УДК 519.854.2

Составление расписания выполнения работ параллельными приборами с целью минимизации максимального отклонения от директивного срока

Е.Г. Жданова, А.А. Павлов, М.О. Сперкач

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Украина

В статье рассмотрены свойства задачи составления допустимого расписания выполнения работ параллельными приборами с целью минимизации максимального отклонения от директивного срока моментов завершения приборами всех их работ. Согласно методологии построения ПДС-алгоритмов, разработаны достаточные признаки оптимальности расписаний; определено множество перестановок, позволяющих последовательно улучшать значение критерия. Разработана полиномиальная составляющая ПДС-алгоритма решения задачи. Дана оценка отклонения от оптимума. Рассмотрено практическое применение разработанного алгоритма.

Ключевые слова: *календарное планирование, расписание, параллельные приборы, директивный срок, ПДС-алгоритм, минимизации максимального отклонения от директивного срока.*

У статті розглянуто дослідження властивостей задачі складання допустимого розкладу виконання завдань паралельними пристроями з метою мінімізації максимального відхилення від директивного терміну моментів завершення приладами усіх завдань. Згідно методології побудови ПДС-алгоритмів, розроблені достатні ознаки оптимальності розкладів; визначено множину перестановок, що дозволяють послідовно покращувати значення критерію. Розроблено поліноміальна складова ПДС-алгоритму розв'язання задачі. Наведена оцінка відхилення від оптимуму. Розглянуто практичне застосування розробленого алгоритму.

Ключові слова: *календарне планування, розклад, паралельні пристрої, директивний термін, ПДС-алгоритм, мінімізація максимального відхилення від директивного терміну.*

The article describes the properties of the problem of creating a feasibleschedule of jobs execution by parallel devicesaimed atminimizing the completion time maximum deviation from the due date. Applying the methodologyof PDC-algorithms, the sufficient criterions of optimal scheduleare developed;the permutations set is detectedthat allow this criterion consecutive improvement. The polynomial component of the PDC-algorithm for the problem solution is developed. The deviation from the optimumis evaluated.The practical applications of the developed algorithmsare considered.

Keywords: *scheduling, schedule, parallel devices, due date, PDC-algorithm, minimizing the maximum deviation from the due date.*

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Задано множество работ J ($|J| = n$), количество приборов m, для работы $j \in J$ известна продолжительность выполнения p_j. Предполагается, что все работы поступают одновременно и имеют общий директивный срок d ($d \in N$, $p_j \in N$, $j = \overline{1,n}$ - директивный срок и продолжительность выполнения работ являются натуральными числами). Процесс выполнения работ каждым из приборов является непрерывным: после выполнения первой по порядку сразу же начинает выполняться вторая и т.д. Работы выполняются без прерываний.

Необходимо найти расписание, в котором минимизируется максимальное отклонение от директивного срока момента завершения приборами всех своих работ.

В работерассматривается задача, для которой выполняется:

1) наибольший общий делитель значений продолжительностей выполнения всех работ ($p_j, j=\overline{1,n}$) и директивного срока (d) равен единице (этого всегда можно достичь, разделив эти величины на их наибольший общий делитель);

2) суммарное время, выделенное приборам на выполнение всех работ, примерно равно общему объему работы, которую должны выполнить эти приборы: $\sum_{j=1}^{n} p_j \approx dm$ и при этом $\left|\sum_{j=1}^{n} p_j - dm\right| < m$.

Второе условие можно интерпретировать так: суммарный объем работ соизмерим с выделенным фондом рабочего времени приборов.

2. Истоки исследования авторов

В работе [1, 2] рассмотрены близкие к исследуемой задаче, для решения которых используются метаэвристические алгоритмы (улучшенный муравьиный алгоритм, генетический алгоритм с перестановками). В роботе [3] была рассмотрена задача, близкая к исследуемой: задача календарного планирования выполнения работс общим директивным сроком идентичными параллельными приборами по критерию максимизации момента запуска приборов при условии, что все работы не запаздывают. Для решения этой задачи была применена методология построения ПДС-алгоритмов, которая позволила получить достаточно высокие результаты. Рассматриваемая работа является продолжениемработ [3,4], в которой также применяется методология построения ПДС-алгоритмов.

3. Цели работы

Цель настоящей работы – исследовать свойства задачи, разработать эффективный приближенный алгоритм ее решения.

4. Исследование свойств задачи

Рассмотрим некоторое расписание σ. Введем для него обозначения:

$C_i(\sigma)$ – момент завершениявыполнениявсех работ прибором i , $i=\overline{1,m}$;

$\Delta_i(\sigma) = \max\{0; C_i(\sigma) - d\}$, $i=\overline{1,m}$ (выступ прибора i);

$R_i(\sigma) = \max\{0; d - C_i(\sigma)\}$, $i=\overline{1,m}$ (резерв прибора i);

$I_\Delta(\sigma)$–множество приборов, у которых $\Delta_i(\sigma) > 0$;

$I_R(\sigma)$–множество приборов, у которых $R_i(\sigma) > 0$;

$I_0(\sigma)$–множество приборов, у которых $\Delta_i(\sigma) = R_i(\sigma) = 0$;

$J_i(\sigma)$–множество работ, которые в расписании σ выполняются прибором i .

