

УДК 539.3

Аналіз способів закріплення стійок для перевезення важких вантажів

Т. О. Штефан

Запорізький національний технічний університет

Досліджено деформацію стійки, на яку тисне важкий вантаж, у випадку пружної плоскої деформації. Задача розв'язується в статичній постановці методом тригонометричних рядів. Розглянуто два типи умов на нижній межі, вздовж якої стійка спряжена з абсолютно жорстким півпростором. Проведено чисельне дослідження функції потенційної енергії формозміни, яка застосовується у енергетичній гіпотезі міцності, та розроблено практичні рекомендації відносно способів закріплення стійки на платформі.

Ключові слова: стійка, умови закріплення, плоска деформація, четверта гіпотеза міцності, зона пластичності.

Исследовано деформацію стойки, на которую давит тяжелый груз, в случае упругой плоской деформации. Задача решается в статической постановке методом тригонометрических рядов. Рассмотрены два типа условий на нижней границе, вдоль которой стойка сопряжена с абсолютно жестким полупространством. Проведено численное исследование функции потенциальной энергии формоизменения, которая применяется в энергетической гипотезе прочности, и разработаны практические рекомендации относительно закрепления стойки на платформе.

Keywords: стойка, условия закрепления, плоская деформация, четвертая гипотеза прочности, зона пластичности.

A flat elastic deformation of a rack caused by a heavy load is studied. The problem is solved in a static formulation with the help of trigonometric series. Two types of conditions at the lower boundary along which the racks coupled with an absolutely rigid half-space have been considered. A numerical study of function of distortion potential energy, which is used in the energy hypothesis of strength, have been performed, and practical recommendations for fixing the rack on the platform have been developed.

Ключевые слова: front, fixing condition, elastic deformation, fourth hypothesis strength, plastic zone.

Вступ

Теорія пружності лежить в основі розрахунків на міцність всіх реальних інженерних об'єктів. Задача визначення напружень, які виникають в твердому тілі, на яке тисне інше тверде тіло, відноситься до класу контактних задач [1], при цьому міцність тіла залежить від умов його закріплення.

При перевезенні важких вантажів на відкритих площадках (вагонах, залізничних платформах та кузовах вантажних машин) їх потрібно закріплювати. Існує багато способів закріплення, описаних, наприклад, в [2]. Досвід роботи експертів при розслідуванні причин ДТП підтверджує той факт, що безпека транспортування вантажів та їх схоронність суттєво залежать від правильності розміщення та закріплення вантажу. Причиною неохоронного

перевезення вантажів за даними страхових компаній у 70% випадках є недостатнє закріплення їх на транспортному засобі [3]. Також причиною 60% ДТП, що відбувається за участі одного транспортного засобу, є втрата ним керованості у зв'язку із зміщенням погано закріпленого вантажу [3]. Таким чином, транспортування ненадійно закріпленого вантажу дорогами загального користування представляє значну небезпеку для інших учасників дорожнього руху. У зв'язку з чим представлено дослідження є актуальним.

Ми розглядаємо випадок, коли вантаж розміщується на спеціальних стійках і фіксується. Під дією цього вантажу стійка деформується і в ній виникають внутрішні напруження, які можуть призвести до її поломки, або навіть руйнування, що, в свою чергу, може викликати пошкодження вантажу та привести до аварійної ситуації [4]. В будь-якому разі, стійки фіксуються таким чином, щоб виключити їх рух як абсолютно твердого тіла. Але ж основа стійки може бути або механічно зчеплена з платформою, або довільно стояти на платформі таким чином, щоб виключити горизонтальні рухи. З точки зору механіки мова йде про повний (зчеплення) або ідеальний (проковзування) контакти.

Метою цієї роботи є розробка математичної моделі процесу деформування стійки в найпростішому випадку статичної пружної плоскої деформації, проведення чисельних досліджень та розробка практичних рекомендацій відносно способів закріплення стійки на платформі. Досліджено поведінку функції потенційної енергії формозміни, яка застосовується в четвертій (енергетичній) гіпотезі міцності [5].

