

УДК 658.51.012

Использование кинетической теории для исследования колебаний потоковых параметров производственной линии

О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Украина

Рассмотрена общая задача о развитии начального возмущения потоковых параметров синхронизированной производственной линии. Записано кинетическое уравнение технологического процесса. Получено дисперсионное уравнение и исследованы собственные колебания потоковых параметров производственной линии. Определены условия, выполнение которых обеспечивает затухание колебаний потоковых параметров.

Ключевые слова: *Кинетическое уравнение, поточная линия, PDE -модель, дисперсионное уравнение, предмет труда, система управления, технологический процесс, колебание потоковых параметров, устойчивость, затухание колебаний.*

Розглянуто загальну задачу про розвиток початкового збурення потокових параметрів синхронізованої виробничої лінії. Записано кінетичне рівняння технологічного процесу. Отримано дисперсійне рівняння і досліджені власні коливання потокових параметрів виробничої лінії. Визначено умови, виконання яких забезпечує згасання коливань потокових параметрів.

Ключові слова: *Кінетичне рівняння, потокова лінія, ПДЕ-модель, дисперсійне рівняння, предмет праці, система управління, технологічний процес, коливання потокових параметрів, стійкість, загасання коливань.*

The general problem about development of initial stream parameters perturbation in the synchronized production line is considered. The kinetic equation of technological process is created. The dispersive equation is obtained and own fluctuations of production line stream parameters have been investigated. Conditions are found providing the fluctuation of stream parameters attenuation.

Key words: *Kinetic equation, production line, PDE -model, the dispersion equation, the object of labor, management system, process, oscillation flow parameters, stability, damping.*

1. Введение

Состояние равновесных производственных процессов может быть описано моделями теории очередей (TQ-model) [1], моделями жидкости (Fluid-model) [2] и дискретно-событийными моделями (DES-model) [3]. Известные модели массового обслуживания использованы для описания производственных линий, функционирующих в установившемся, квазистатическом режиме. Применение их для моделирования переходных неустановившихся производственных процессов приводит к чрезмерному усложнению и большим затратам вычислительных ресурсов. Используются для одномоментного квазистатического описания производственных линий с небольшим количеством единиц оборудования (1-3 единицы). Дискретно-событийные модели хорошо себя зарекомендовали и удачно применены для описания работы производственных линий в переходном и установившемся режиме, но требуют больших затрат вычислительных ресурсов в связи с многократной имитацией процесса производства, состоящего из значительного количества технологических операций по обработки партий предметов труда внушительных размеров. Не пригодны для построения аналитических зависимостей между

потоковими параметрами, необходимых для качественной оценки проектируемых систем. Требуют использования устойчивых вычислительных алгоритмов. Fluid-модели ориентированы на малое количество интервалов разбиения технологического маршрута и линейные стационарные решения. Широкое распространение получило направление системной динамики. Основная трудность, не позволяющая эффективно использовать модели являются высокая размерность нелинейной системы уравнений и сложность вопрос построения замкнутой системы уравнений.

Каждый тип моделей имеет широкое применение, но ни один из них в полной мере не позволяет провести исследование характерных для современного поточного производства неравновесных переходных режимов функционирования производственной линии [9]. Использование TQ-моделей для описания переходных процессов приводит к чрезмерному усложнению задачи [1], DES-модели требуют больших затрат машинного времени, Fluid-модели ориентированы на малое количество интервалов обобщения технологического маршрута и линейные стационарные решения [2]. Наличие однообразных задач планирования и управления производством привело к попытке создания единой оптимизационной теории производственных систем с поточным способом организации производства.

Вначале S.C.Graves (1986) [13], а позднее U. S. Karmarkar (1989) предложили использовать в качестве основных параметров состояния пропускную способность производственной системы, объем незавершенного производства W и длительность производственного цикла. Для описания поведения параметров производственной системы U. S. Karmarkar ввел уравнение состояния, задающее связь между пропускной способностью производственной системы и объемом незавершенного производства W , получившее название clearing-функции. Этот подход значительно упорядочил описание производственных линий, но не устранил указанных выше недостатков, т.к. для построения уравнения состояния использованы существующие дискретно-событийные модели (DES), модели массового обслуживания (TQ) и жидкости (Fluid). Развитие производства требовало новые методы решения задач. Концентрация усилий исследователей над решением поставленных задач привела к тому, что в последнее десятилетие для проектирования поточных линий разработаны модели, содержащие уравнения в частных производных (PDE-модели). Введенный класс моделей объединил преимущества TQ-моделей, DES-моделей и Fluid-моделей, открыл новые возможности для проектирования систем управления производственными линиями. PDE-модели позволили учесть влияние внутренних факторов производства и имеющиеся технологические ограничения. Существенным преимуществом PDE-моделей является то, что они подробно позволили описать движение предметов труда от операции к операции, допускают решение в аналитическом виде и не нуждаются в значительных вычислительных ресурсах.

