

УДК 519.6, 537.5

Анализ модели системы «релятивистский электронный пучок–плазма»

В. М. Куклин, А. В. Приймак

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

Рассмотрен многомодовый режим взаимодействия релятивистского и нерелятивистского пучков электронов с плазмой. Обсуждается влияние поглощения энергии колебаний в системе на характеристики интегрального поля. Основное внимание уделено спектральным и амплитудным характеристикам поля ленгмюровских колебаний в плазме, для чего развита традиционная математическая модель и разработаны методы диагностики протекающих процессов. Найден оптимальные условия отбора энергии электронного пучка, определены спектральные характеристики возбуждаемых в плазме ленгмюровских колебаний. Найден захваченные полем частицы пучка.

Ключевые слова: модель пучка электронов в плазме, анализ спектра, спектральные характеристики колебаний, диссипативные режимы процесса.

Розглянуто багатомодовий режим взаємодії релятивістського і нерелятивістського пучків електронів з плазмою. Обговорюється вплив поглинання енергії коливань в системі на характеристики інтегрального поля. Основну увагу приділено спектральним і амплітудним характеристикам поля ленгмюровських коливань в плазмі, для чого розвинена традиційна математична модель та розроблено методи діагностики процесів. Знайдено оптимальні умови відбору енергії електронного пучка, визначені спектральні характеристики ленгмюровських коливань в плазмі. Знайдені захоплені полем частинки пучка.

Ключові слова: модель пучка електронів в плазмі, аналіз спектру, спектральні характеристики коливань, дисипативні режими процесу.

The paper considers the multimode regime of interaction between relativistic and nonrelativistic electron beam with plasma. We discuss the effect of oscillations energy absorbed by the system on integral field characteristics. We have focused on the spectral and amplitude characteristics of field of Langmuir oscillations in plasma. We have improved the mathematical model and developed the diagnostic methods of the processes. We have evaluated the optimal withdrawal of electron beam energy and obtained the spectral characteristics of Langmuir oscillations in plasma. Also we can detect the beam particles trapped by field.

Keywords: the model of electron beam in plasma, the analysis of spectrum, the spectral characteristics of oscillations, the dissipative regimes of process.

1 Введение

Возбуждаемые пучком в плазме интенсивные колебания могут достигать значительных амплитуд. Использование таких колебаний представляет интерес для целей генерации и усиления [1–5], а также для нагрева плазменных электронов и ионов в условиях развития модуляционных неустойчивостей [6–14]. Для генерации полезен именно одномодовый режим возбуждения, когда пространственный спектр возбуждаемых колебаний достаточно узкий, поэтому основные усилия по изучению пучково–плазменных взаимодействий были ориентированы на исследования именно таких режимов. В одномодовом режиме генерации имеет место значительная амплитудная и фазовая модуляция

возбуждаемых длинноволновых ленгмюровских колебаний [3]. Эта модуляция способна привести к подавлению множества вторичных неустойчивостей [4].

Но в реальности развивается многомодовый режим генерации, возбуждаемые волновые пакеты имеют определенную спектральную ширину. Наблюдается также сдвиг частоты ленгмюровских колебаний, возбуждаемых в плазме. Характеристики таких режимов неустойчивости, в особенности в условиях конечного поглощения энергии, важны для выяснения возможностей использовать их для нагрева плазмы и для выбора рациональных рабочих точек генераторов и усилителей.

Целью работы является развитие традиционной модели описания и диагностики многомодовых диссипативных режимов взаимодействия пучков электронов с плазмой. Кроме последствий развития неустойчивости нерелятивистского пучка электронов [15], будут рассмотрены характеристики возбуждаемых полей и состояние релятивистского пучка электронов. Основное внимание будет уделено процессам модуляции пучка, выяснению характера ленгмюровского поля в плазме, определению его спектральных характеристик, сравнению поведения релятивистского и нерелятивистского пучков. Представляют интерес диагностические методы представления ленгмюровских колебаний, спектральных характеристик и вида пространственно-временной модуляции поля.

2 Модель системы «релятивистский электронный пучок–плазма»

Математическая одномерная модель системы «релятивистский электронный пучок–плазма» изложена далее (физическая модель обсуждается в работе [15]).

Уравнения для амплитуды A_{0p} и фазы φ_{0p} мод спектра:

$$\frac{1}{p} \frac{\partial A_{0p}}{\partial \tau} + \Theta \frac{A_{0p}}{p} = -R_{0p} \int_{-1/2}^{1/2} (1 + V_b / V_{0b}) \sin(2\pi p \zeta_b - \varphi_{0p}) d\zeta_0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi_{0p}}{\partial \tau} + \Delta_p = R_{0p} \frac{p}{A_{0p}} \int_{-1/2}^{1/2} (1 + V_b / V_{0b}) \cos(2\pi p \zeta_b - \varphi_{0p}) d\zeta_0, \quad (2)$$

где $R_{0p} = \frac{2\gamma_{b0}^3}{p_0} \frac{p^2}{p^2 + p_0^2} G$, $G = 1$, $V_{0b} = \frac{\omega_{pe}}{\delta} \frac{1}{2\pi p_0}$, $\Delta_p = \frac{\omega_{pe}}{\delta} \frac{p}{p_0} \frac{p^2 - p_0^2}{p^2 + p_0^2}$. Выбор

отношения $\omega_{pe} / \delta = 29.4$ определяется характерным временем развития модуляционной неустойчивости в холодной плазме, рассмотренной в работе [14], с перспективой дальнейшего использования данной модели описания для режимов не только в условиях линейной диссипации, но и в режимах нелинейного поглощения.