С учетом выбранных обозначений критерий задачи имеет вид:

$$\max_i \{|C_i(\sigma) - d|\} \to \min$$

или

$$\max_i \{R_i(\sigma); \Delta_i(\sigma)\} \to \min .$$

Критерий оценки расписания можно интерпретировать так: необходимо найти такое расписание, в котором приборы нагружены максимально равномерно.

Обозначим через Ψ класс расписаний, для которых выполняется:

$$\neg\exists h,\ j, s \mid h \in I_\Delta(\sigma),\ j \in J_h(\sigma),\ s \in I_R(\sigma),\ p_j \le R_s(\sigma) \tag{1}$$

и

$$\neg\exists h,\ j, s \mid h \in I_\Delta(\sigma),\ j \in J_h(\sigma),\ s \in I_R(\sigma),\ p_j \le \Delta_h(\sigma), R_s(\sigma) > 0 \tag{2}$$

Утверждение 1. Существует оптимальное расписание, которое удовлетворяет условиям (1) и (2).

Доказательство

Если для расписания σ выполняется:

$$\exists h,\ j, s \mid h \in I_\Delta(\sigma),\ j \in J_h(\sigma),\ s \in I_R(\sigma),\ p_j \le R_s(\sigma)$$

и/или

$$\exists h,\ j, s \mid h \in I_\Delta(\sigma),\ j \in J_h(\sigma),\ \ s \in I_R(\sigma),\ p_j \le \Delta_h(\sigma), R_s(\sigma) > 0 ,$$

то перемещение работы j с прибора h на прибор s сохраняет значение критерия или приводит к его улучшению. Покажем это.

Предположим, что σ– расписание, которое не удовлетворяет условию (1). Это означает, что на некотором приборе $h \in I_\Delta(\sigma)$ выполняется работа j, длительность которой не превышает резерв некоторого другого прибора $s \in I_R(\sigma)$: $p_j \le R_s(\sigma)$. Перемещение работы j с прибора h на прибор s приведет к таким последствиям:

$$\Delta_h(\sigma^1) = \begin{cases} \Delta_h(\sigma) - p_j, \text{ если } p_j < \Delta_h(\sigma), \\ 0, \quad \text{если } p_j \ge \Delta_h(\sigma); \end{cases}$$

$$\Delta_s(\sigma^1) = \Delta_s(\sigma) = 0 ;$$

$$R_s(\sigma^1) = R_s(\sigma) - p_j ;$$

$$R_h(\sigma^1) = \begin{cases} 0, \quad \text{если } p_j \le \Delta_h(\sigma), \\ p_j - \Delta_h(\sigma), \text{ если } p_j > \Delta_h(\sigma); \end{cases}$$

где σ^1 - расписание, полученное в результате перестановки.

В результате перестановки по сравнению с расписанием σ мог увеличиться только резерв прибора h (если только $p_j > \Delta_h(\sigma)$), но этот вновь образовавшийся резерв $R_h(\sigma^1)$ будет меньше резерва $R_s(\sigma)$. Покажем это:

$$R_s(\sigma) - R_h(\sigma^1) = R_s(\sigma) - (p_j - \Delta_h(\sigma)) = R_s(\sigma) - p_j + \Delta_h(\sigma) > 0,$$

поскольку в этом случае, $R_s(\sigma) - p_j \geq 0$, $\Delta_h(\sigma) > 0$.

Итак, в результате перестановки получим:

$$\max_{h,s}\{\Delta(\sigma^1)\} < \max_{h,s}\{\Delta_i(\sigma)\},$$

$$\max_{h,s}\{R(\sigma^1)\} < \max_{h,s}\{R_i(\sigma)\},$$

а значит, значение критерия в полученном расписании σ^1 не ухудшится:

$$\max_i\{R_i(\sigma^1); \Delta_i(\sigma^1)\} \leq \max_i\{R_i(\sigma); \Delta_i(\sigma)\}.$$

Если прибор h или прибор s имели в расписании максимальное из отклонений от директивного срока, то значение критерия после перестановки улучшится.

Предположим теперь, что σ – расписание, которое не удовлетворяет условию (2). Это означает, что на некотором приборе $h \in I_\Delta(\sigma)$ есть работа, длительность которой не превышает величину выступа этого прибора $p_j \leq \Delta_h(\sigma)$, в то время как некоторый другой прибор $s \in I_R(\sigma)$ имеет резерв $R_s(\sigma) > 0$. Перемещение работы j с прибора h на прибор s приведет к таким последствиям (таблица 1).