В последнее десятилетие для проектирования поточных линий используются модели, содержащие уравнения в частных производных (PDE-model) [6-9]. Введенный класс моделей расширил возможности проектирования систем управления поточными линиями, позволил перейти к детальному исследованию колебаний ее параметров.

2. Постановка проблемы и формулировка цели статьи

Известно, что поточная линия в неравновесном состоянии характеризуется тем, что в ней из-за наличия пространственной неоднородности плотности распределения предметов труда по состояниям и асинхронной работы технологического оборудования, размещенного вдоль технологического маршрута, постоянно существуют колебания параметров [8]. Амплитуда колебаний определяет размер емкости межоперационных накопителей, необходимых для обеспечения бесперебойной работы поточной линии. Колебания параметров тесно связаны со стохастическим характером взаимодействия предметов труда и производственного оборудования. Если величина межоперационных заделов становится равной нулю или превышает размер емкости межоперационных накопителей, то производственная линия останавливается, что является недопустимым для современного поточного производства. В связи с этим представляет практический интерес задача определения периода возникающих колебаний потоковых параметров и условия, при которых указанные колебания являются затухающими. Экспериментальная оценка периода колебаний потоковых параметров производственной линии дана в [8]. Однако, аналитические исследования зависимости периода колебаний от характерных параметров производственных линий в зарубежной и отечественной литературе отсутствуют. Это определило цель настоящей работы:

- а) разработать аналитический метод определения собственных частот колебаний потоковых параметров синхронизированных поточных линий;
- б) теоретически обосновать механизм возникновения колебаний потоковых параметров;
- в) найти условия, при которых колебания потоковых параметров синхронизированных производственных линий являются затухающими.

3. Теоретическое обоснование механизма возникновения колебаний потоковых параметров

Статистическое описание состояния предметов труда, находящихся в процессе технологической обработки, осуществляется функцией распределения $\chi(t, S, \mu)$ в фазовом технологическом пространстве (S, μ) [9,10]. Обобщенная координата $S \in [0, S_d]$ (грн.) определяет степень готовности изделия [9,10], соответствует стоимости технологических ресурсов, перенесенных на предмет труда с себестоимостью S_d . Обобщенная координата μ (грн./час) характеризует интенсивность переноса технологических ресурсов на предмет труда. Кинетическое уравнение [9,10] для функции распределения $\chi = \chi(t, S, \mu)$ описывает движение предметов труда плотностью $[\chi]_0(t, S)$ по технологическому маршруту с темпом их обработки $[\chi]_{1\psi}(t, S)$ на оборудовании, расположенном с плотностью $l_P = l_P(t, S)$ по технологическому маршруту

$$\frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial S} \mu + \frac{\partial \chi(t, S, \mu)}{\partial \mu} f(t, S) = l_P(t, S) \left\{ \int_0^{\infty} [\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) \tilde{\mu} \chi(t, S, \tilde{\mu}) d\tilde{\mu} - \mu \chi(t, S, \mu) \right\};$$

$$f(t, S) = \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi]_0(t, S)} \right); \quad \int_0^{\infty} \varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) d\mu = 1; \quad \int_0^{\infty} \psi(t, S, m) dm = [\psi]_0(t, S). \quad (1)$$

Функции $\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu)$ определяет вероятность перехода предмета труда из состояния $(S, \tilde{\mu})$ в состояние (S, μ) в результате воздействия оборудования.

Кинетическое уравнение (1) является нелинейным. Если допускается колебание потоковых параметров технологической линии с малой амплитудой, то $\chi(t, S, \mu)$ можно линеаризовать

$$\chi(t, S, \mu) = \chi_0(t, S, \mu) + \chi_1(t, S, \mu), \quad \chi_0(t, S, \mu) \gg \chi_1(t, S, \mu) \quad (2)$$

где $\chi_1 = \chi_1(t, S, \mu)$ - малое отклонение функции от установившегося равновесного невозмущенного состояния $\chi_0 = \chi_0(t, S, \mu)$. Будем полагать, что состояние предмета труда после воздействия оборудования не зависит от его состояния $\tilde{\mu}$ до воздействия оборудования (1), т.е. $\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) = \varphi_0(t, S, \mu)$.