Амплитуда a_0 и фаза ϕ_0 возбуждаемых пучком электронов длинноволновых ленгмюровских колебаний в фиксированной точке в лабораторной системе отсчета:

$$a_0 = p_0 \left(\frac{\delta}{\omega_{pe}} \right)^2 \sqrt{ \left[\sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \cos(\varphi'_{0p}) \right]^2 + \left[\sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \sin(\varphi'_{0p}) \right]^2 }, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial \tau} = & \{ \cos(\phi_0) \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \left[\frac{\partial A_{0p}}{\partial \tau} \frac{1}{p} \sin(\varphi'_{0p}) + \frac{A_{0p}}{p} \cos(\varphi'_{0p}) \frac{\partial \varphi'_{0p}}{\partial \tau} \right] - \\ & - \sin(\phi_0) \sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \left[\frac{\partial A_{0p}}{\partial \tau} \frac{1}{p} \cos(\varphi'_{0p}) - \frac{A_{0p}}{p} \sin(\varphi'_{0p}) \frac{\partial \varphi'_{0p}}{\partial \tau} \right] \} / \\ & / \sqrt{ \left[\sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \cos(\varphi'_{0p}) \right]^2 + \left[\sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \sin(\varphi'_{0p}) \right]^2 }, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\varphi'_{0p} = \varphi_{0p} + \frac{\omega_{pe}}{\delta} \frac{(p - p_0)\tau}{p_0}$.

Уравнения движения частиц, моделирующих пучок:

$$\frac{d\zeta_b}{d\tau} = V_b, \quad (5)$$

$$\frac{dV_b}{d\tau} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\gamma_b^3} \sum_{p=1}^P \frac{A_{0p}}{p} \sin(2\pi p\zeta_b - \varphi_{0p}), \quad (6)$$

причем $\gamma_b = \gamma_b(\tau) = [1 - V_{0b}^2 (1 + \frac{V_b}{V_{0b}})^2 / C^2]^{-1/2}$, $C = \frac{1}{2\pi p_0} \frac{\omega_{pe}}{\delta} \frac{1}{\beta_0}$, $\beta_0 = (1 - \gamma_{b0}^{-2})^{1/2}$.

Поле в системе покоя пучка имеет вид

$$\begin{aligned} E(\zeta_{0b}) = & \{ \left[\sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \cos(2\pi p\zeta_{0b} + \varphi_{0p}) \right]^2 + \\ & + \left[\sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \sin(2\pi p\zeta_{0b} + \varphi_{0p}) \right]^2 \}^{1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Система уравнений (1)–(7) описывает возбуждение пучком электронов длинноволновых колебаний, и в этих условиях выполняется соотношение, представляющее собой интеграл системы уравнений (1)–(7)

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^P \frac{p^2 + p_0^2}{8\pi p^2} \left(\frac{A_{0p}^2}{p^2} + 2\Theta \sum_0^\tau \frac{A_{0p}^2}{p^2} \partial \tau \right) + \\ + 2\pi C^2 \gamma_{b0}^3 \frac{\delta}{\omega_{pe}} G \frac{1}{N} \sum_{b=1}^N (\gamma_b - \gamma_{b0}) = const. \end{aligned} \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что интеграл (8) – это закон сохранения энергии в системе «релятивистский электронный пучок – линейная по возмущениям плазма». Первое слагаемое в (8) отвечает за плотность энергии поля продольных колебаний в текущий момент, второе – за энергию, потерянную за счет диссипативных механизмов поглощения энергии колебаний в плазме (столкновительная диссипация) в единице объема, третье – определяет энергию, потерянную частицами пучка в единице объема.

Для определения степени синхронности изменения средней скорости пучка и фазовой скорости резонансной моды с номером $P = P_0$ можно ввести критерий синхронизации

$$CIN = \frac{2\pi p_0}{\partial \phi_0 / \partial \tau} \frac{1}{N} \sum_{b=1}^N V_b, \quad (9)$$

а также среднюю скорость, среднеквадратичное отклонение скорости от ее среднего значения и среднее значение релятивистского фактора, то есть

$$\bar{V} = \frac{1}{N} \sum_{b=1}^N V_b, \quad V_\sigma = \frac{1}{N} \sum_{b=1}^N \sqrt{(V_b - \bar{V})^2}, \quad \bar{\gamma} = \frac{1}{N} \sum_{b=1}^N \gamma_b. \quad (10)$$

3 Постановка задачи и начальные условия

Для выполнения цели работы проводится численный эксперимент на графическом процессоре с использованием технологии compute unified device architecture (CUDA). Численный эксперимент представляет собой решение задачи Коши методом Эйлера.

Вначале выполняется расчет средних значений полуширины спектра $\frac{A_{0p}}{P}$ для нерелятивистского и релятивистского пучков при различных значениях поглощения Θ в системе. Из средних значений полуширины спектра будут определены значения p_{\min}, p_{\max} (как показано далее) и численный эксперимент будет повторен.

Далее будут определены амплитуда и фаза ленгмюровских колебаний, характеристики интегрального поля для нерелятивистского и релятивистского пучков. На распределении частиц по скоростям необходимо найти горб захваченных частиц и показать его эволюцию во времени.

В настоящей работе для нерелятивистского пучка значение $\gamma_{b0} = 1.6$ взято из [15], а для релятивистского пучка выбрано значение $\gamma_{b0} = 10$. При $\gamma_{b0} > 10$ интеграл системы уравнений (8) начинает нарушаться, что требует, видимо, другой формы представления данных в уравнениях для крупных частиц (масштаб изменений скорости с ростом γ_{b0} быстро уменьшается).

Поглощение в системе для нерелятивистского пучка изменяется в диапазоне $\Theta = [0; 7]$, а для релятивистского пучка – в диапазоне $\Theta = [0; 1]$. При поглощении $\Theta > 1$ для релятивистского пучка результаты начинают нарушаться также из-за указанного выше возрастающего несогласования масштабов изменения переменных на одном шаге расчета.

Число мод спектра увеличено до $P = 150$, в отличие от $P = 35$ в работе [15]. Значение $p_0 = 100$. Число частиц пучка $N = 50 \cdot P = 7500$. Частицы равномерно распределены в начальный момент времени на интервале $-0.5 < \zeta_b < 0.5$, скорости частиц $V_b|_{\tau=0} = 0$.

