

УДК 536.24

## Математическое моделирование тепловых процессов в теплоизлучающих цилиндрах на базе метода встречных функционалов

О. П. Демьянченко, Н. А. Сафонов, А. П. Слесаренко

*Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины,  
Азовский морской институт Одесской национальной морской академии*

Построена аналитическая структура решения нелинейной краевой задачи теплоизлучающего тела, точно удовлетворяющая граничным условиям Стефана-Больцмана. Построена последовательность математических моделей высокотемпературного теплового процесса, позволившая решение нелинейной краевой задачи теплоизлучающего тела свести к решению последовательности вариационных задач для встречных функционалов. Последовательность решений вариационных задач для встречных функционалов позволяет организовать итерационный процесс с двухсторонней сходимостью к точному решению задачи. Приводятся результаты решений конкретных задач с иллюстрацией двухсторонней сходимости к точному решению.

**Ключевые слова:** *встречные функционалы, численное решение, вычислительный эксперимент, теплоизлучающее тело, последовательность вариационных задач.*

Побудована аналітична структура розв'язку нелінійно крайової задачі тепловипромінюючого тіла, яка точно задовольняє граничним умовам Стефана-Больцмана. Побудована послідовність математичних моделей високотемпературного теплового процесу, що дозволила розв'язок нелінійної крайової задачі тепловипромінюючого тіла звести до вирішення послідовності варіаційних задач для зустрічних функціоналів. Послідовність розв'язків варіаційних задач для зустрічних функціоналів дозволяє організувати ітераційний процес з двосторонньою збіжністю до точного розв'язку задачі. Наводяться результати розв'язків конкретних завдань з ілюстрацією двосторонньої збіжності до точного розв'язку.

**Ключові слова:** *зустрічні функціонали, чисельний розв'язок, обчислювальний експеримент, тепловипромінююче тіло, послідовність варіаційних задач.*

An analytical structure have been built for solving nonlinear boundary value problem of the heat radiating body, which exactly satisfies the Stefan-Boltzmann boundary conditions. A sequence of mathematical models of high-temperature thermal process have been developed, which allowed the authors to reduce the solution of nonlinear boundary value problem of the heat radiating body to solving a sequence of variational problems for colliding functional. This sequence allows organizing an iterative process with two-way convergence to the exact solution of the problem. The results of specific problem solving, which illustrate the two-way convergence to the exact solution are presented.

**Key words:** *counter functionals, numerical solution, a computational experiment, heat radiating body, the sequence of variational problems.*

### 1. Общая постановка задачи и её актуальность

Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела относятся к классу актуальных нелинейных задач математической физики. Они адекватно описывают высокотемпературные тепловые процессы при остывании нагретых до высокой температуры тел в вакууме, при отливке массивных тел и другие высокотемпературные процессы. Данные задачи относятся к классу краевых

задач математической физики с внешней нелинейностью. Замена в таких задачах условия Стефана-Больцмана, моделирующего процесс теплоизлучения с части поверхности тела на условие Ньютона с постоянным коэффициентом теплоотдачи может привести к большим погрешностям при моделировании высокотемпературных процессов и является во многих случаях недопустимой.

Задачи теплообмена с внешней нелинейностью решались в основном численными методами, и только для простых одномерных задач удавалось получить точное решение задачи.

Аналитическое решение любой интересной с научно-технической точки зрения краевой задачи математической физики всегда предпочтительней большому массиву дискретных данных, полученных при решении этой задачи численными методами.

Поэтому любые новые научные результаты на пути разработки приближенных аналитических методов решения краевых задач для не простых областей с нелинейными граничными условиями представляют несомненный научный интерес.