Для работающих в равновесном состоянии поточных линий с высокой концентрацией оборудования по технологическому маршруту $l_P(t, S) \cdot S_d \gg 1$ кинетическое уравнений (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_0(t, S, \mu) \cdot [\chi]_{1\psi} - \mu \cdot \chi_0(t, S, \mu) &= 0; \quad f_0(t, S) = \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi_0]_0(t, S)} \cdot \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{[\chi]_{1\psi}(t, S)}{[\chi_0]_0(t, S)} \right); \\ \frac{\partial \chi_0(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi_0(t, S, \mu)}{\partial S} \cdot m + \frac{\partial \chi_0(t, S, \mu)}{\partial m} \cdot f_0(t, S) &= 0; \quad \int_0^{\infty} \chi_0(t, S, m) dm = [\chi_0]_0(t, S), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varphi_0(t, S, \mu)$ представлена функцией вида [11, с.16]:

$$\varphi_0(t, S, \mu) = \frac{\beta^\nu \cdot \mu^{\nu-1} \cdot e^{-\beta\mu}}{\Gamma(\nu)}, \quad \Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\nu-1} dt, \quad \nu > 2, \quad \beta > 0. \quad (4)$$

С учетом (4) для установившегося равновесного режима

$$\chi_0 = [\chi_0]_{1\psi} \frac{\beta^\nu \mu^{\nu-2} e^{-\beta\mu}}{\Gamma(\nu)}, \quad B = \frac{[\chi_0]_{1\psi}}{[\chi_0]_0} = \frac{\nu}{\beta}, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \chi_0(\mu) = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \chi_0(\mu) = 0. \quad (5)$$

В ходе технологической обработки перед m -ым оборудованием образуется межоперационный технологический задел в виде очереди $N_m = \int_{S_{m-1}}^{S_m} [\psi]_0(t, S) dS$

предметов труда [12, с.909-911]. Изменение плотности $[\psi]_0(t, S)$ в кинетическом уравнении (1) приводит к изменению функции распределения предметов труда по состояниям $\chi(t, S, \mu)$, что вызывает изменение плотности предметов труда $[\psi]_0(t, S)$ и, следовательно, изменение длины очереди N_m . Колебания длины очереди $\nu = 3$ приводит к колебаниям функции распределения $\chi(t, S, \mu)$, и наоборот.

Рассмотрим колебания потоковых параметров производственной линии для распространенного случая синхронизации технологического оборудования [7-9].

При синхронизованном режиме работы поточной линии среднее время обработки предмета труда на каждой технологической операции одинаково, откуда следует

$$\frac{\partial[\chi]_{1\psi}(t,S)}{\partial S} = 0. \quad (6)$$

Для одномоментного описания [9,10]

$$\frac{\partial[\chi]_0(t,S)}{\partial t} + \frac{\partial[\chi]_{1\psi}(t,S)}{\partial S} = 0 \quad (7)$$

из условия синхронизации оборудования (6) следует $\frac{\partial[\chi]_0(t,S)}{\partial t} = 0$. Так как

плотность межоперационных заделов для синхронизированной линии не меняется со временем, то поместив часть предметов труда в межоперационные страховые накопители, можно начальное распределение предметов труда вдоль технологического маршрута представить в виде равномерного распределения плотности $\frac{\partial[\chi]_0(0,S)}{\partial S} = 0$. С учетом (4)-(7) кинетическое уравнение (1)

линеаризуем в окрестности установившегося равновесного невозмущенного состояния $\chi_0 = \chi_0(t,S,\mu)$ (2)

$$\frac{\partial\chi_1}{\partial t} + \frac{\partial\chi_1}{\partial S} \cdot M - \frac{\partial\chi_0}{\partial m} B^3 \frac{1}{[\chi]_{1\psi}} \frac{\partial[y]_0}{\partial S} = -\lambda_P \mu \chi_1, \quad \int_0^{\infty} \chi_1 dm = [y]_0. \quad (8)$$

Поскольку (8) линейно и не содержит координат в явном виде, то искомые функции $\chi_1 = \chi_1(t,S,\mu)$ и $[y]_0 = [y]_0(t,S)$ разложим на интервале $[0, S_d]$ в ряд Фурье по координате S. Решения уравнения (8) будем искать в виде $\chi_{1j}(t,m)e^{ik_j S}$, $[y_j]_0(t)e^{ik_j S}$, $k_j = (2\pi j)/S_d$. Тогда из (8) следует

$$\frac{\partial\chi_{1j}}{\partial t} + (ik_j + \lambda_P)\chi_{1j} \cdot M - \frac{\partial\chi_0}{\partial m} B^3 \frac{1}{[\chi]_{1\psi}} ik_j [y_j]_0(t) = 0, \quad \int_0^{\infty} \chi_{1j}(t,m) dm = [y_j]_0(t). \quad (9)$$

