2)$$

где  $\alpha = x/R$ ;  $\beta = S/R$  - безразмерные координаты точки на срединной поверхности;

$a^2 = h^2/(12R^2)$ , где  $h$  - толщина оболочки;

$E$  - модуль Юнга материала оболочки;

$\mu$  - коефіцієнт Пуассона матеріала;

$\rho$  - плотність матеріала.

Особенностью уравнений движения оболочек является то, что, как это видно из формул (2), в эти уравнения входит малый, пропорциональный квадрату толщины оболочки, параметр  $a^2$ , пропорциональный квадрату толщины оболочки, на который умножаются старшие производные перемещений по координатам. Поэтому, если рассматриваются такие формы колебаний, при которых перемещения медленно меняются по координатам  $\alpha$  и  $\beta$ , соответствующими моментными членами в уравнениях (1) можно пренебречь.

Аналитическое решение задачи о собственных колебаниях для замкнутой цилиндрической оболочки может быть получено при граничных условиях Навье. Согласно этим условиям, на торцах оболочки отсутствуют нормальные  $W$  и окружные  $V$  перемещения, а также продольная сила  $T_x$  в срединной поверхности и изгибающий момент  $M_x$ . Условиям Навье удовлетворяют следующие выражения компонентов перемещения:

$$\begin{aligned} U &= A \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot R \cdot \alpha}{l}\right) \cdot \sin(n \cdot \beta) \cdot \cos(\omega \cdot t); \\ V &= B \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot R \cdot \alpha}{l}\right) \cdot \cos(n \cdot \beta) \cdot \cos(\omega \cdot t); \quad (3) \\ W &= C \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot R \cdot \alpha}{l}\right) \cdot \sin(n \cdot \beta) \cdot \cos(\omega \cdot t); \end{aligned}$$

где  $n$  - номер гармоники,  $m$  - количество узлов по окружной координате.

Подставив эти выражения в уравнения движения (1) и учитывая (2), приходим к системе трех линейных алгебраических уравнений (4), (5), (6) относительно  $A, B, C$  [6]:

$$\begin{aligned} A \cdot \left[ \left( \frac{m \cdot \pi \cdot R}{l} \right)^2 + \frac{1 - \mu}{2} n^2 \right] + B \cdot n \cdot \frac{1 + \mu}{2} \cdot \frac{m \pi R}{l} - C \cdot \mu \cdot \frac{m \cdot \pi \cdot R}{l} = \\ = \frac{A \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot (1 - \mu^2) R^2}{E}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} A \cdot n \cdot \frac{1 + \mu}{2} \cdot \frac{m \cdot \pi \cdot R}{l} + B \cdot \left\{ \frac{1 - \mu}{2} \left( \frac{m \cdot \pi \cdot R}{l} \right)^2 + n^2 + \right. \\ \left. + a^2 \left[ 2(1 - \mu) \cdot \left( \frac{m \cdot \pi \cdot R}{l} \right)^2 + n^2 \right] \right\} - C n \cdot \left\{ 1 + a^2 \left[ (2 - \mu) \cdot \left( \frac{m \cdot \pi \cdot R}{l} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + n^2 \right] \right\} = \frac{B \cdot \rho \cdot \omega^2 (1 - \mu^2) R^2}{E}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
& -\mu A \frac{m\pi R}{l} - B \cdot n \left[ 1 + a^2 \left[ (2 - \mu) \left( \frac{m \cdot \pi \cdot R}{l} \right)^2 + n^2 \right] \right] + \\
& + C \left\{ 1 + a^2 \left( \left( \frac{m \cdot \pi \cdot R}{l} \right)^2 + n^2 \right)^2 \right\} = \frac{C \cdot \rho \cdot \omega^2 (1 - \mu^2) R^2}{E};
\end{aligned} \tag{6}$$

Равенство нулю определителя этой системы приводит к кубическому уравнению относительно  $\omega^2$ . Три корня этого уравнения соответствуют трем различным формам колебаний с одинаковыми числами узловых окружностей и образующих, но с различными соотношениями между  $A, B, C$ . Корни этого определителя связаны с собственными частотами колебаний резервуара таким соотношением:

$$\bar{\omega} = \frac{\rho \cdot \omega^2 \cdot (1 - \mu^2) R^2}{E}. \tag{7}$$

В дальнейшем будем искать частоты, обезразмеренные по формуле (7).