Начальные значения $\frac{A_{0p}}{p}|_{\tau=0} = 10^{-5}$, $\varphi_{0p}|_{\tau=0} \in [0; 2\pi]$ – случайное число,

$$a_0|_{\tau=0} = p_0 \left(\frac{\delta}{\omega_{pe}}\right)^2 \sqrt{\left[\sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \cos(\varphi_{0p}')\right]^2 + \left[\sum_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{A_{0p}}{p} \sin(\varphi_{0p}')\right]^2}, \quad \phi_0|_{\tau=0} = 0.$$

Точность вычислений контролируется сохранением значения интеграла системы уравнений (8).

4 Результаты численного эксперимента

При решении системы уравнений (1)–(7) определим характер изменения плотности энергии колебаний, возбуждаемых пучком, то есть первое слагаемое интеграла системы (8)

$$\sum_{p=1}^P \left(\frac{p^2 + p_0^2}{8\pi p^2} \frac{A_{0p}^2}{p^2} \right) \tag{11}$$

для разных значений уровня поглощения, а также динамику потерь энергии нерелятивистского $\gamma_{b0} = 1.6$ пучка (третье слагаемое интеграла (8))

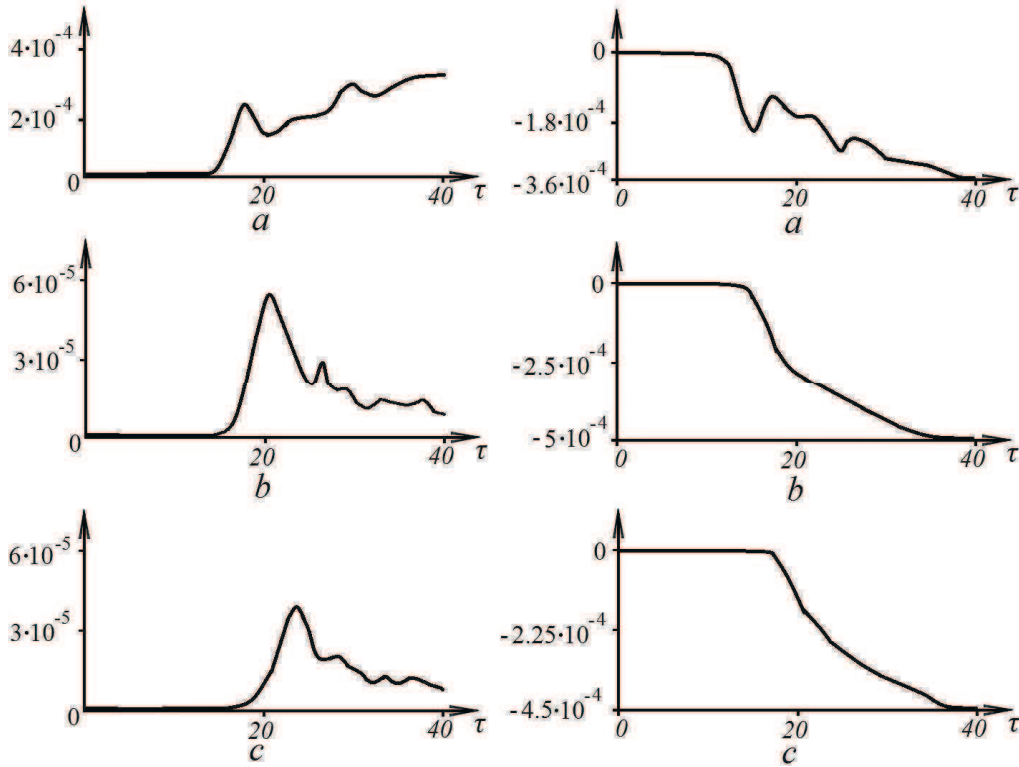


Рис.1. Поведение энергии поля (слева) и потерь энергии пучка (справа) соответствующих слагаемых (8) от времени для нерелятивистского пучка $\gamma_{b0} = 1.6$ ($a - \Theta = 0$, $b - \Theta = 0.5$, $c - \Theta = 1$)

Аналогічно можна привести динаміку пучкової неустойчивості релятивістського пучка ($\gamma_{b0} = 10$):

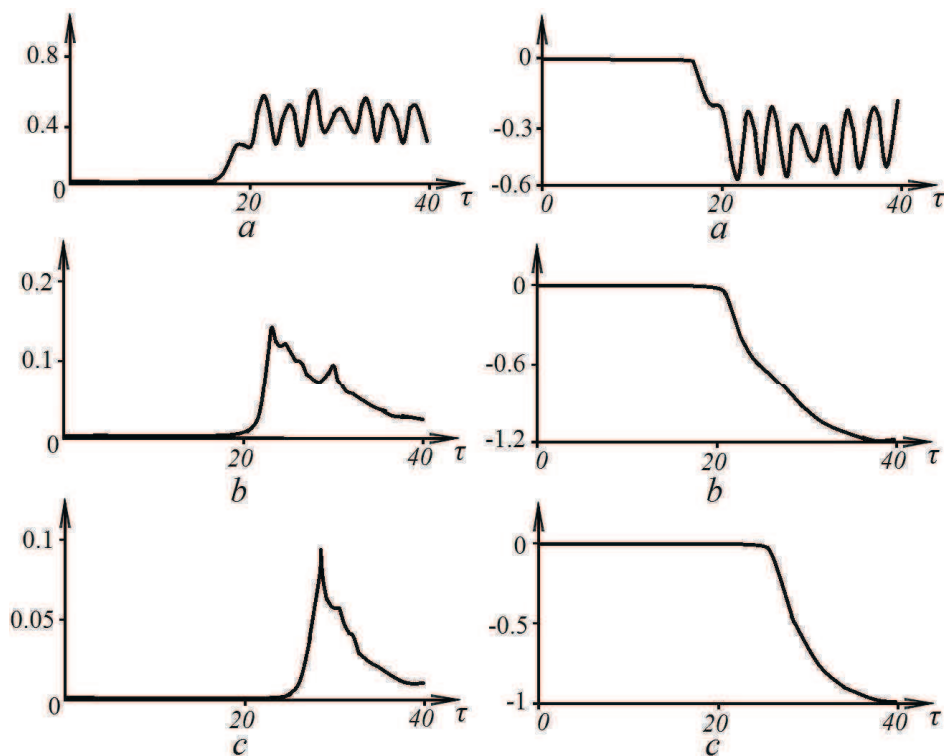


Рис.2. Поведення енергії поля (слева) и потерь энергии пучка (справа) соответствующих слагаемых (8) от времени для релятивистского пучка $\gamma_{b0} = 10$ ($a - \Theta = 0$, $b - \Theta = 0.5$, $c - \Theta = 1$)

Начиная с достижения первого максимума плотности энергии колебаний $\tau_{MIN}(\Theta)$, развивается нелинейный режим неустойчивости. С этого момента можно найти среднюю по времени полуширину (full width at half maximum – FWHM) спектра возбуждаемых колебаний.