Табл.1. Сопоставление значений выступов и резервов в расписаниях σ и σ^1

		Прибор h	Прибор s
Расписание σ	Выступ	$\Delta_h(\sigma)$	0
	Резерв	0	$R_s(\sigma)$
Расписание σ^1	Выступ	$\Delta_h(\sigma) - p_j$	0, если $p_j \leq R_s(\sigma)$ $p_j - R_s(\sigma)$, если $p_j > R_s(\sigma)$
	Резерв	0	$R_s(\sigma) - p_j$, если $p_j \leq R_s(\sigma)$ 0, если $p_j > R_s(\sigma)$

При этом:

$$\max_{h,s}\left\{\Delta\left(\sigma^1\right)\right\} < \max_{h,s}\left\{\Delta_i(\sigma)\right\},$$

$$\max_{h,s}\left\{R\left(\sigma^1\right)\right\} < \max_{h,s}\left\{R_i(\sigma)\right\},$$

а значит

$$\max_i\left\{R_i\left(\sigma^1\right); \Delta_i\left(\sigma^1\right)\right\} \le \max_i\left\{R_i(\sigma); \Delta_i(\sigma)\right\}.$$

Если прибор h или прибор s имели в расписании максимальное из отклонений от директивного срока по всем приборам, то значение критерия после перестановки улучшится.

Таким образом, существует оптимальное расписание, которое удовлетворяет условиям (1) и (2). Что и требовалось доказать.

5. Признаки оптимальности расписаний

Введем величину $\delta = \sum_{j=1}^{n} p_j - dm$. Для расписания $\sigma \in \Psi$ возможны такие взаимоисключающие случаи.

Случай I. $\delta = 0$, $C_i(\sigma) = d$, $i = \overline{1,m}$. В этом случае имеем расписание с равномерной загрузкой приборов. Очевидно, что это расписание является оптимальным.

Случай II. $\delta \ne 0$ (в этом случае невозможно построить расписание с равномерной загрузкой приборов).

Часть приборов завершают свою работу до директивного срока, часть – после. В этом случае расписание, у которого:

$$\Delta_i(\sigma) \in \{0,1\},\ \ i = \overline{1,m};$$

$$R_i(\sigma) \in \{0,1\},\ \ i = \overline{1,m};$$

является оптимальным.

Случай IIA. $\delta > 0$.

IIA.1. Все приборы завершают работу не раньше директивного срока:

$$C_i(\sigma) \ge d,\ \ i = \overline{1,m},$$

или

$$R_i(\sigma) = 0,\ \ i = \overline{1,m}. \tag{3}$$

В этом случае расписание, в котором:

$$\Delta_i(\sigma) \in \{0,1\}\ \ i = \overline{1,m}, \tag{4}$$

является оптимальным.

ІІА.2. В оптимальном расписании могут иметь место приборы с ненулевым (единичным) резервом. Для сохранения оптимальности расписания, каждый дополнительный ненулевой (единичный) резерв должен быть компенсирован ненулевым (единичным) выступом. При выполнении условий (3)-(4) количество приборов, в которых $R_i(\sigma) = \Delta_i(\sigma) = 0$, составляет $m - \delta$. Итак, максимально возможное количество приборов с $R_i(\sigma) = 1$ составляет $\frac{m-\delta}{2}$, если разность $m - \delta$ четная, и $\left\lfloor \frac{m-\delta}{2} \right\rfloor$, если эта разность нечетная (здесь: $\lfloor a \rfloor$ - наибольшее целое, для которого выполняется: $\lfloor a \rfloor \le a$). При этом максимально возможное количество приборов с $\Delta_i(\sigma) = 1$ составляет $\delta + \left\lfloor \frac{m-\delta}{2} \right\rfloor$.

Случай IIБ: $\delta < 0$.

IIБ.1. Момент завершения всех работ каждым прибором не превышает директивного срока:

$$C_i(\sigma) \le d, \; i = \overline{1, m}$$

или

$$\Delta_i(\sigma) = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

В этом случае расписание, в котором:

$$R_i(\sigma) \in \{0,1\}, \; i = \overline{1, m}$$

является оптимальным (при этом количество приборов с ненулевым резервом составляет $|\delta|$).

IIБ.2. В оптимальном расписании могут иметь место приборы с ненулевым (единичным) выступом. Для сохранения оптимальности расписания, каждый дополнительный ненулевой (единичный) выступ должен быть компенсирован ненулевым (единичным) резервом.

Утверждение 2. Для произвольного расписания σ выполняется:

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta_i(\sigma) = \sum_{i=1}^{m} R_i(\sigma) + \delta.$$

Доказательство.