Пусть задано критическое значение обезразмеренной частоты колебаний  $\bar{\omega}^*$ . Требуется подобрать такие параметры цилиндрической оболочки, чтобы наименьшая ее частота колебаний была бы больше критического значения. При этом объем оболочки должен быть больше заданного значения  $V_0$ . С точки зрения методов оптимального проектирования нами сформулированы два ограничения на проектные параметры. Отметим, что проектными параметрами в данном случае будут  $R, l, h$ . Объем цилиндрической оболочки выражается через эти параметры следующим образом:

$$V = \pi R^2 l. \tag{8}$$

Таким образом, второе из сформулированных ограничений имеет следующий вид;

$$G_2 = \pi R^2 l - V_0. \tag{9}$$

Первое ограничение в общем виде имеет следующую форму:

$$G_1 = \min\{\bar{\omega}\} - \bar{\omega}^*. \tag{10}$$

Отметим, что первое из ограничений  $G_1$  задается алгоритмически, потому что оно не может быть представлено в виде аналитического выражения, так как аналитически не удастся найти собственные значения матрицы, полученной из системы трех линейных алгебраических уравнений относительно  $A, B, C$

#### 4. Метод решения задачи

При оптимальном проектировании сложных многопараметрических объектов рассматриваемого типа удобно воспользоваться автоматическим гибридным поисковым методом оптимизации [5], предназначенным для отыскания локального оптимального вектора  $X^*$  задачи на условный экстремум

$$X^* = \arg \underset{X \in G}{extr} F(X) \quad (11)$$

в допустимой области

$$G = \{X : G_i(X) \geq 0, i = \overline{1, m}\} \neq \emptyset \quad (12)$$

Суть предлагаемого метода заключается, в общих чертах, в следующем. Имеется ряд методов-гибридентов, которые составляют гибридную коалицию  $\{M_i\}$ . Задается критерий  $Q(\sigma)$ , выясняющий в процессе решения, какой из гибридентов в данной ситуации  $\sigma$  наиболее эффективно может использоваться для достижения поставленной цели. Вводится функция управления  $u = u(Q(\sigma))$ , устанавливающая адаптивную стратегию ввода в действие конкретного гибридента  $M_k \in \{M_i\}$ ,  $i = 1, \dots, k, \dots, s$  (или группы гибридентов).

Совместные действия гибридентов обеспечивают более эффективное достижение цели, нежели каждый из гибридентов коалиции в отдельности. Это достигается путем введения специального адаптивного управления, которое осуществляет получение векторов минимизирующей последовательности  $\{X_k^r\}$ , направлений поиска  $Dir \{X_k^r\}$  и поисковых адаптирующихся шагов  $h_k^r$ , в соответствии с изменяющейся ситуацией  $\sigma$ . В общем случае адаптивное управление  $u$  можно представить в виде

$$\begin{Bmatrix} X_k^r \\ Dir X_k^r \\ h_k^r \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^s u_i(Q(\sigma_k)) \begin{Bmatrix} X_k^{M_i} \\ Dir X_k^{M_i} \\ h_{ki} \end{Bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^s u_i(Q(\sigma_k)) = 1, \quad (13)$$

где  $u_i(Q(\sigma_k))$  – управляющие неотрицательные функции, заданные на множестве ситуаций  $\{\sigma_k\}$ ;

$X_k^{M_i}$ ,  $Dir X_k^{M_i}$  и  $h_{ki}$  – точка, направление, исходящее из этой точки, и адаптирующийся шаг поиска, генерированные методом  $M_i$ , соответственно;

$k$  – номер итерации.

В качестве гибридентов  $M_i$  для данного варианта гибридного метода оптимизации выбраны следующие модификации методов [5,7]: адаптивный пошаговый спуск, схема Абрамова, овражная модификация, метод параллельных касательных, секущее движение вдоль границы области  $G$ . В [5] показано, что гибридный метод может решать широкий класс задач более эффективно, чем каждый из упомянутых гибридентов.