Для решения уравнения (9) воспользуемся Фурье преобразованием

$$\begin{aligned} \chi_{1j}(t,m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+\sigma}^{\infty+\sigma} e^{-i\omega t} \cdot \chi_{1j\omega}(m) d\omega, & \chi_{1j\omega}(m) &= \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \cdot \chi_{1j}(t,m) dt, \\ [y_j]_0(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+\sigma}^{\infty+\sigma} e^{-i\omega t} \cdot [y_{j\omega}]_0 d\omega, & [y_{j\omega}]_0 &= \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \cdot [y_j]_0(t) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Умножим слагаемые кинетического уравнения (9) на $e^{i\omega t}$ и проинтегрируем по времени t. Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\partial\chi_{1j}(t,m)}{\partial t} e^{i\omega t} dt &= -\chi_{1j}(0,m) - i\omega \chi_{1j\omega}(m); \\ \int_0^{\infty} \frac{\partial\chi_0}{\partial m} \frac{B^3}{[\chi]_{1\psi}} ik_j [y_j]_0(t) e^{i\omega t} dt &= \frac{\partial\chi_0}{\partial m} \frac{B^3}{[\chi]_{1\psi}} ik_j [y_{j\omega}]_0; \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} (ik_j + l_P) \chi_{1j}(t, m) m e^{i\omega t} dt = (ik_j + l_P) m \chi_{1\omega}(m), \quad (11)$$

получим

$$\chi_{1j\omega}(m) = \frac{\chi_{1j}(0, m) + \frac{\partial \chi_0}{\partial m} B^3 \frac{1}{[\chi]_{1\psi}} ik_j [y_{j\omega}]_0}{i(k_j m - \omega) + l_P m}. \quad (12)$$

Выражение (9) позволяет записать соотношение

$$\int_0^{\infty} \chi_{1j\omega}(m) dm = [y_{j\omega}]_0. \quad (13)$$

Подставив (12) в (13), находим

$$[y_{k\omega}]_0 = \frac{1}{(ik_j + l_P) - B^3 \frac{ik_j}{[\chi]_{1\psi}} \int_0^{\infty} \frac{\partial \chi_0}{\partial m} \frac{dm}{(m - p/\beta)}} \int_0^{\infty} \frac{\chi_{1j}(0, m)}{(m - p/\beta)} dm, \quad p = \beta \frac{\omega(k_j + il_P)}{k_j^2 + l_P^2} \quad (14)$$

Используя (5), получим:

$$\frac{\partial \chi_0(\mu)}{\partial m} = \left(\frac{(\nu - 2)}{m} - \beta \right) \chi_0(\mu). \quad (15)$$

Принимая во внимание, что [13, с.252]

$$\frac{1}{[\chi]_{1\psi}} \int_0^{\infty} \frac{\partial \chi_0(\mu)}{\partial m} \frac{dm}{(m - p/\beta)} = -\beta^3 ((\nu - 2) - p) \frac{p^{\nu-3} e^{-p}}{\Gamma(\nu)} \ln p, \quad (16)$$

равенство (14) запишем в виде

$$[y_{k\omega}]_0 = \frac{1}{(ik_j + l_P) + \nu^3 ik_j ((\nu - 2) - p) \frac{p^{\nu-3} e^{-p}}{\Gamma(\nu)} \ln p} \int_0^{\infty} \frac{\chi_{1j}(0, m)}{(m - p/\beta)} dm \quad (17)$$

Применим к (12), (17) обратное преобразование Фурье, найдем искомые функции $\chi_1(t, S, \mu)$, $[y]_0(t, S)$. Однако, уже общие формулы (12), (17) позволяют исследовать поведение $\chi_{1j}(t, m)$ и $[y_j]_0(t)$ с ростом t . Асимптотическое поведение функций при больших t определяется характером особенностей преобразования Лапласа. Функция $\chi_{1j\omega}(m)$ имеет такие же особенности, что и $[y_{k\omega}]_0$, и добавочный полюс $m\beta = p$. Рассмотрим вопрос об особенностях функции $[y_{k\omega}]_0$. Будем полагать, что функция $\chi_{1j}(0, m)$, задающая начальное возмущение, не имеет особенностей при конечных значениях m . Тогда асимптотика интеграла (17) при больших t задается нулями уравнения

$$(ik_j + l_P) + \nu^3 ik_j ((\nu - 2) - p) \frac{p^{\nu-3} e^{-p}}{\Gamma(\nu)} \ln p = 0. \quad (18)$$

Для синхронизированной поточной линии $\tau_1 \approx \tau_2 \approx \dots \approx \tau_m \approx \dots \approx \tau_M \approx \tau_0$ ($N \gg M$), что позволяет длительность производственного цикла для обработки партии N -деталей на M -операциях представить выражением

$$T_d \approx \sum_{m=1}^M \tau_m + \tau_M \cdot (N-1) \approx \tau_0 \cdot N. \quad (19)$$