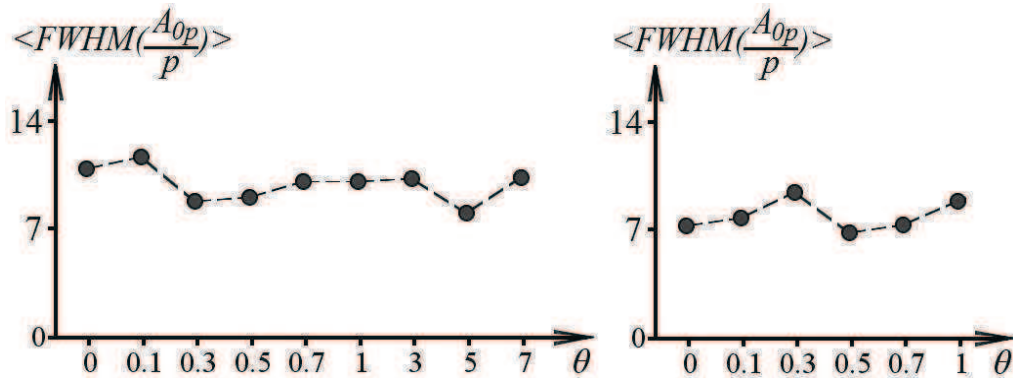


Рис.3. Средняя полуширина ($\langle FWHM \rangle$) спектра как функция поглощения Θ для нерелятивистского пучка $\gamma_{b0} = 1.6$ (слева) и релятивистского пучка $\gamma_{b0} = 10$ (справа)

Ограничимся для определения поля ленгмюровских колебаний в плазме только модами спектра пучка, которые находятся в пределах его полуширины. Перед определением полуширины спектр сглаживается методом простой скользящей средней. Выяснение величины полуширины спектра позволяет найти значения p_{\min}, p_{\max} . Так, например, среднее значение полуширины спектра $\frac{A_{0p}}{p}$ на выбранном промежутке для $\gamma_{b0} = 1.6$ и $\Theta = 0$ составляет 10.4.

Исходя из этого, интервал $[p_{\min}; p_{\max}]$ выбран равным 11 мод, но не 10 мод для сохранения симметрии $[p_{\min}; p_{\max}]$ относительно p_0 . При размере интервала $[p_{\min}; p_{\max}]$ 11 мод и $p_0 = 100$ для случая $\gamma_{b0} = 1.6$ и $\Theta = 0$ получается $p_{\min} = 95, p_{\max} = 105$. Аналогично выбран интервал $[p_{\min}; p_{\max}]$ для других случаев, исходя из найденных средних значений полуширины спектра.

Зависимость амплитуды поля ленгмюровских колебаний в плазме представлена на рис. 4. Пунктиром представлено сглаженное значение амплитуды поля.

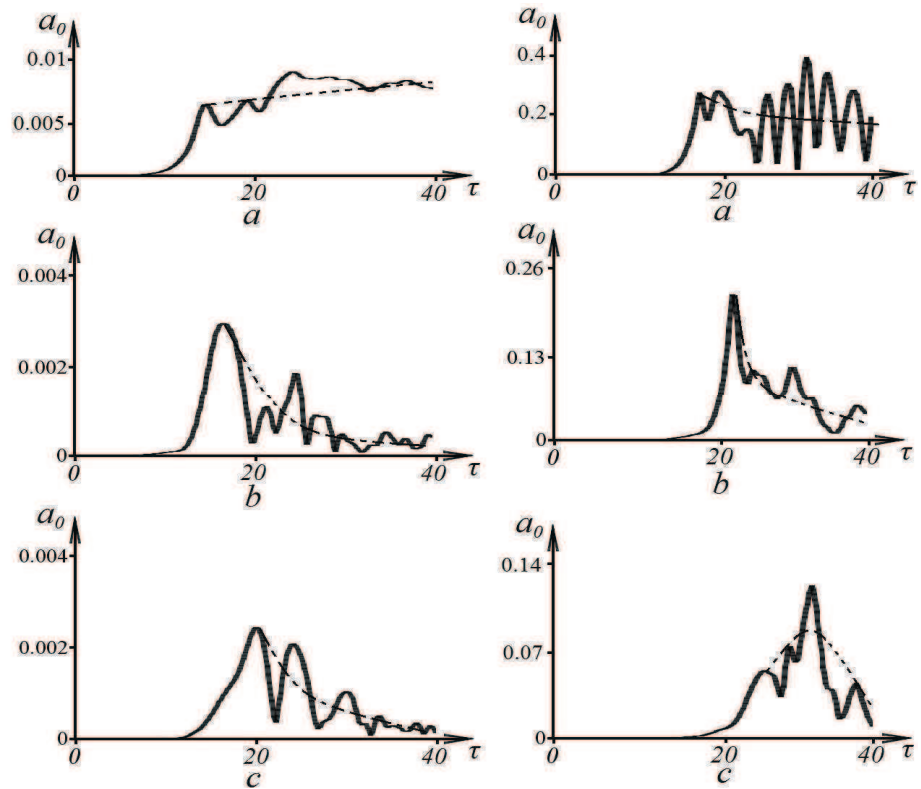


Рис.4. Поведение нормированной амплитуды среднего поля a_0 от времени для нерелятивистского пучка $\gamma_{b0} = 1.6$ (слева) и релятивистского пучка $\gamma_{b0} = 10$ (справа) ($a - \Theta = 0$, $b - \Theta = 0.5$, $c - \Theta = 1$)

Изменение фазы ленгмюровских колебаний от времени $d\phi_0 / d\tau$ изображено на рис.5.