Спецификой рассматриваемой задачи является отсутствие функции цели. Поэтому оптимальное проектирование в данном случае сводится к процедуре «входа в область»: Эта процедура строит точку  $X = \{R, l, h\}$ , принадлежащую  $G$ , то есть решает систему функциональных неравенств  $G_j(X) \geq 0$ . Она использует основной алгоритм минимизации [7], но применительно к функции цели вида:

$$\Phi(X) = - \sum_{j \in m} G_j(X), \quad m' = (j | G_j < 0), \quad (14)$$

то есть представляющей собой сумму нарушенных ограничений. Сходимость метода согласно [7] гарантируется в предположении, что  $\Phi$  монотонно возрастает вдоль любого направления, которое содержится в выпуклой оболочке множества ограничений и начальной точки. Эта функция является неотрицательной и принимает нулевые значения в допустимой области (12).

Таким образом, задача отстройки цилиндрического резервуара от резонансных частот сводится к решению системы функциональных неравенств

$$\begin{cases} G_1 \geq 0; \\ G_2 \geq 0; \end{cases} \quad (15)$$

### Численные результаты

Численно решена задача об отстройке цилиндрического резервуара от резонансных частот.

Для задания ограничений (15) были выбраны следующие значения фигурирующих в них величин:

$$\omega^* = 0.4; \quad V_0 = 20; \quad (16)$$

В качестве начальной точки выбиралась  $X_0 = \{1, 5, 0.01\}$ , при этом  $V = 15.71 \text{ м}^3$ .

Наименьшая частота колебаний оказалась равной

$$\min \bar{\omega} = 0.0347. \quad (17)$$

Как видим, оба ограничения оказались нарушенными:

$$G_1 = -0.37; \quad G_2 = -4.29. \quad (18)$$

Если подобрать такой объем, чтобы он совпадал с заданным значением  $V_0$ , то первое ограничение все равно остается нарушенным. Методы оптимизации позволяют решить задачу выбора параметров так, чтобы все ограничения на проектные параметры оказались выполненными. В результате применения гибридного метода оптимизации был получен вектор

$$X_{opt} = \{3, 1, 0.01\}. \quad (19)$$

В этой точке значения ограничений  $G_1$  и  $G_2$  положительны, а именно:

$$G_1 = 0.59; \quad G_2 = 8.273. \quad (20)$$

Таким образом, проведена отстройка от опасной резонансной частоты.

### 7. Выводы и перспективы дальнейших исследований

Предложенный подход был реализован с помощью компьютерного анализа. Были получены оптимальные параметры цилиндрической оболочки, которые позволили произвести отстройку от резонансной частоты при ограничении на минимальный объем цилиндрического резервуара. В данной задаче третий параметр (толщина оболочки  $h$ ) оказался неактивным. Это объясняется отсутствием прочностных ограничений на рассматриваемый резервуар.

Разработанный метод предлагается использовать для решения широкого класса задач оптимального проектирования тонкостенных оболочечных конструкций при наличии прочностных и геометрических ограничений.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Филин А.П. Элементы теории оболочек. – Л.: Стройиздат. Л. отделение, 1975.– 256 с.
2. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // Успехи мат. наук.– 1961.– Вип.3.–С.171–174.
3. Григоренко Я.М. О расчете и выборе рациональных параметров оболочечных конструкций из композиционных материалов / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко // Механика композит. материалов. –1981. –№ 1. –С.64–69.
4. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / А.В. Кармишин, В.А. Лясковец, В.И. Мяченков, А.И. Фролов. –М.: Машиностроение, 1975. –576 с.
5. Шелудько Г.А., Стрельникова Е.А. Гибридный метод оптимизации. /Препр. АН УССР. Ин-т пробл. машиностр.; № 164:–Харьков, 1980.– 64 с.
6. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник, Т.3. / Под ред. И.А. Биргера, Я.Г.Пановко. – М.:Машиностроение, 1968. – 567 с.
7. Динамика конструкций при воздействии кратковременных нагрузок./ С.С. Кохманюк, А.С. Дмитриев, Г.А. Шелудько, А.Н.Шупиков, В.Г.Титарев, А.Н.Ляхов.– Киев: Наук. думка, 1984. – 198 с.