Введем $\omega_d = 2\pi/T_d$ и $\omega_0 = 2\pi/\tau_0 = 2\pi \cdot [\chi]_{1\psi}$, ограничивающие интересный для теоретических и практических исследований диапазон частот колебаний ω потоковых параметров, ($\omega_d \leq \omega \leq \omega_0$). При изучении поточной линии рассмотрим колебания, период которых больше времени выполнения технологической операции τ_0 и не превышает длительность производственного цикла $1 \leq \left| \frac{\omega}{\omega_d} \right| \ll T_d/\tau_0$. При этом предполагаем, что длина волны колебаний потоковых параметров $\gamma_j = 2\pi/k_j$ исследуемой линии превышает усредненную протяженность участка технологического маршрута, ограниченного одной технологической операцией и меньше протяженности всего технологического маршрута S_d : $S_d/M = 1/l_p \ll \gamma_j \leq S_d$.

Уравнение (18), определяющее зависимость между ω и k_j , является дисперсионным уравнением поточной линии. Используя обозначение

$$\varepsilon = \frac{k_j}{l_p} = \frac{2\pi j}{S_d l_p} = \frac{2\pi j}{M} \ll 2\pi, \quad [\chi_0]_0 S_d = N, \quad l_p S_d = M. \quad (20)$$

дисперсионное уравнение поточной линии (18) представим в виде соотношения безразмерных параметров $\varepsilon = k_j/l_p$ и ω/ω_d

$$D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right) = 1 + i\varepsilon \left(1 + v^3(v-2-p) \frac{p^{v-3} e^{-p}}{\Gamma(v)} \ln p \right) = 0, \quad p = \frac{2\pi \cdot v}{M} \frac{\omega}{\omega_d} \frac{(\varepsilon + i)}{(\varepsilon^2 + 1)}. \quad (21)$$

Дисперсионное уравнение (21) позволяет определить частоты колебаний величины межоперационных заделов вдоль производственной линии.

3. Анализ результатов

При решении практических задач управления параметрами поточной линии интересуют производственные явления длительностью, не превышающей протяженность производственного цикла, когда партия деталей еще изготавливается на поточной линии. Время обработки предмета труда является минимальной обобщенной единицей, характеризующей временную структуру производственного процесса. На рис.1 и рис.2 представлено поведение действительной $\text{Re}\left(D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)\right)$ и мнимой $\text{Im}\left(D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)\right)$ составляющих функции

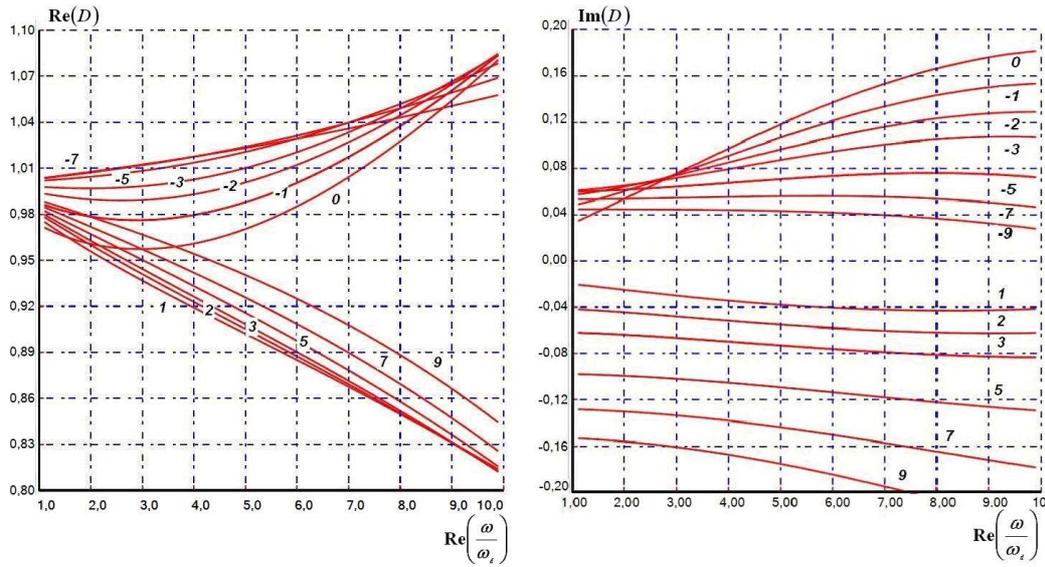


Рис.1.График функции $D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)$ для производственной линии ($M=400, \nu=3, j=1$)