Обзор работ по разработке приближенных аналитических методов решения линейных и нелинейных задач теплообмена приведен в работе [1]. Однако оставался ещё ряд важных нерешённых научных вопросов, связанных с точным учётом нелинейного граничного условия Стефана-Больцмана и построением математических моделей нелинейных тепловых процессов, позволяющих получать встречные приближенные аналитические решения нелинейных краевых задач теплоизлучающих тел, обеспечивающие двухстороннюю сходимость к точному решению задачи.

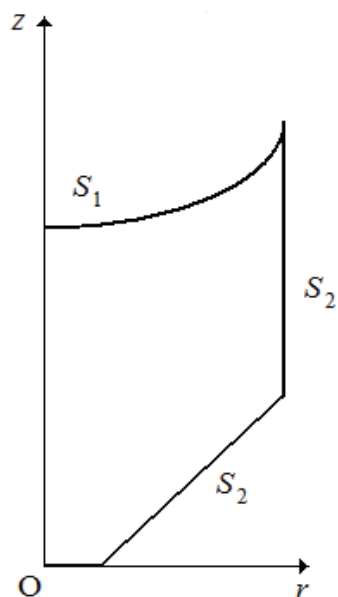


Рис.1. Область.

В данной статье на примере нелинейной краевой задачи для теплоизлучающего тела вращения (рис. 1.) неканонической формы рассмотрим вопросы построения приближённой аналитической структуры решения задачи [1]

$$\Delta T = 0, \quad T = T(r, z), \quad (1)$$

$$T|_{S_1} = T^* \quad (2)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \nu} + \text{Bi}_p T^4 \right) \Big|_{S_2} = \text{Bi}_p T_{\text{ср}}^4, \quad (3)$$

точно удовлетворяющей граничным условиям (2) и (3) при точном учёте геометрической информации о поверхностях  $S_1$  и  $S_2$  с помощью S-функций [2]. С учётом результатов работы [3] структуру решения задачи (1)-(3) построим в виде

$$T = \left[ A_1(\Phi) \omega_2^{-2} + T^* \omega_1^{-1} \left[ \omega_2^{-2} + \omega_1^{-1} \right]^{-1} \right], \quad (4)$$

$$\text{где } A_1(\Phi) = \Phi - \omega_2 \left[ D_1^{(2)} \Phi \right]_{S_2} + \omega_2 \left[ \text{Bi}_p \Phi^4 - \text{Bi}_p T_{\text{ср}}^4 \right]; \quad D_1^{(2)} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \omega_2}{\partial z}$$

$$\omega_1|_{S_1} = 0, \quad \omega_1 > 0, \quad (r, z) \in \Omega; \quad \omega_2|_{S_2} = 0, \quad \omega_2 > 0, \quad (r, z) \in \Omega, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \nu_2} \Big|_{S_2} = 1, \quad \nu_2 -$$

направление внутренней нормали к поверхности  $S_2$ ,  $\Phi = \sum_{k,m} C_{km} P_k(x) P_m(y)$ ,

$P_k(x) P_m(y)$  – полиномы Чебышева,  $C_{km}$  – неопределённые коэффициенты. Функции  $\omega_1$  и  $\omega_2$  могут быть построены по рекомендациям работы [2] с помощью S-функций.

Легко проверить, что структура решения (4) задачи (1)-(3) точно удовлетворяет условиям (2) и (3) так как  $T|_{S_1} = T^*$ ,  $T|_{S_2} = \Phi$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \nu} \Big|_{S_2} = -\text{Bi}_p \Phi^4 + \text{Bi}_p T_{\text{ср}}^4$ , тогда

$$\left( -\text{Bi}_p \Phi^4 + \text{Bi}_p T_{\text{ср}}^4 + \text{Bi}_p \Phi^4 \right) \Big|_{S_2} = \text{Bi}_p T_{\text{ср}}^4 \Big|_{S_2}.$$

Функции  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , построенные с помощью S-функций, являются непрерывно дифференцируемыми функциями, значит структура решения (4) задачи (1), (3) является консервативной, так как в этом случае соответствующий функционал для вариационной задачи является непрерывной и ограниченной функцией.