Отримано точний розв'язок задачі у вигляді рядів Фур'є, коефіцієнти яких є функціями від вертикальної координати. Приведені чисельні приклади, які ілюструють вплив межових умов на розподіл напружень в смугі. Подібні задачі для випадку параболічного штампу докладно розв'язані в [6], [7].

Постановка задачі

Розглянемо прямокутний паралелепіпед нескінченної довжини, вісь якого паралельна осі Oz і який знаходиться в умовах плоскої деформації. Якщо візьмемо один з перетинів $z = const$, то матимемо задачу про вигін смуги. Нехай смуга займає область $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq h$ (рис.1).

Опишемо межові умови, при яких ми будемо розв'язувати задачу. Гладкість штампу означає, що на верхній межі смуги дотичні напруження нульові:

$$v(x, h) = f(x) - h, \quad \tau_{xy}(x, h) = 0. \quad (1)$$

По аналогії з [8] будемо вважати, що бокові сторони смуги зчеплені з тонкими листами – діафрагмами. Ці листи дозволяють точкам смуги, які з ними зчеплені, вільно переміщуватися в горизонтальному напрямку і не дозволяють переміщуватися в вертикальному напрямку. Математичний запис цих межових умов має вигляд

$$v(0, y) = 0, \quad v(l, y) = 0. \quad (2)$$

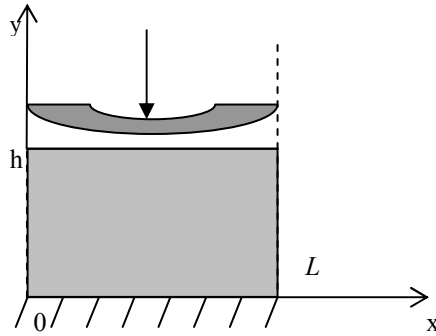


Рис.1. Смуга, на яку тисне штамп.

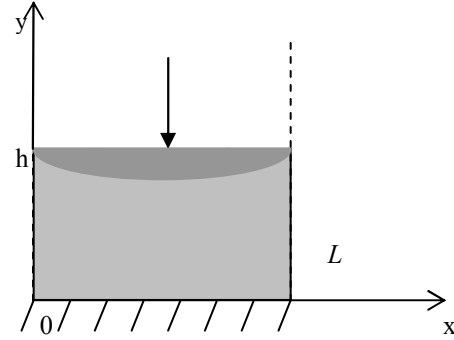


Рис.2. Штамп в кінцевому положенні.

Ми будемо порівнювати надійність при двох видах закріплення: випадок зчеплення та випадок ідеального контакту. У випадку зчеплення будемо вважати, що на нижній межі смуги (при $y=0$) вона спаяна з абсолютно жорсткою основою. Це означає, що вертикальні та горизонтальні переміщення точок смуги, які лежать на цій межі, дорівнюють нулю, тобто

$$u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = 0. \quad (3)$$

Для випадку ідеального контакту вертикальні переміщення та дотичні напруження точок смуги, що лежать на нижній межі, дорівнюють нулю, а саме:

$$v(x,0) = 0, \quad \tau_{xy}(x,0) = 0. \quad (4)$$

На верхню межу смуги тисне гладкий абсолютно жорсткий штамп, який переміщується вертикально. Ми розглядаємо статичну задачу і будемо вважати, що в кінцевому положенні рівняння лінії, яку описує нижня межа штампів, відомо і має вигляд $y = f(x)$, $x \in [0, l]$ (Рис.2).

Таким чином нам потрібно знайти функції, які задовольняють системі рівнянь Ламе і межовим умовам (1)-(3) для випадку зчеплення та межовим умовам (1), (2), (4) у випадку ідеального контакту.