Время занятости прибора i:

$$C_i(\sigma) = d - R_i(\sigma) + \Delta_i(\sigma), \; i = \overline{1, m}. \tag{5}$$

С другой стороны, имеем:

$$C_i(\sigma) = \sum_{j \in J_i(\sigma)} p_j. \tag{6}$$

С учетом (6) перепишем (5)

$$\sum_{j \in J_i(\sigma)} p_j = d - R_i(\sigma) + \Delta_i(\sigma). \tag{7}$$

Просуммируем (7) по i:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in J_i(\sigma)} p_j = \sum_{i=1}^{m} (d - R_i(\sigma) + \Delta_i(\sigma)),$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_j = \sum_{i=1}^{m} d - \sum_{i=1}^{m} R_i(\sigma) + \sum_{i=1}^{m} \Delta_i(\sigma),$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_j = md - \sum_{i=1}^{m} R_i(\sigma) + \sum_{i=1}^{m} \Delta_i(\sigma),$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_j - md = \sum_{i=1}^{m} \Delta_i(\sigma) - \sum_{i-1}^{m} R_i(\sigma),$$

$$\delta = \sum_{i=1}^{m} \Delta_i(\sigma) - \sum_{i=1}^{m} R_i(\sigma),$$

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta_i(\sigma) = \sum_{i=1}^{m} R_i(\sigma) + \delta.$$

Что и требовалось доказать.

6. Перестановки, улучшающие расписания

Оптимизация расписания заключается в последовательном уменьшении величины $\max_i \{R_i(\sigma); \Delta_i(\sigma)\}$, этого можно достичь посредством обмена работами между приборами: когда некоторое подмножество работ с прибора h (обозначим его $K_h(\sigma)$, $K_h(\sigma) \subseteq J_h(\sigma)$) меняется местами с некоторым подмножеством работ с прибора s (обозначим это подмножество как $L_s(\sigma)$, $L_s(\sigma) \subseteq J_s(\sigma)$). Обозначим через θ разность между суммами длительностей работ, которые принимают участие в перестановке:

$$\theta = \sum_{j \in K_h(\sigma)} p_j - \sum_{j \in L_s(\sigma)} p_j.$$

При этом в результате таких перестановок, примененных к расписанию σ, в новом расписании σ^1 для величин $\sum_{i=1}^{m} \Delta_i(\sigma^1)$ и $\sum_{i=1}^{m} R_i(\sigma^1)$ выполняется:

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta_i(\sigma) - \sum_{i=1}^{m} \Delta_i(\sigma^1) = \sum_{i=1}^{m} R_i(\sigma) - \sum_{i=1}^{m} R_i(\sigma^1).$$

Множество перестановок, в зависимости от их последствий, можно разделить на типы:

– уменьшение резерва (выступа) одного прибора за счет уменшения выступа (резерва) другого (тип ***А***);

– уменьшение выступа с появлением выступа на другом приборе (тип $\boldsymbol{Б}\Delta$);

– уменьшение резерва с появлением резерва на другом приборе (тип $\boldsymbol{Б}R$);

– исключение выступа (резерва) прибора с появлением резерва (выступа) (тип ***В***);

– перераспределение выступов (тип $\boldsymbol{Г}\Delta$);

– перераспределение резервов (тип $\boldsymbol{Г}R$).

В работе [4] были разработаны такие типы перестановок: $\boldsymbol{А},\boldsymbol{Б}\Delta$, $\boldsymbol{В},\boldsymbol{Г}\Delta$. В процессе работы были определены еще новые типы перестановок, которые детально рассмотрим.

Рассмотрим перестановки типа $\boldsymbol{Б}R$ и $\boldsymbol{Г}R$, которые направленны на уменьшение максимального из резервов.

Цель перестановок типа $\boldsymbol{Б}R$: уменьшение максимального из резервов за счет выступа прибора из множества I_Δ (с появлением резерва на этом приборе). В результате перестановок этого типа может увеличиться множество I_R. Условия выполнения перестановки типа $\boldsymbol{Б}R$:

$$\theta > 0,$$

$$\theta > \Delta_h(\sigma), \tag{8}$$

$$\theta \le R_s(\sigma). \tag{9}$$

В результате перестановки получаем расписание σ^1, в котором:

$$R_h(\sigma^1) = \theta - \Delta_h(\sigma),$$

$$R_s(\sigma^1) = R_s(\sigma) - \theta,$$

$$h \in I_R(\sigma^1).$$

Резерв, который был максимальным в σ, уменьшился на θ:

$$R_s(\sigma^1) = \max_{i \in I_R(\sigma)} R_i(\sigma) - \theta,$$

но при этом для вновь образованного резерва выполняется: $R_h(\sigma^1) < R_s(\sigma)$. Покажем это: $R_s(\sigma) - R_h(\sigma^1) = R_s(\sigma) - (\theta - \Delta_h(\sigma)) = R_s(\sigma) + \Delta_h(\sigma) - \theta > 0$, так как, $R_s(\sigma) - \theta \ge 0$, $\Delta_h(\sigma) > 0$. Таким образом, расписание σ^1 не хуже, чем расписание σ, а при отсутствии альтернатив при выборе прибора s – лучше чем σ.

Перестановки типа $\boldsymbol{Б}R$ также разделяются на подтипы в зависимости от количества работ, принимающих участие в перестановке. В таблице 2 приведены характеристики перестановок типа $\boldsymbol{Б}R$.