Подставляя структуру решения (4) в уравнение (1), получим

$$\Delta T = F(r, z), \quad (5)$$

где

$$F(r, z) = \Delta \left\{ \left[ A_1(\Phi) \omega_2^{-2} + T^* \omega_1^{-1} \left[ \omega_2^{-2} + \omega_1^{-1} \right]^{-1} \right] \right\}. \quad (6)$$

Так как функция  $F(r, z)$  является непрерывно дифференцируемой и ограниченной функцией, то задача (2), (3), (5) может выполнять роль модельной задачи для задачи (1)-(3), а структура решения (4) будет точным решением модельной задачи (2), (3), (5).

Таким образом, структура решения (4) задачи (1)-(3), в которой коэффициенты  $C_{km}$  определяются из условия наилучшего удовлетворения уравнению (1), может выполнять и вторую важную роль как точное решение модельной задачи (2), (3), (5).

Достоверность результатов решения задачи (1)-(3) может быть проверена на решении задачи (2), (3), (5) при задании функции  $\Phi(r, z)$  в виде замкнутого аналитического выражения или в виде произведения элементарных функций.

## 2. Структурная линеаризация граничных условий Стефана-Больцмана в краевой задаче теплоизлучающего полого бесконечного цилиндра

Рассмотрим распределение температуры в бесконечном полом цилиндре, внутренняя поверхность которого поддерживается при постоянной температуре  $T^* = 2000$ , а внешняя – излучает тепло по закону Стефана-Больцмана в окружающую среду нулевой температуры. Математическая постановка этой задачи выглядит в виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0, \quad r \in (a, b), \quad (7)$$

$$T = T^*, \quad r = a, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \text{Bi}_p T^4 = 0, \quad r = b, \quad (9)$$

где  $r = r_1 l^{-1}$ ,  $T = T_1 T_0^{-1}$ ,  $a = a_1 l^{-1}$ ,  $b = b_1 l^{-1}$ ,  $\text{Bi}_p = \chi T_0^3 l$ ,  $T^* = T_1^* T_0^{-1}$ .

Нелинейную краевую задачу (7)-(9) сведём к последовательности линейных задач с зависящими от координат коэффициентами теплоотдачи в условиях Ньютона. Коэффициенты теплоотдачи в условиях Ньютона определяются из решений линеаризованных задач на предыдущих итерациях таким образом, что математические модели в построенной последовательности попеременно моделируют процесс нелинейного радиационного теплообмена с более или менее высокой интенсивностью по отношению к исходной нелинейной модели теплообмена. Указанная последовательность линеаризованных задач имеет вид

$$T_{11} = T^*, \quad r = a, \quad (10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_{21}}{\partial r} \right) = 0, \quad a < r < b, \quad (11)$$

$$T_{21} = T^*, \quad r = a, \quad (12)$$

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial v} + \text{Bi}_p T_{11}^3 T_{21} = 0, \quad r = b, \quad (13)$$

$$T_{31} = 0,5(T_{11} + T_{21}), \quad a < r < b \quad (14)$$

для  $\gamma = 2,3,4,\dots$  в общем виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_{1j}}{\partial r} \right) = 0, \quad a < r < b, \quad (15)$$

$$T_{1j} = T^*, \quad r = a, \quad (16)$$

$$\frac{\partial T_{1j}}{\partial v} + \text{Bi}_p T_{3,j-1}^3 T_{1j} = 0, \quad r = b, \quad (17)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_{2j}}{\partial r} \right) = 0, \quad a < r < b, \quad (18)$$

$$T_{2j} = T^*, \quad r = a, \quad (19)$$

$$\frac{\partial T_{2j}}{\partial v} + \text{Bi}_p T_{1,j}^3 T_{2j} = 0, \quad r = b, \quad (20)$$

$$T_{3j} = 0,5(T_{1j} + T_{2j}), \quad a < r < b, \quad (21)$$

где  $j$  – номер итерации.