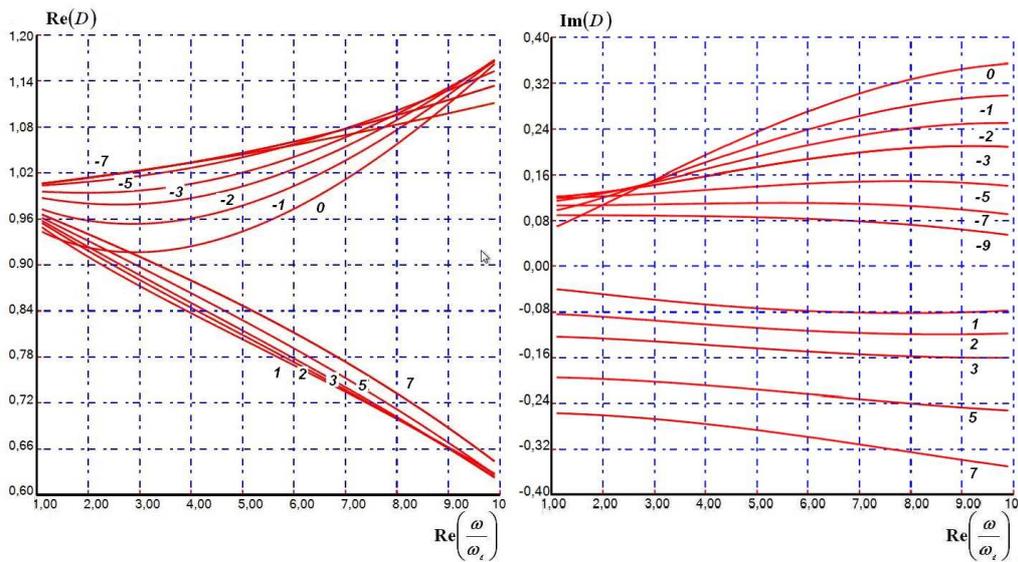


Рис.2.График функции $D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)$ для производственной линии ($M=400, \nu=3, j=2$)

$D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)$ для производственной линии ($M=400, \nu=3$) в диапазоне изменения параметров $1.0 \leq \text{Re}\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right) \leq 10.0$, $(-10.0) \leq \text{Im}\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right) \leq 10.0$ при $j=1$

($\varepsilon=0.015$) и $j=2$ ($\varepsilon=0.031$) соответственно. Представленные кривые соответствует разным значениям $\text{Im}\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right)$. Качественное различие между множеством кривых для $k_1 = \frac{2\pi}{S_d}$ ($\varepsilon=0.015$) и $k_2 = \frac{4\pi}{S_d}$ ($\varepsilon=0.031$) несущественное, что обусловлено видом асимптотического представления $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p$. Заметно изменился график функции $D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)$ при уменьшении количества технологических операций от $M=400$ к $M=200$ ($M=200, \nu=3, j=1, \varepsilon=0.031$) (рис.3). Численный анализ функции $D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)$ показывает, что при $M \gg 1$ ($\nu=3, \varepsilon \rightarrow 0$) дисперсионное уравнение не имеет корней. Это означает, что возмущения $[y]_0 = [y]_0(t, S)$ являются затухающими.

Решение дисперсионного уравнения для диапазона значений $\varepsilon \in [0.01..3.0]$ ($M=400, \nu=3, j=1..200$) представлено на рис.4. Пусть $\frac{\omega_k}{\omega_d}$ тот из корней дисперсионного уравнения $D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)$, который обладает меньшей по величине мнимой частью $\text{Im}\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right) > 0$ (ближайший к вещественной оси). Тогда в интеграле выражения (17) будет существен (при больших t) только вычит относительно полюса ω_k . Остальные части интеграла будут экспоненциально малы по сравнению с указанным вариантом из-за наличия в подынтегральном выражении множителя $e^{-i\omega t}$, быстро убывающего с увеличением $\text{Im}\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right) > 0$. Асимптотический закон убывания возмущения плотности межоперационных заделов дается выражением

$$[y_j]_0(t) \approx \exp(-i \text{Re } \omega_k t) \cdot \exp(-\text{Im } \omega_k t). \quad (22)$$

Таким образом, с течением времени возмущения плотности $[y]_0(t, S)$ затухают экспоненциально с декрементом $\text{Im } \omega_k$. На рис.1 представлено численное решение дисперсионного уравнения (21) для диапазона значений $\varepsilon \in [0.01..3.0]$ ($\nu=3$). С увеличением количества M технологического оборудования (операций) параметр ε уменьшается, что влечет за собой уменьшение характерного времени затухания возмущений $\tau \approx T_d \text{Im}\left(\frac{\omega}{\omega_d}\right)^{-1}$.