Табл.2. Характеристики перестановок типа $\boldsymbol{Б}\,R$

Тип перестановки	Приборы и работы, которые принимают участие в перестановке		θ ($\theta > 0$)	Условие, при котором выполняется перестановка	Характеристики результирующего расписания σ^1
	h	s			
1-1 $\boldsymbol{Б}\,R$	$h \in I_\Delta(\sigma)$, $j_1 \in J_h(\sigma)$	$s \in I_R(\sigma)$, $j_2 \in J_s(\sigma)$	$p_{j_1} - p_{j_2}$	$\theta > \Delta_h(\sigma)$, $\theta \le R_s(\sigma)$	$R_h(\sigma^1) = \theta - \Delta_h(\sigma)$, $R_s(\sigma^1) = R_s(\sigma) - \theta$
1-2 $\boldsymbol{Б}\,R$	$h \in I_\Delta(\sigma)$, $j_1 \in J_h(\sigma)$	$s \in I_R(\sigma)$, $j_2, j_3 \in J_s(\sigma)$	$p_{j_1} - (p_{j_2} + p_{j_3})$		
2-1 $\boldsymbol{Б}\,R$	$h \in I_\Delta(\sigma)$, $j_1, j_2 \in J_h(\sigma)$	$s \in I_R(\sigma)$, $j_3 \in J_s(\sigma)$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) - p_{j_3}$		
2-2 $\boldsymbol{Б}\,R$	$h \in I_\Delta(\sigma)$, $j_1, j_2 \in J_h$	$s \in I_R(\sigma)$, $j_3, j_4 \in J_s(\sigma)$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) - (p_{j_3} + p_{j_4})$		

Множество перестановок типа $\boldsymbol{Б}\,R$ приводит к тому, что текущая мощность множества I_R увеличивается, но при этом величина максимального из резервов уменьшается.

Цель перестановок типа $\boldsymbol{Г}\,R$: уменьшение максимального значения резерва за счет перераспределения резервов между приборами.
Условия выполнения перестановки типа $\boldsymbol{Г}\,R$:

$$\theta > 0,$$

$$\theta \le R_s(\sigma), \tag{10}$$

$$\theta < R_s(\sigma) - R_h(\sigma). \tag{11}$$

В результате перестановки получаем расписание σ^1, в котором:

$$R_s(\sigma^1) = R_s(\sigma) - \theta,$$

$$R_h(\sigma^1) = R_h(\sigma) + \theta\,.$$

и при этом для расписания σ^1 выполняется:

$$\sum_{i=1}^{m} R_i(\sigma^1) = \sum_{i=1}^{m} R_i(\sigma),$$

но

$$\max\left\{R_h\left(\sigma^1\right), R_s\left(\sigma^1\right)\right\} < \max\left\{R_h(\sigma), R_s(\sigma)\right\},$$

то есть, расписание σ^1 не хуже чем σ.

Перестановки типа $\boldsymbol{\Gamma}R$ также разделяются на подтипы в зависимости от количества работ, принимающих участие в перестановке. В таблице 3приведены характеристики перестановок типа $\boldsymbol{\Gamma}R$.

Для выбранной пары приборов $s-h$ в результате перестановок типа $\boldsymbol{\Gamma}R$ получаем такое уменьшение значения максимального из резервов этих приборов в двух расписаниях: $R_s(\sigma)-\max\{R_s(\sigma)-\theta,\ R_h(\sigma)+\theta\}$.

Табл.3. Характеристики перестановок типа ΓR

Тип перес-тановки	Приборы и работы, которые принимают участие в перестановке		θ ($\theta > 0$)	Условие, при котором выполняется перестановка	Характерис-тики результи-рующего расписания σ^1
	h	s			
1-1 $\mathbf{\Gamma}R$	$h \in I_R(\sigma) \cup I_0(\sigma)$, $j_2 \in J_h(\sigma)$	$s \in I_R(\sigma)$, $j_1 \in J_s(\sigma)$	$p_{j_1} - p_{j_2}$	$\theta \le R_s(\sigma)$, $\theta < R_s(\sigma) - R_h(\sigma)$	$R_s(\sigma^1) = R_s(\sigma) - \theta$, $R_h(\sigma^1) = R_h(\sigma) + \theta$
1-2 $\mathbf{\Gamma}R$	$h \in I_R(\sigma) \cup I_0(\sigma)$, $j_2, j_3 \in J_h(\sigma)$	$s \in I_R(\sigma)$, $j_1 \in J_s(\sigma)$	$p_{j_1} - (p_{j_2} + p_{j_3})$		
2-1 $\mathbf{\Gamma}R$	$h \in I_R(\sigma) \cup I_0(\sigma)$, $j_3 \in J_h(\sigma)$	$s \in I_R(\sigma)$, $j_1, j_2 \in J_s(\sigma)$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) - p_{j_3}$		
2-2 $\mathbf{\Gamma}R$	$h \in I_R(\sigma) \cup I_0(\sigma)$, $j_1, j_2 \in J_h(\sigma)$	$s \in I_R(\sigma)$, $j_3, j_4 \in J_s(\sigma)$	$(p_{j_3} + p_{j_4}) - (p_{j_1} + p_{j_2})$		

Разработанное множество перестановок положено в основу ПДС-алгоритма решения задачи, который имеет следующие свойства: полиномиальная составляющая алгоритма (признаки оптимальности и полиномиальный алгоритм, который их проверяет) одновременно является полиномиальной аппроксимацией экспоненциальной составляющей ПДС-алгоритма.