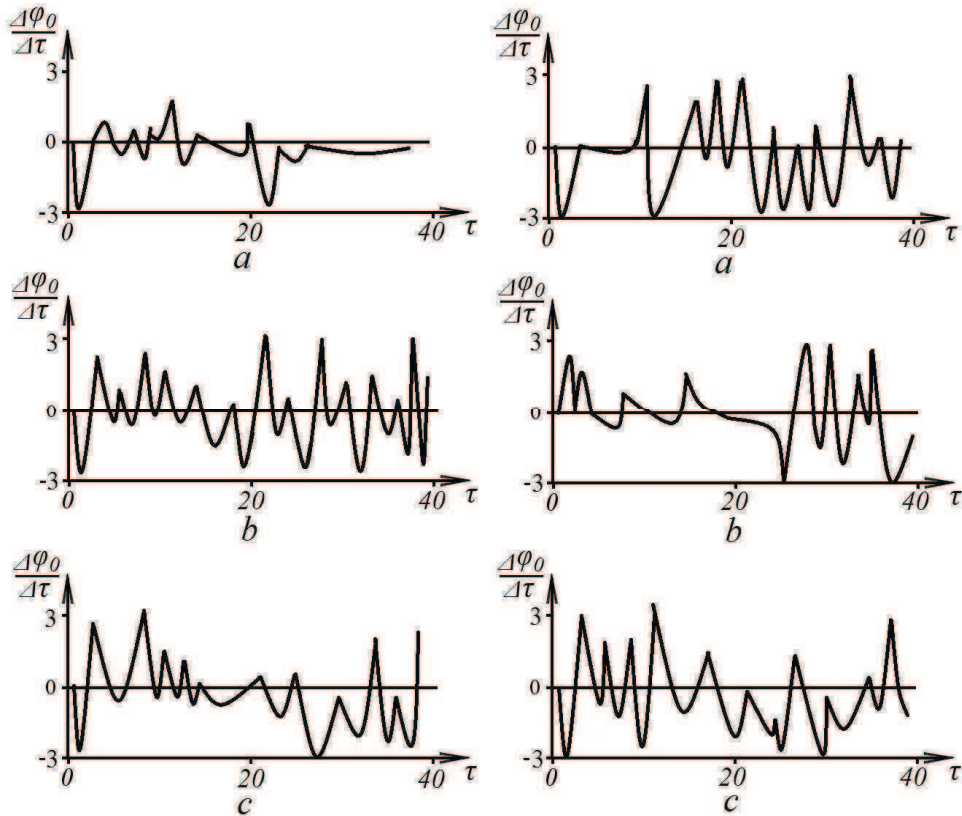


Рис.5. Поведение изменения фазы среднего поля $\Delta\varphi_0 / \Delta\tau$ от времени для нерелятивистского пучка $\gamma_{b_0} = 1.6$ (слева) и релятивистского пучка $\gamma_{b_0} = 10$ (справа) ($a - \Theta = 0, b - \Theta = 0.5, c - \Theta = 1$)

Можно определить характеристики спектра на интервале от τ_{MIN} (когда достигнут первый максимум плотности энергии колебаний спектра пучка) до $\tau_{MAX} = 50$. На рис.6 и рис.7 представлены среднее изменение частоты

$$\langle \Delta\omega_{pe} \rangle = \left\langle \frac{\delta}{\omega_{pe}} \frac{d\varphi_0}{d\tau} \right\rangle = \frac{1}{\tau_{MAX} - \tau_{MIN}} \int_{\tau_{MIN}}^{\tau_{MAX}} d\tau \left\{ \frac{\delta}{\omega_{pe}} \frac{d\varphi_0}{d\tau} \right\} \quad (12)$$

и среднеквадратичное отклонение значения частоты от среднего ее значения (ширина спектра)

$$[\langle (\Delta\omega_{pe} - \langle \Delta\omega_{pe} \rangle)^2 \rangle]^{1/2} = \left[\frac{1}{\tau_{MAX} - \tau_{MIN}} \int_{\tau_{MIN}}^{\tau_{MAX}} d\tau \left\{ \left(\frac{\delta}{\omega_{pe}} \frac{d\varphi_0}{d\tau} \right) - \left\langle \frac{\delta}{\omega_{pe}} \frac{d\varphi_0}{d\tau} \right\rangle \right\}^2 \right]^{1/2} \quad (13)$$

для разных значений уровня поглощения в случаях нерелятивистского и релятивистского пучка электронов

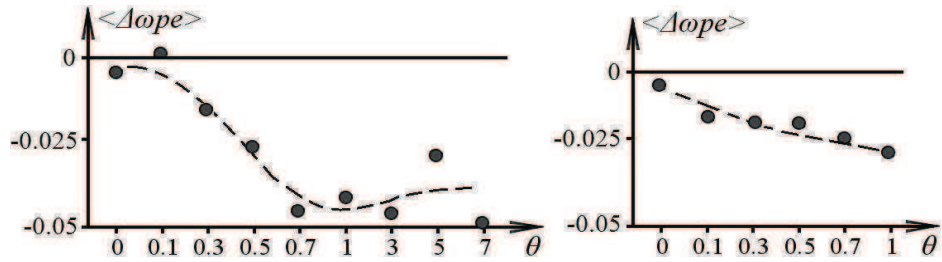


Рис.6. Среднее значение $\langle \Delta\omega_{pe} \rangle$ как функция поглощения Θ для нерелятивистского пучка $\gamma_{b0} = 1.6$ (слева) и релятивистского пучка $\gamma_{b0} = 10$ (справа). Пунктиром представлено сглаженное значение $\langle \Delta\omega_{pe} \rangle$