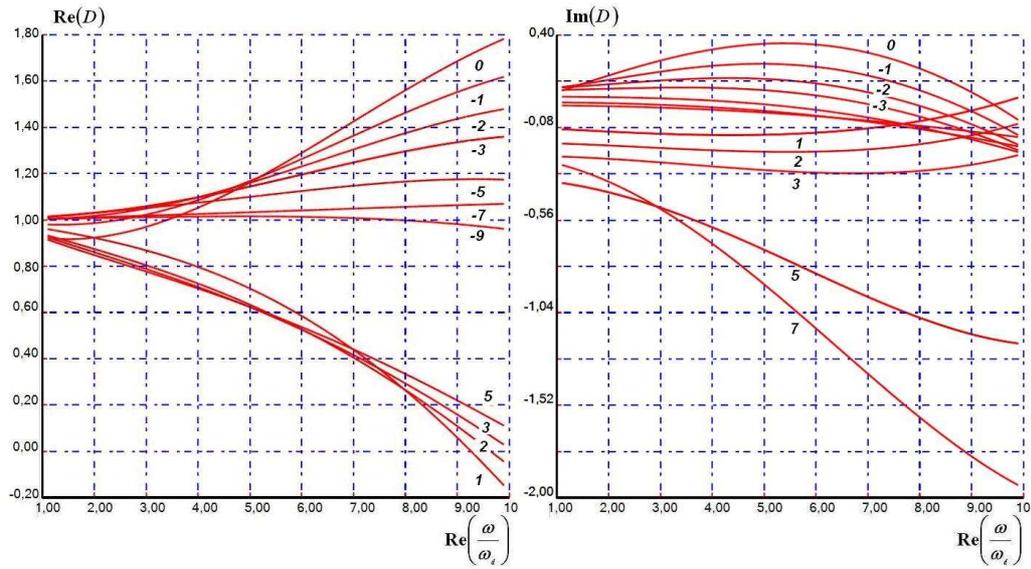


Рис.3.График функции $D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)$ для производственной линии ($M=200, \nu=3, j=1$)

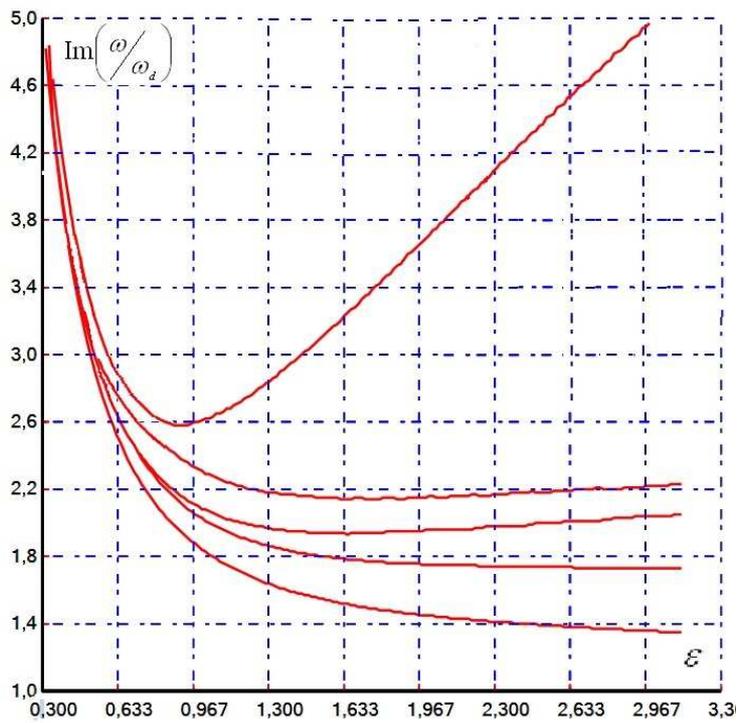


Рис.4. $\text{Im}(\omega/\omega_d)=f(\varepsilon)$ для производственной линии, $\nu=3$

Оценим характерное время затухания возмущения плотности $[c]_0(t, S)$ для поточной линии Intel, содержащей $M=200$ технологических операций при длительности производственного цикла $T_d=8..12$ недель [8]. Для $\varepsilon = \left(\frac{2\pi}{200}\right) = 0,0314$ ($\nu=3$) с использованием результатов численных расчетов (рис.4) определяем теоретическое характерное время затухания $\tau \approx 1..2$ недели. Наблюдения, полученные с производственных линий ($M=200..400$, $\nu=3$, $\varepsilon=0.02..0.04$) по изготовлению полупроводниковой продукции Intel подтверждают численные расчеты для времени затухания колебаний плотности $[c]_0(t, S)$ [14]. Экспериментальные данные [14, с.445] свидетельствуют о том, что на производственной линии периодически возникают возмущения потоковых параметров продолжительностью до $\tau \approx 1..2$ недели при производственном цикле $T_d=8..12$ недель,

В заключении остановимся на свойствах функции распределения $\chi(t, S, \mu)$. Искомая функция получается подстановкой (12) в (10). Помимо полюсов, происходящих от $[y_{k\omega}]_0$, подынтегральное выражение имеет полюс в точке $i(k_j m - \omega) + \lambda_{P.M} = 0$. По вычету в нем находим

$$\chi_{1j}(t, m) \approx \exp(-\lambda_{P.M} t). \quad (23)$$

Возмущение функции распределения затухает со временем.