В таблице 4 рассмотрены все возможные соотношения между величинами θ, Δ_h и R_s, а также указаны соответствующие им значения изменения частичной целевой функции (максимального из выступов или резервов приборов h и s).

Табл.4.Сравнение влияния перестановок на значение целевой функции

<table>
<tr><th>Условия</th><th>Уменьшение значения $\max\limits_{i\in\{h,s\}} \Delta_i$</th><th>Уменьшение значения $\max\limits_{i\in\{h,s\}} R_i$</th><th>Уменьшение значения $\max\limits_{i\in\{h,s\}} \max\{\Delta_i, R_i\}$</th></tr>
<tr><td>$\theta \le \Delta_h$, $\theta \le R_s$</td><td colspan="3">θ</td></tr>
<tr><td>$\Delta_h \le \theta \le R_s$, $\theta \le \left\lfloor \frac{\Delta_h + R_s}{2} \right\rfloor$</td><td rowspan="2">$\Delta_h$</td><td>$\theta$</td><td>$\theta$</td></tr>
<tr><td>$\Delta_h \le \theta \le R_s$, $\theta \ge \left\lfloor \frac{\Delta_h + R_s}{2} \right\rfloor + 1$</td><td>$\Delta_h + R_s - \theta$</td><td>$\Delta_h + R_s - \theta$</td></tr>
<tr><td>$R_s \le \theta \le \Delta_h$, $\theta \le \left\lfloor \frac{\Delta_h + R_s}{2} \right\rfloor$</td><td>$\theta$</td><td rowspan="2">$R_s$</td><td>$\theta$</td></tr>
<tr><td>$R_s \le \theta \le \Delta_h$, $\theta \ge \left\lfloor \frac{\Delta_h + R_s}{2} \right\rfloor + 1$</td><td>$\Delta_h + R_s - \theta$</td><td>$\Delta_h + R_s - \theta$</td></tr>
<tr><td>$\theta \ge \Delta_h$, $\theta \ge R_s$</td><td colspan="3">$\Delta_h + R_s - \theta$</td></tr>
</table>

7. ПДС-алгоритм решения задачи

На основании признаков оптимальности и разработанного множества перестановок построен алгоритм решения задачи.

Схема алгоритма

ШАГ 1 Построить начальное расписание σ^0, $\sigma = \sigma^0$.

ШАГ 2 Определить множества $I_\Delta(\sigma)$, $I_R(\sigma)$ и $I_0(\sigma)$.

ШАГ 3 *Проверка выполнения признаков оптимальности*

ЕСЛИ выполняется один из признаков оптимальности

ТО конец, σ – оптимальное расписание.

ШАГ 4 Определить прибор q, которому соответствует максимум $\max\limits_i \{R_i(\sigma); \Delta_i(\sigma)\}$.

ШАГ 5 ЕСЛИ $q \in I_\Delta(\sigma)$, **ТО** перейти на **ШАГ6**

ИНАЧЕ ($q \in I_R(\sigma)$) перейти на **ШАГ7**.

ШАГ 6 Для прибора $h = q$ перебирая все приборы $s \in I_R(\sigma)$ выполнить перестановку типа ***А***, ***Б***Δ или ***В***.

ЕСЛИ таких перестановок не нашлось,

ТО

6.1 Для прибора $h = q$ перебирая все приборы $s \in I_0(\sigma) \cup I_\Delta(\sigma)$ выполнить перестановку типа ***Г***Δ **.**

6.2 ЕСЛИ таких перестановок не нашлось,

ТО конец алгоритма,

ИНАЧЕ перейти на **ШАГ 2.**

ИНАЧЕ перейти на **ШАГ 2.**

ШАГ 7 Для прибора $s = q$ перебирая все приборы $h \in I_{\Delta}(\sigma)$ выполнить перестановку типа ***А*, *Б*** R или ***В***.

ЕСЛИ таких перестановок не нашлось,

ТО

7.1 Для прибора $s = q$ перебирая все приборы $s \in I_0(\sigma) \cup I_R(\sigma)$ выполнить перестановку типа ***Г*** R.