Метод розв'язання

Оскільки функція $v(x,y)$ задовольняє однорідним межовим умовам (1), то будемо її шукати у вигляді тригонометричного ряду за синусами:

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(y) \sin(\alpha k x). \quad (5)$$

Тут $\alpha = \pi/l$.

В цьому випадку розклади функції $u(x,y)$, $\sigma_x(x,y)$, $\sigma_y(x,y)$, $\tau_{xy}(x,y)$ в тригонометричні ряди матимуть вигляд:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(y) \cos(\alpha k x), \quad \sigma_x = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(y) \sin(\alpha k x), \quad \sigma_y = \sum_{k=1}^{\infty} M_k(y) \sin(\alpha k x),$$

$$\tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(y) \cos(\alpha k x), \quad (6)$$

Зауважимо, що оскільки $\sigma_x(0, y) = 0$, то при такій деформації нормальні напруження на бокових діафрагмах будуть дорівнювати нулю.

Встановимо зв'язок між функціями V_k, U_k, S_k, M_k та T_k . Для цього підставимо розвинення (5) та (6) в кожне з рівнянь системи Ламе. Отримаємо наступні розклади:

$$\begin{aligned} V_k &= (A_k + yB_k)ch(\alpha ky) + (C_k + yD_k)sh(\alpha ky), \\ U_k &= 2\left(\frac{(1-\nu)}{\alpha k}B_k + \nu C_k + \nu yD_k\right)ch(\alpha ky) + 2\left(\frac{(1-\nu)}{\alpha k}D_k + \nu A_k + \nu yB_k\right)sh(\alpha ky), \\ S_k &= -2\mu((3-2\nu)B_k + \alpha k C_k + \alpha ky D_k)ch(\alpha ky) + \\ &\quad + ((3-2\nu)D_k + \alpha k A_k + \alpha ky B_k)sh(\alpha ky), \\ M_k &= 2(\alpha k A_k + \alpha ky B_k + (1-2\nu)D_k)sh(\alpha ky) + \\ &\quad + (\alpha k C_k + \alpha ky D_k + (1-2\nu)B_k)ch(\alpha ky), \\ T_k &= \mu\left\{A_k(1+2\nu)\alpha k + 2D_k\right\}ch(\alpha ky) + B_k\alpha k(1+2\nu)y \cdot ch(\alpha ky) + \\ &\quad + \left\{C_k(1+2\nu)\alpha k + 2B_k\right\}sh(\alpha ky) + D_k\alpha k(1+2\nu)y \cdot sh(\alpha ky) \end{aligned} \quad (7)$$

Тут A_k, B_k, C_k, D_k – довільні константи.

Із межових умов (1), (2), (3) або (1), (2), (4) із врахуванням розкладів (5), (6) та виразів (7) матимемо системи лінійних рівнянь відносно невідомих A_k, B_k, C_k, D_k . Розв'язок відповідної системи для випадку зчеплення має вигляд:

$$\begin{cases} A_k = 0, \\ B_k = \nu \alpha k \Omega (2ch(\alpha kh) + \alpha kh(1+2\nu)sh(\alpha kh)), \\ C_k = -\Omega (2(1-\nu)ch(\alpha kh) + \alpha kh(1+\nu-2\nu^2)sh(\alpha kh)), \\ D_k = \Omega (\alpha kh \nu(1+2\nu)ch(\alpha kh) - (1-\nu-2\nu^2)sh(\alpha kh)), \end{cases} \quad (8)$$

де позначено $\Omega = \delta_k / [2\nu \alpha kh - (1-\nu)sh(2\alpha kh)]$.

Аналогічно знайдено розв'язок системи у випадку ідеального контакту:

$$\begin{cases} A_k = 0, \\ B_k = -\alpha k \Psi (1+2\nu), \\ C_k = \Psi (2 + \alpha kh(1+2\nu)cth(\alpha kh)), \\ D_k = 0, \end{cases} \quad (9)$$

тут позначено $\Psi = \delta_k / 2sh(\alpha kh)$.