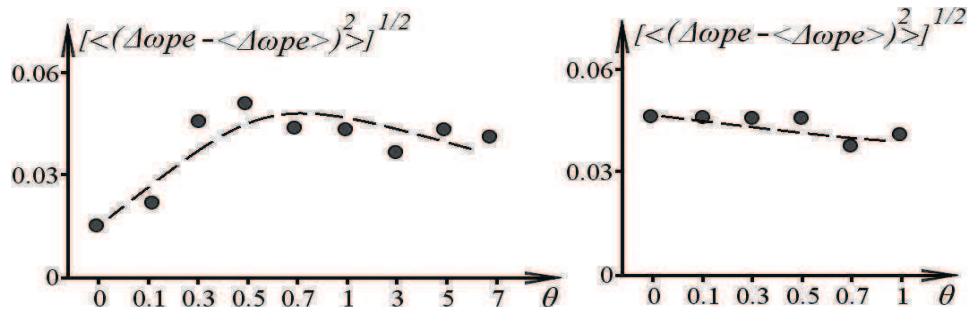


Рис.7. Среднеквадратичное отклонение $[\langle (\Delta\omega_{pe} - \langle \Delta\omega_{pe} \rangle)^2 \rangle]^{1/2}$ как функция поглощения Θ для нерелятивистского пучка $\gamma_{b0} = 1.6$ (слева) и релятивистского пучка $\gamma_{b0} = 10$ (справа). Пунктиром представлено сглаженное $[\langle (\Delta\omega_{pe} - \langle \Delta\omega_{pe} \rangle)^2 \rangle]^{1/2}$

Полуширина импульса поля возбуждаемых пучком колебаний во времени представлена на рис.8.

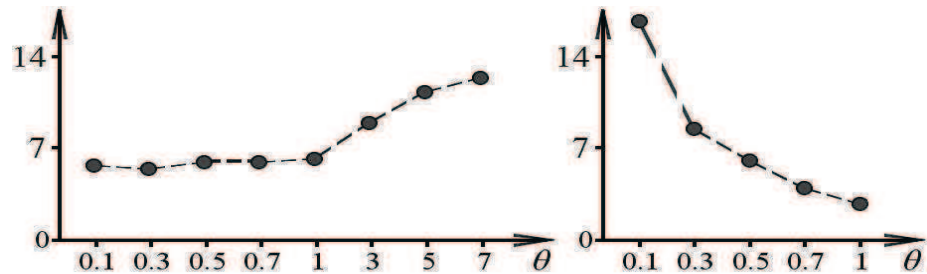


Рис.8. Размер полуширины первого локального максимума для плотности энергии поля (11) как функция поглощения Θ для нерелятивистского пучка $\gamma_{b0} = 1.6$ (слева) и релятивистского пучка $\gamma_{b0} = 10$ (справа)

На длине импульса поля можно определить среднее значение плотности энергии (рис.9) и среднее значение потерь энергии пучка на единице длины (рис.10) как функции уровня поглощения.

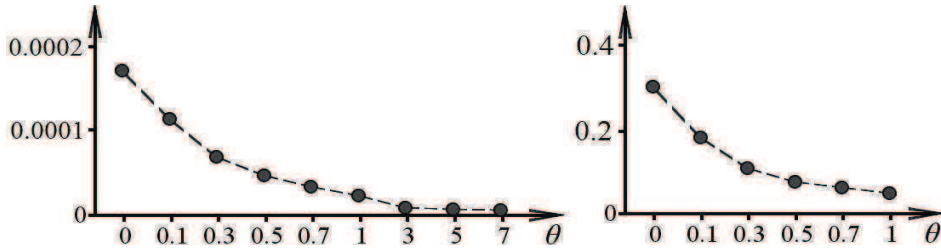


Рис.9. Среднее значение плотности энергии поля (11) на полуширине импульса поля как функция поглощения Θ для нерелятивистского пучка $\gamma_{b0} = 1.6$ (слева) и релятивистского пучка $\gamma_{b0} = 10$ (справа)

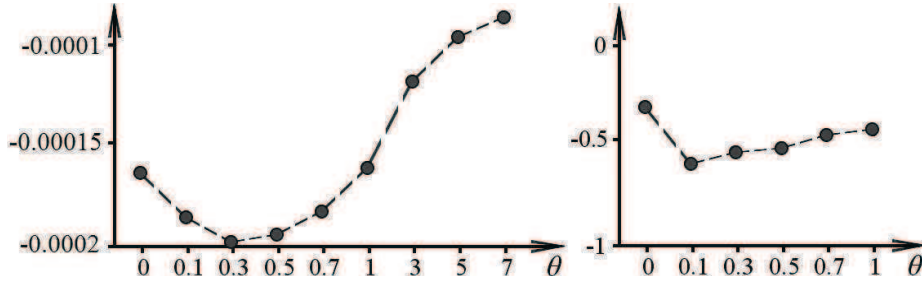


Рис.10. Среднее значение 3-го слагаемого интеграла (8) на полуширине импульса поля как функция поглощения Θ для нерелятивистского пучка $\gamma_{b0} = 1.6$ (слева) и релятивистского пучка $\gamma_{b0} = 10$ (справа)

Можно показать (рис.11), что при $\Theta \approx 0.6$ скорость отбора энергии у пучка наибольшая, хотя это не так явно выражено, как в одномодовом режиме [16].

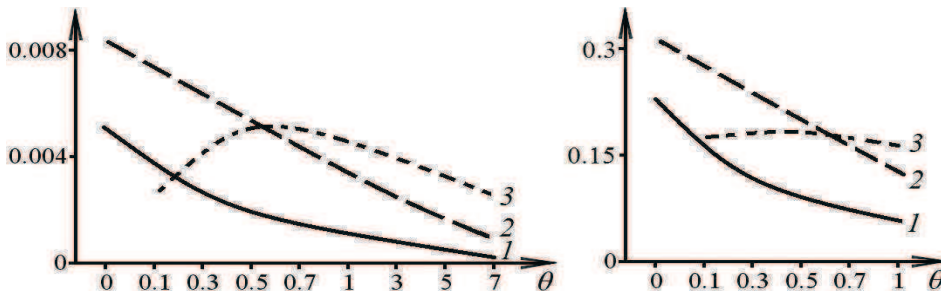


Рис.11. Значения как функция поглощения Θ для нерелятивистского пучка $\gamma_{b0} = 1.6$ (слева) и релятивистского пучка $\gamma_{b0} = 10$ (справа) (1 – a_{0max} , 2 – величина