7.2 ЕСЛИ таких перестановок не нашлось,

ТО конец алгоритма,

ИНАЧЕ перейти на **ШАГ 2.**

ИНАЧЕ перейти на **ШАГ 2.**

КОНЕЦ АЛГОРИТМА

Возможные варианты реализации **ШАГОВ 6** и **7**:

1) находим первую перестановку, которая улучшает расписание, и выполняем ее;

2) перебираем все допустимые перестановки, находим среди них самую эффективную и выполняем ее.

В работе [3] приведен жадный алгоритм построения расписания σ^0, которое принадлежит классу расписаний Ψ. Это расписание может быть взято в качестве начального.

Сложность алгоритма составляет $O\left(n^4 W\right)$, где $W = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Это объясняется следующим. На каждом шаге значение целевой функции уменьшается, по меньшей мере на 1. Значит, в худшем случае, алгоритм сделает количество шагов, равное значению суммы выступов и резервов в начальном расписании σ^0. Величина W является очень грубой верхней оценкой значения $\sum_{i=1}^{m} \Delta_i\left(\sigma^0\right) + \sum_{i=1}^{m} R_i\left(\sigma^0\right)$. На каждом шаге самой трудоемкой операцией является операция поиска допустимых перестановок подтипов 2-2, которая сводится к анализу длительностей всех пар работ двух выбранных приборов (верхняя граница количества пар работ на одномприборе равна $n(n-1)/2$, отсюда и n^4). Если же используются только перестановки подтипов 1-1, то сложность алгоритма составляет $O\left(n^2 W\right)$. Отметим также тот факт, что для результирующего расписания σ (для которого не выполняются условия оптимальности) величина

$$\rho = \begin{cases} \max\limits_{i}\left\{R_i(\sigma); \Delta_i(\sigma)\right\}, \; e.\ \delta = 0 \\ \max\limits_{i}\left\{R_i(\sigma); \Delta_i(\sigma)\right\} - 1, \; e.\ \delta \neq 0 \end{cases}$$

дает величину максимально отклонения от оптимума.

8. Пример применения алгоритма

Возьмем для примера задачу, в которой количество приборов $m = 6$, количество работ $n = 14$, директивный срок $d = 17$.

Определим основные расчетные величины алгоритма: $C^* = 17$, $\delta = 4$. Так как $\delta < 0$, то в процессе применения алгоритма нашим ориентиром является признак оптимальности 2.

Начальное расписание σ^0, построенное по алгоритму A0[1], представлено на рисунке 1.

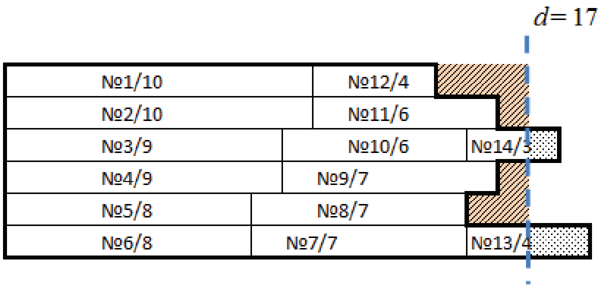

Рис.1 Начальное расписание σ^0

Примечание: Запись №1/10 означает: №1 – номер работы, /10 – длительность выполнения этой работы.

Для уменьшения количества возможных вариантов перестановок при решении данной задачи будем применять только перестановки подтипа 1-1.

Итерация №1

Для начального расписания σ^0 имеем: $C_1 = 14$, $C_2 = 16$, $C_3 = 18$, $C_4 = 16$, $C_5 = 15$, $C_6 = 19$. Определим множества $I_0(\sigma)$, $I_\Delta(\sigma)$ и $I_R(\sigma)$:

$I_0(\sigma) = \{0\}$;

$I_\Delta(\sigma) = \{3;6\}$; $\Delta_3(\sigma^0) = 1$, $\Delta_6(\sigma^0) = 2$;

$I_R(\sigma) = \{1;2;4;5\}$; $R_1(\sigma^0) = 3$, $R_2(\sigma^0) = 1$, $R_4(\sigma^0) = 1$, $R_5(\sigma^0) = 2$.

Прибор с максимальным отклонением от директивного срока: $s = 1$ ($s \in I_R(\sigma)$) – прибор с максимальным значением резерва.

Определим прибор $h \in I_\Delta(\sigma)$ из «противоположного» множества, который имеет максимальное значение выступа: $h = 6$.

Определим, каким парам работ приборов6 и 1 соответствуют допустимые перестановки (перестановки, которые приводят к улучшению расписания). Для этого сначала выделим те пары работ, для которых $\theta = p_{j_1} - p_{j_2} > 0$ (к ним относятся пары работ 6-12, 7-12). А потом проанализируем, как соотносятся величины θ, Δ_6 и R_1, то есть, к какому из типов ***A***, ***Б*** R, ***Б*** Δ или ***B*** относится потенциальная перестановка. В таблице 5 приведены перестановки, которые являются допустимыми для пары приборов 6-1.