Підставивши знайдені коефіцієнти (8) або (9) в ряди (5), (6) для нормальних напружень σ_x, σ_y та дотичних напружень τ_{xy} матимемо шуканні розвинення вказаних функцій в тригонометричні ряди. Отриманні результати застосуємо для знаходження критичних (в сенсі міцності) ділянок розглянутої конструкції.

Результати чисельного моделювання

Наведемо результати чисельного моделювання деформації смуги штампом у випадках, коли на нижній межі виконуються умови зчеплення та ідеального контакту. Візьмемо $l = \pi$, $h = 1$, $\nu = 0.25$. Напруження будемо відносити до модулю зсуву μ .

Будемо вважати, що поверхня штампу представляю собою одну хвилю синусоїди, тобто рівняння верхньої межі смуги після деформації буде мати вигляд

$$f(x) = h - p \sin x, \quad (10)$$

де p - достатньо мале додатне число, яке має розмірність довжини і характеризує вигін поверхні штампу.

В цьому випадку вертикальні переміщення точок смуги описуються формулою:

$$v(x, h) = f(x) - h = -p \sin x. \quad (11)$$

Розкладемо функцію (11) в ряд Фур'є і отримаємо рівність:

$$-p \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \sin kx.$$

В силу однозначності розвинення функції в ряд Фур'є матимемо, що $\delta_1 = -p$, $\delta_2 = \delta_3 = \dots = 0$. Таким чином у нас лише один із коефіцієнтів δ_k відмінний від нуля, а це означає, що для отримання точного розв'язку нам достатньо в рядах (5), (6) утримати лише перші доданки.

Далі наведемо результати чисельних розрахунків для двох видів межових умов: випадку зчеплення та випадку ідеального контакту.

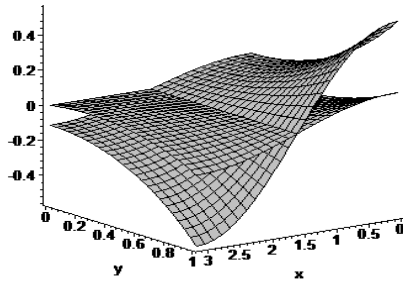


Рис.3. Переміщення $u(x, y)/p$.

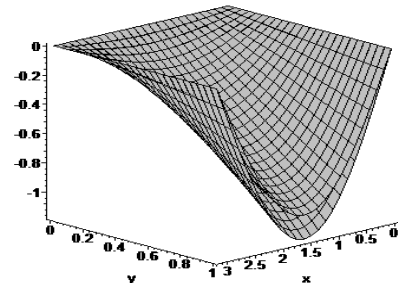


Рис.4. Переміщення $v(x, y)/p$.

На рисунках 3-4 зображено типові графіки функцій горизонтальних та вертикальних переміщень точок смуги для двох типів межових умов при значенні товщини $h = 1$.

Дослідження функції потенційної енергії формозміни

Сутністю енергетичної теорії міцності є припущення, що кількість потенційної енергії формозміни, яка накопичена до моменту настання небезпечного стану, однакова як при складному напруженні, так і при простому розтягуванні. Умова міцності згідно четвертій гіпотезі міцності записується наступним чином [5]:

$$\sigma^{\text{II}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}.$$

Якщо перейти від головних напружень до тензору деформації в довільній прямокутній системі координат, матимемо наступний вираз:

$$\sigma^{\text{II}} = \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 3(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2)}.$$

Оскільки у випадку плоскої деформації $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$, то отримаємо відповідну функцію потенційної енергії формозміни у вигляді:

$$F(x, y) = \sigma^{\text{II}} = \sqrt{[(1 + \nu)(\sigma_x + \sigma_y)]^2 - 3(\sigma_x \sigma_y + \nu(\sigma_x + \sigma_y)^2 - \tau_{xy}^2)}. \quad (12)$$

На рисунках 5 - 8 зображено графіки функції потенційної енергії формозміни в смузі під дією навантаження у випадку зчеплення та при ідеальному контакті при $\nu = 0,25$ та різних значеннях товщини плити. На рисунках 8 - 10 зображено графіки функції потенційної енергії формозміни в смузі під дією навантаження у випадку зчеплення та при ідеальному контакті при $h = 1$ та різних значеннях коефіцієнта Пуассона.