$\delta(\Theta) / \omega_{pe} \approx \frac{\delta}{\omega_{pe}} \{1 + (\frac{3}{2})^{1/2} \Theta\}^{-1}$ деленная на 4 для $\gamma_{b0} = 1.6$ и умноженная на 10 для

$\gamma_{b0} = 10$, 3 – величина $\sum_{p=1}^P (\frac{p^2 + p_0^2}{8\pi p^2} 2\Theta \sum_0^\tau \frac{A_{0p}^2}{p^2} \partial\tau)$ умноженная на 30 для $\gamma_{b0} = 1.6$ и деленная на 3 для $\gamma_{b0} = 10$)

На функции распределения частиц по скоростям формируется возмущение (рис.12), которое в случае нерелятивистского пучка однозначно соответствует частицам, захваченным пакетом волн. По времени горб существует примерно на полуширине импульса поля (11). В релятивистском случае $\gamma_{b0} = 10$ частицы захватываются полем спорадически, и не существует длительной динамики синхронного взаимодействия пучка и волнового пакета.

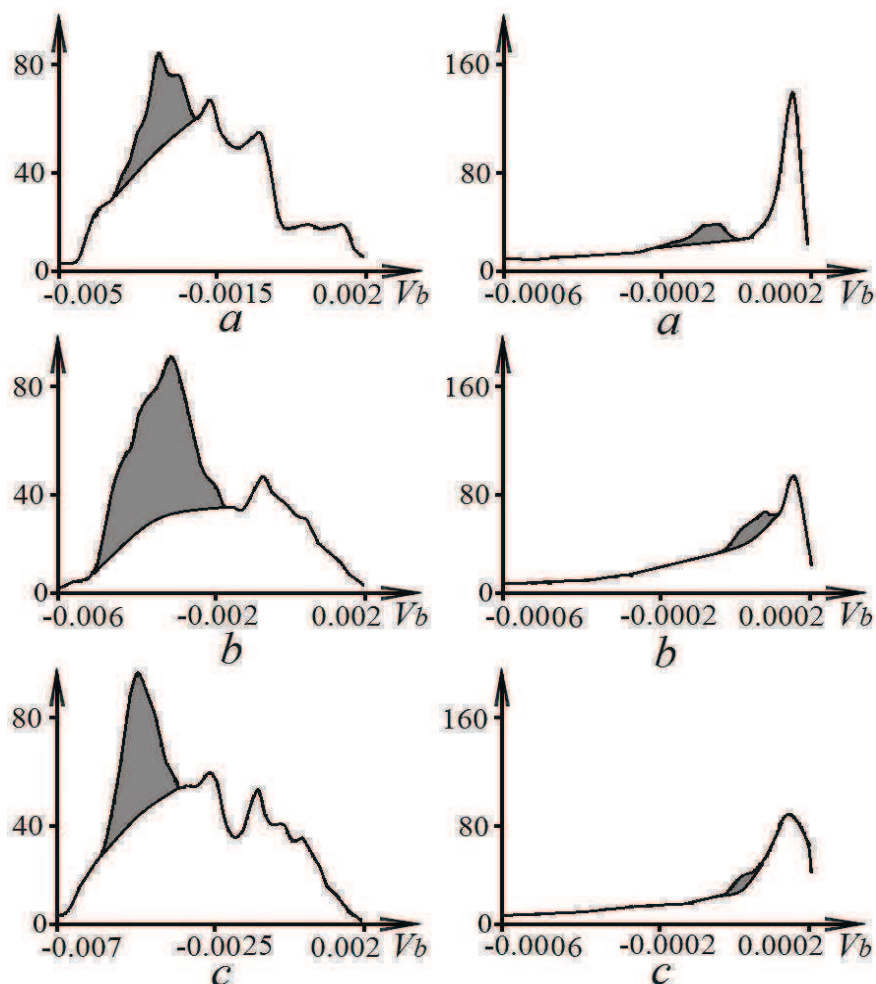


Рис.12. Локальные максимумы функции распределения (выделены серым цветом) при поглощении $\Theta = 0.5$ для нерелятивистского пучка $\gamma_{b0} = 1.6$ (слева) и релятивистского пучка $\gamma_{b0} = 10$ (справа)

На рис.13 представлена модуляция интегрального поля в системе покоя пучка в моменты, когда a_0 достигает максимального значения. Модуляция в нерелятивистском пучке, как было показано ранее [15], достаточно сильная и с ростом поглощения усиливается. В релятивистском пучке наблюдается обратная тенденция.