Табл.5.Параметры допустимых перестановок для пары приборов 6-1

Пара работ	Δ_6	R_1	θ	$\Delta_6 + R_1 - \theta$	Величина улучшения	Тип перес-тановки
6-12	2	3	4	1	1	***В***
7-12	2	3	3	2	2	***Б*** *R*

Последствия перестановки пары работ 7-12 лучше, чем пары работ 6-12, поэтому выберем эту перестановку и выполним ее.На рисунке 2 изображено расписание σ^1, полученное в результате этой перестановки.

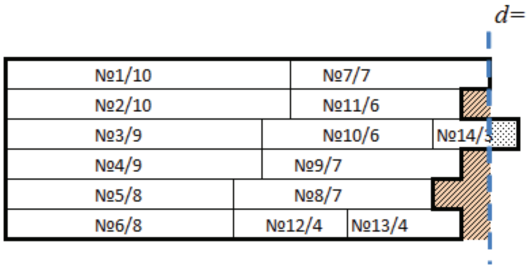

Рис.2 Расписание σ^1

Для расписания σ^1 не выполняется признак оптимальности 2, продолжаем работу алгоритма.

Итерация №2

Для расписания σ^1 имеем: $C_1 = 17$, $C_2 = 16$, $C_3 = 18$, $C_4 = 16$, $C_5 = 15$, $C_6 = 16$. Определим множества $I_0(\sigma)$, $I_\Delta(\sigma)$и $I_R(\sigma)$:

$I_0(\sigma) = \{1\}$;

$I_\Delta(\sigma) = \{3\}$; $\Delta_3(\sigma^1) = 1$;

$I_R(\sigma) = \{2;4;5;6\}$; $R_2(\sigma^1) = 1$, $R_4(\sigma^1) = 1$, $R_5(\sigma^1) = 2$, $R_6(\sigma^1) = 1$.

Прибор с максимальным отклонением от директивного срока: $s = 5$ ($s \in I_R(\sigma)$) – прибор с максимальным значением резерва.

Определим прибор $h \in I_\Delta(\sigma)$из «противоположного» множества, который имеет максимальное значение выступа: $h = 3$.

В таблице 6 приведены перестановки, которые являются допустимыми для пары приборов3-5.

Табл.6.Параметры допустимых перестановок для пары приборов 3-5

Пара работ	Δ_3	R_5	θ	$\Delta_3 + R_5 - \theta$	Величина улучшения	Тип перес-тановки
3-5	1	2	1	2	1	***А***
3-8	1	2	2	1	1	***Б*** *R*

Последствия этих двух перестановок одинаковы, выберем первуюиз них и выполним ее. На рисунке 3 изображено расписание σ^2, полученное в результате этой перестановки.

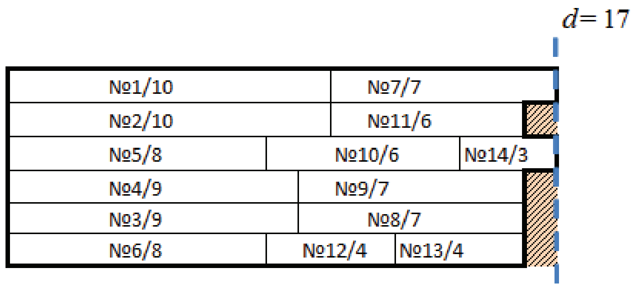

Рис.3 Расписание σ^2

Полученное расписание является оптимальным. Конец алгоритма.

9. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Исследованы свойства задачи составления допустимого расписания выполнения работ параллельными приборами с целью минимизации максимального отклонения от директивного срока моментов завершения приборами всех работ. Применяя методологию построения ПДС-алгоритмов, разработаны достаточные признаки оптимальности расписаний. На основе этих признаков определено множество перестановок, которые позволяют последовательно улучшать значение критерия. Разработана полиномиальная составляющая ПДС-алгоритма решения задачи. Приведен пример применения алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Senthil Kumar, Selladarui V., Raja K., Eleganova K. Ant Colony Approach for Makespan Minimization on Unrelated Parallel Machines: International Journal of Engineering Science & Technology, 2012, Volume 3, Issue 6.
2. Vairam S., Selladurai V. Permutation genetic algorithm based encoding method for parallel machine scheduling and balancing. AppliedMechanics&Materials, 2014, Issue 573, p. 368.
3. Поліноміальна складова ПДС-алгоритму розв’язання однієї задачі теорії розкладів / О. А. Павлов, О.Г. Жданова, О. Б. Місюра, М. О. Сперкач // Технологический аудит и резервы производства, 2013. — № 6/3 (14). — С.47—52.
4. Павлов О. А. Задача складання розкладу виконання завдань паралельними приладами з метою мінімізації максимуму відхиленнявід директивного терміну моментів завершення приладами усіх завдань / О. А. Павлов, М. О. Сперкач, О. Г. Жданова // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія «Технічні науки». – Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. – 2014. – Вип. 10. – с. 148–158.

Надійшла у першій редакції 21.03.2015, в останній - 24.05.2015.