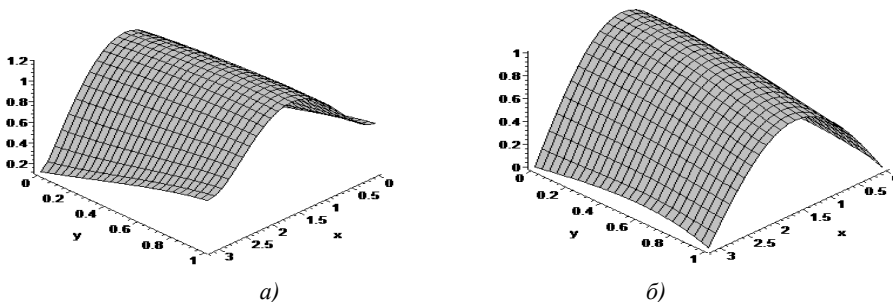


Рис. 5. Графіки функції $F(x, y)$ при $\nu = 0,25$ для а) випадку зчеплення, б) ідеального контакту для значення товщини $h = 1$.

Аналіз рисунків поведінки функції енергії формозміни у випадку повного контакту показав, що при $\nu = 0,25$ та малих значеннях товщини h глобальний максимум знаходиться в середині нижньої межі. При збільшенні товщини (а саме при $h > 2$) глобальний максимум переміщується в середину верхньої межі, при цьому значення глобального максимуму змінюється несуттєво (рисунки 5а – 7а). При $h > 3$ напруження на нижній межі плити і, взагалі, при $y \geq \pi/2$, енергія формозміни практично дорівнює нулю. Якщо зафіксувати $\nu = 0,25$, то найбільш

стійкою серед розглянутих конструкцій, з точки зору четвертої гіпотези міцності, є плита товщиною $h = 1,5$. Значення глобального максимуму при подальшому збільшенні товщини зростає. Зміна ν достатньо складно впливає на зміну форми графіка функції енергії формозміни (рисунки 5а, 9а, 10а).

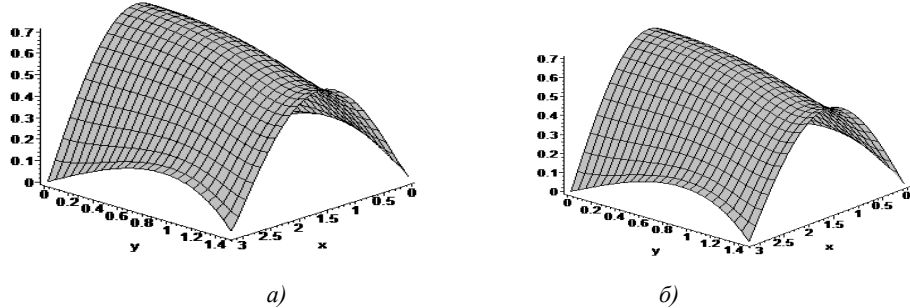


Рис. 6. Графіки функції $F(x, y)$ при $\nu = 0,25$ для а) випадку зчеплення, б) ідеального контакту для значення товщини $h = 1,5$.

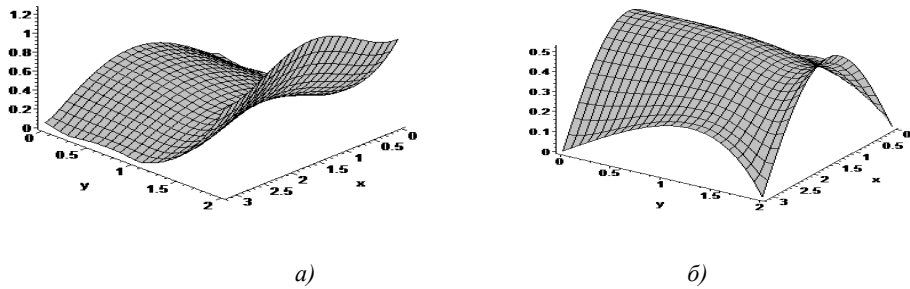


Рис. 7. Графіки функції $F(x, y)$ при $\nu = 0,25$ для а) випадку зчеплення, б) ідеального контакту для значення товщини $h = 2$.