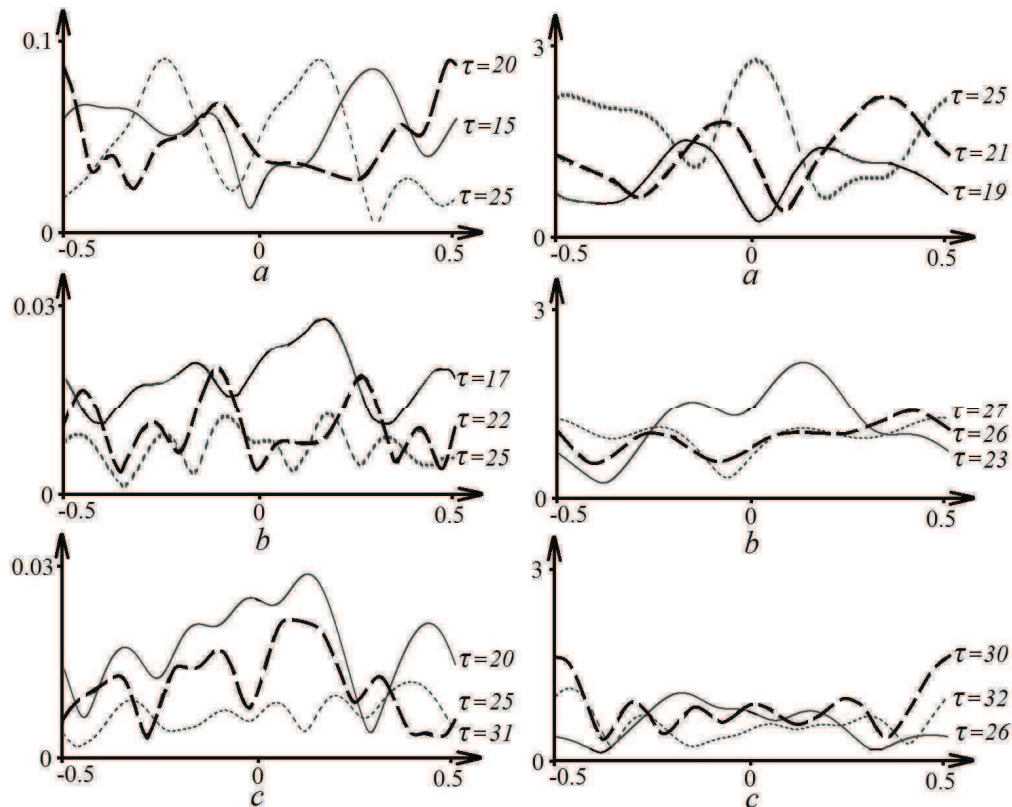


Рис.13. Модуляция интегрального поля в системе покоя пучка при максимумах a_0 для нерелятивистского пучка $\gamma_{b0} = 1.6$ (слева) и релятивистского пучка $\gamma_{b0} = 10$ (справа) ($a - \Theta = 0$, $b - \Theta = 0.5$, $c - \Theta = 1$)

5 Выводы

Развита 1D математическая модель описания взаимодействия релятивистского пучка электронов с плазмой в условиях линейного по амплитудам возмущений поглощения в плазме. Применена диагностика спектральных и амплитудных характеристик излучения в системе покоя пучка и в лабораторной системе отсчета, где плазма покоится.

Развитие пучковой неустойчивости в многомодовом режиме сопровождается уширением спектра, существенно более сильным воздействием поглощения энергии колебаний на процесс, чем в одномодовых случаях. В нерелятивистском пучке при поглощении $\Theta \approx 0.6$ отбор энергии наибольший, в одномодовом режиме [16] эти условия выполнены при $\Theta \approx 3$. То есть черты процесса, характерные для одномодовых диссипативных неустойчивостей (при которых $\Theta > 1$), в многомодовом случае проявляются уже при значениях $\Theta > 0.1 \div 0.3$. Такие уровни поглощения формально относятся к реактивным режимам процесса. Природа такого отбора состоит в создании условий синхронизации захваченной полем части частиц пучка и волнового пакета. В релятивистском случае такой выраженной синхронизации не наблюдается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Файнберг Я. Б. Некоторые вопросы плазменной электроники / Я. Б. Файнберг // Физика плазмы. – 1985, Т.11, № 11, С. 1398–1410.
2. Кузелев М. В. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме / М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 336 с.
3. Шапиро В. Д. Взаимодействие волна–частица в неравновесных средах / В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко // Радиофизика, 1976, Т.19, №5–6, С. 787–791.
4. Кондратенко А.Н. Основы плазменной электроники / А. Н. Кондратенко, В. М. Куклин. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.
5. Буц В.А. Когерентное излучение интенсивных электронных пучков / В. А. Буц, А. Н. Лебедев. – М. Изд. ФИАН РАН. 2006. – 333 с.
6. Силин В.П. Параметрический резонанс в плазме / В. П. Силин // ЖЭТФ, 1965. – т. 48, в.6. – С. 1679–1691.
7. Захаров В.Е. О спектре слабой турбулентности в плазме без магнитного поля. ЖЭТФ. – 1966. – том 51, вып.6. – С. 688–696.
8. Krueger, W. L., P. K. Kaw, J. M. Dawson, C. Oberman, Anomalous high-frequency resistivity and heating of a plasma. – 1970. – Phys. Rev. Lett., 24. – P. 987.
9. Силин В.П. Аномальная нелинейная диссипация высокочастотных радиоволн в плазме / В. П. Силин // УФН 1972. – том 108. – вып. 4. – С. 625–654.
10. Krueger W. L. Heating of underdense plasma by intense lasers. Phys. Fluids. 1973, V.16, N.9, P. 1548–1550.
11. Иванов А.А. Никулин М.Г. Нелинейное взаимодействие ленгмюровских волн большой амплитуды в бесстолкновительной плазме. – ЖЭТФ. – 1973. – Т. 65, № 1. – С. 168–174.
12. Андреев Н. Е. О насыщении параметрической неустойчивости плазмы в сильном электрическом поле / Н. Е. Андреев, В. П. Силин, Г. Л. Стенчиков // Физика плазмы. – 1977. – Т.3, №5. – С. 1088–1096.
13. Коврижных Л. М. Модуляционная неустойчивость и нелинейные волны в холодной плазме. Физика плазмы. – 1977. – Т.3, В.5. – С. 1097–1105.
14. Belkin E.V.. Dynamics of ions during development of parametric instability of langmuir waves / E.V. Belkin, A.V. Kirichok, V.M. Kuklin, A.V. Pryjmak,. A.G. Zagorodny // VANT, 2013, N. 4 (86) series “Plasma Electronics and New Methods of Acceleration” issue 8. P. 260–266.
15. Модуляция интегрального поля многомодовых пучковых неустойчивостей в плазме / А. Г. Загородний, А. В. Киричок, В. М. Куклин, А. В. Приймак // East Eur. J. Phys. 2014. V.1 No 2. – С. 53–66.
16. Кондратенко А. Н. Нелинейная теория пучковой неустойчивости в столкновительной плазме / А. Н. Кондратенко, В. М. Куклин, В. И. Ткаченко // Изв. вузов. Радиофизика. – 1978. – т.21, No 10. – С.1535–1537; Об аномальном уровне потерь энергии пучка при развитии диссипативной пучковой неустойчивости.// Украинский физический журнал 1979, Т. 24, №4, С. 559–561.