Функция $\chi_1(t, S, m) \approx \exp(ik_j S - ik_j m t - \lambda_{P.M} t)$ является решением кинетического уравнения

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial t} + \frac{\partial \chi_1}{\partial S} m = -\lambda_{P.M} \chi_1, \quad (24)$$

при начальном распределении $\chi_{1j}(0, m) \exp(ik_j S)$ с характерным временем затухания возмущений $\langle \tau \rangle \approx (\lambda_{P.M})^{-1} \approx \frac{T_d}{M}$ функции распределения $\chi(t, S, \mu)$. Для производственного цикла $T_d=8..12$ недель [14, с.445] период затухания составляет $\langle \tau \rangle \approx 0.1$ недели.

Выводы

Для синхронизированной производственной линии теоретически обосновано затухание возмущений потоковых параметров. Получено и численно решено дисперсионное уравнение для потоковых параметров производственной линии. Показано, что для синхронизированных производственных линий ($\nu=3$, $\varepsilon=0.2..0.4$) при большом количестве технологических операций ($M=40..400$) и предметов труда ($N \approx 10^4$ шт., [8]), распределенных вдоль технологического маршрута, характерное время существования малых возмущений плотности $[c]_0(t, S)$ и функции распределения $\chi(t, S, \mu)$ составляет соответственно $\tau \approx 1..2$ недели и $\langle \tau \rangle \approx 0.1$ недели для производственного цикла

$T_d = 8..12$ недель [14,с.445]. Колебания возникают неизбежно и являются затухающими

ЛИТЕРАТУРА

1. Gross D. Fundamentals of Queueing Theory. / D. Gross, C. M. Harris.–New York, 1974.– 490 p.
2. Harrison J. Brownian Motion and Stochastic Flow Systems. / J. Harrison. – New York, 1995. – 142 p.
3. Ramadge P. The control of discrete event systems “IEEE Proc.”. / P. Ramadge, W. Wonham. – New York, 1989. – vol. 77, №1. – P. 81 – 98.
4. Berg R. Partial differential equations in modelling and control of manufacturing systems,”M.S. thesis”. / R. Berg. – Netherlands, Eindhoven Univ. Technol., 2004. – 157 p.
5. Armbruster D. The production planning problem: Clearing functions, variable leads times, delay equations and partial differential equations: Decision Policies for Production Networks. / D. Armbruster, K. G. Kempf – Springer Verlag, 2012. – P. 289 – 303.
6. Lefeber E. Modeling, Validation and Control of Manufacturing Systems. / E. Lefeber, R. Berg, J. Rooda – Boston, Massachusetts, 2004. – P. 4583 – 4588.
7. Berg R. Modelling and Control of a Manufacturing Flow Line using Partial Differential Equations. IEEE Transactions on Control Systems Technology. / R.Berg, E.Lefeber, J.Rooda– Boston, 2008. – P. 130 – 136
8. Ambruster D. Continuous models for production flows. In Proceedings of the 2004 American Control Conference. / D. Armbruster, C. Ringhofer, T- J. Jo – Boston, MA, USA, 2004. – P. 4589 – 4594.
9. Пигнастый О. М. Статистическая теория производственных систем. / О. М. Пигнастый. – Х.: Изд. ХНУ им. Каразина, 2007. – С. 388.
10. Armbruster D. Kinetic and fluid model hierarchies for supply chains supporting policy attributes. Bulletin of the Institute of Mathematics. / D. Armbruster, D. Marthaler, C. Ringhofer – Academica Sinica 66, 2006. – P. 896 – 920.
11. Zhang L. System-theoretic properties of Production Lines. A dissertation submitted the degree of Doctor of Philosophy (Electrical Engineering: Systems). / L.Zhang– Michigan, 2009. – P. 289
12. Armbruster D. A model for the dynamics of large queuing networks and supply chains. / D. Armbruster, P. Degond, C. Ringhofer – SIAM Journal on Applied Mathematics 83, 2006. – P. 896–920.
13. Сборник задач по теории аналитических функций. / [Евграфов М. А., Бежанов К. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В, Шабунин М. И.]. – М.: Наука, 1972. – С. 416.
14. Tian F. An iterative approach to item-level tactical production and inventory planning. / F. Tian, S. Willems, K. Kempf –International Journal of Production Economics, 2011. – vol. 133. – P. 439 – 450.