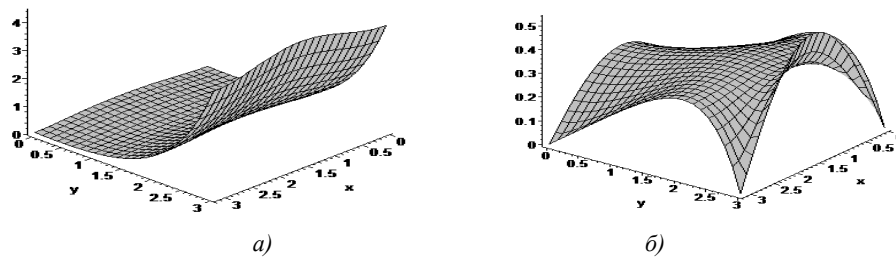


Рис. 8. Графіки функції $F(x, y)$ при $\nu = 0,25$ для а) випадку зчеплення, б) ідеального контакту для значення товщини $h = 3$.

У випадку ідеального контакту форма графіку функції $F(x, y)$ змінюється не так суттєво, як при повному контакті, при цьому локальні максимуми на нижній та верхній межах близькі за значенням. При збільшенні товщини плити глобальний максимум функції $F(x, y)$ переміщується з середини нижньої межі (якщо $h < 2$) в середину верхньої межі (якщо $h > 2$), при цьому значення максимуму зменшується. При збільшенні коефіцієнта Пуассона значення глобального максимуму строго зменшується.

В усіх розглянутих випадках при однакових значеннях параметрів (товщини плити та значенні коефіцієнта Пуассона) глобальний максимум функції $F(x, y)$ для ідеального контакту менше відповідного значення цієї функції у випадку повного контакту, крім випадків $\nu = 0,25$, $h = 1,5$ та $\nu = 0,3$, $h = 1$, коли вони практично співпадають. Таким чином, застосування ідеального контакту видається найбільш доцільним з точки зору четвертої гіпотези міцності. Найбільш явно це твердження ілюструється рисунком 8 при значеннях параметрів $\nu = 0,25$ та $h = 3$, бо в цьому випадку відношення значень глобальних максимумів для двох типів межових умов близько до восьми.

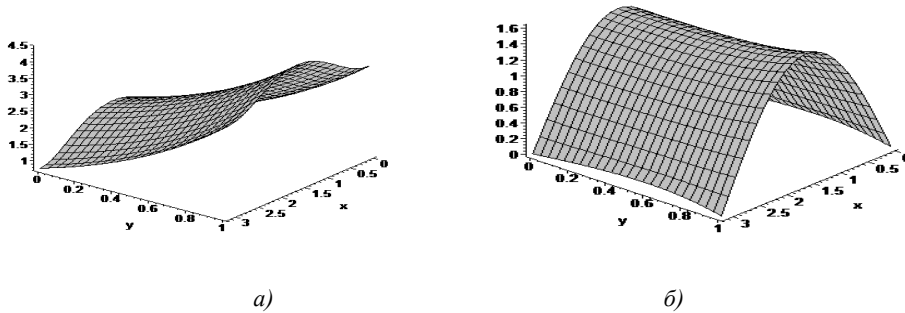


Рис. 9. Графіки функції $F(x, y)$ при $h = 1$ для а) випадку зчеплення, б) ідеального контакту для значення коефіцієнта Пуассона $\nu = 0,1$.

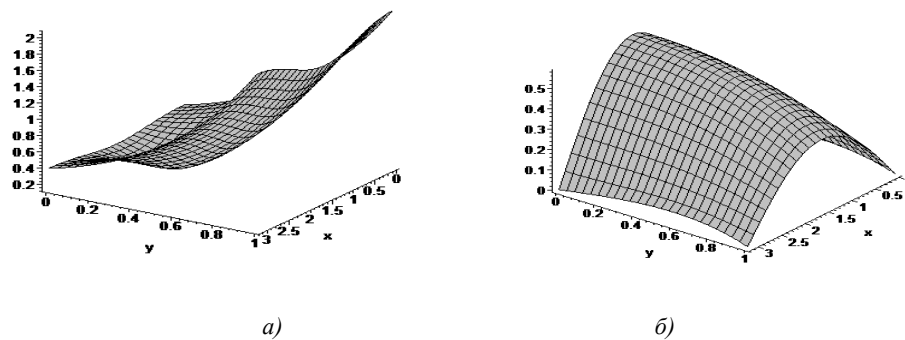


Рис. 10. Графіки функції $F(x, y)$ при $h = 1$ для а) випадку зчеплення, б) ідеального контакту для значення коефіцієнта Пуассона $\nu = 0,4$.

Висновки

В даній роботі наведена математична постановка задачі про плоску деформацію однорідної невагомої ізотропної пружної смуги, яка знаходиться під тиском зі сторони абсолютно жорсткого штампу. Розв'язано статичну задачу методом розкладу функцій переміщень та навантажень в тригонометричні ряди. Отримано точний розв'язок задачі у вигляді рядів Фур'є, коефіцієнти яких є функціями від вертикальної координати.

Розглянуто два типа межових умов на межах, які не контактують зі штампом, а саме умови зчеплення та умови ідеального контакту. Для обох задач отримані розрахункові формули та проведено детальний чисельний аналіз.

Для розглянутих значень параметру встановлено, що більш надійним з точки зору четвертої гіпотези міцності є випадок, коли стійка, на яку встановлюється вантаж, може проковзувати по підлозі, ніж випадок, коли стійка зчеплена з підлогою. В одному з розглянутих прикладах за рахунок зміни межових умов вдалося зменшити максимум енергії формозміни у вісім разів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ворович И. И. Механика контактных взаимодействий / И. И. Ворович, В. М. Александров. – М.: Физматлит, 2001. – 670 с.
2. Егоров С. А. Совершенствование методики расчета элементов крепления в статически неопределимых схемах закрепления единичного груза / С. А. Егоров, Л. А. Гребенюк, С. Ю. Хорунжин // Известия ТРАНССИБА. – Омский государственный университет путей сообщения (Омск): Вып. №4, 2011, – С. 87-94.
3. Калитвенцев А. Ю. Совершенствование методов размещения и крепления грузов на автомобильном транспорте / А. Ю. Калитвенцев // Актуальные проблемы эксплуатации АТС. – Материалы международной научно-практической конференции, – Владимир, 20-22 ноября 2007. – С. 64-67.
4. «Правила безопасного размещения и крепления грузов в кузове автомобильного транспортного средства», Республика Беларусь, утв. 10 октября 2005 г., Постановление № 58.
5. Александров А. В. Соппротивление материалов. 7-е изд / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М.: Высшая школа, 2009. – 560 с.
6. Штефан Т. О. Дослідження енергії формозміни в плиті, яка деформується штампом / Т. О. Штефан, О. В. Величко // Новітні матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – Запоріжжя. – 2013.- № 1. – С.97-100.
7. Величко О.В., Штефан Т.О. Вплив геометричних і пружних характеристик плити на положення зон можливої пластичної деформації /О.В. Величко, Т.О. Штефан // Вісник ХНУ. Секція МІА.- Харків. – 2013. – №1063. – С.51-56.
8. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – Москва : ГИФМЛ, 1960. – 490 с.