### 3. Структурный метод в построении встречных функционалов

Структуры решения краевых задач (11)-(13), (15)-(17) и (18)-(20) представим в виде

$$T_{ij} = \frac{T^* r^2}{a^2} + \sum_{m=0}^n C_m^{(ij)} (r^2 - a^2) r^{2m} = \Phi_0 + u_{ij}. \quad (22)$$

Последовательность линейных краевых задач для функций  $T_{21}$ ,  $T_{1j}$  и  $T_{2j}$  можно привести к последовательности задач о минимуме функционалов:

$$I_{21} = \int_a^b \left( \frac{\partial T_{21}}{\partial r} \right)^2 r dr + \text{Bi}_p T_{11}^3(b) T_{21}^2(b) b, \quad (23)$$

для  $j = 2,3,4,\dots$

$$I_{1j} = \int_a^b \left( \frac{\partial T_{1j}}{\partial r} \right)^2 r dr + \text{Bi}_p T_{3,j-1}^3(b) T_{1j}^2(b) b, \quad (24)$$

$$I_{2j} = \int_a^b \left( \frac{\partial T_{2j}}{\partial r} \right)^2 r dr + \text{Bi}_p T_{1,j}^3(b) T_{2j}^2(b) b. \quad (25)$$

#### 4. Вычислительный эксперимент

Начальное приближение описанных итераций определяется формулой (10). Коэффициенты  $C_m^{(ij)}$  для последовательности вариационных задач (23)-(25) определялись из соответствующих систем линейных алгебраических уравнений на каждом шаге. В табл. 1 представлены значения коэффициентов  $C_m^{(ij)}$  ( $i=1,2,3; j=1,2,3,\dots; m=0,1,2$ ) при  $a_1 = 0,1875$  м;  $b_1 = 0,25$  м;  $l = 1$  м  $\text{Bi}_p = 0,5896 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{м} \cdot \text{К}^3}$ ;  $T_1^* = 2000$ ;  $T_0 = 1$  К. В табл. 2 приведены значения температуры по формуле точного решения  $T_T = 2000 \left( 1 - 0,5734044 \ln \frac{r}{a} \right)$  и значения  $T_{3j}(r)$  для  $j = 1,2,3,\dots$  в отдельных точках.

Из табл. 1 и 2 видно, что предложенный процесс сходится и полученное решение задачи (7)-(9) хорошо согласуется с точным решением, о чём свидетельствует представленная погрешность в последней строке табл. 2.

Табл. 1. Значения коэффициентов  $C_m^{(ij)}$  для задачи теплоизлучения в полном цилиндре

$i \setminus j$	1	2	3	4
1	-56888,8	-85059,855	-81725,639	-82145,524
	0,0	355342,89	313285,74	31852,08
	0,0	-1925244,3	-1697378,9	1726074,5
2	93603,281	-80651,133	-82283,918	-82075,861
	488335,48	229732,18	320327,78	317703,39
	-2645796,6	-1623946,1	-1735532,8	-1721313,8
3	-76246,085	-82855,494	-82004,779	-82110,693
	244167,74	327537,53	316806,76	318142,73
	-1322898,3	-1774595	-1716455,8	-1723694,1

Табл. 1. (Продолжение) Значения коэффициентов  $C_m^{(ij)}$  для задачи теплоизлучения в полом цилиндре

$i \setminus j$	5	6	7	8
1	-82093,094	-82099,648	-82098,829	-82098,931
	317920,75	318003,42	317993,11	317994,37
	-1722491,5	-1722939,3	-1722883,5	-1722890,3
2	-82101,803	-82098,560	-82098,965	-82098,914
	318030,60	317989,70	317994,80	317994,14
	-1723086,6	-1722865,1	-1722892,6	-1722889,0
3	-82097,448	-82099,104	-82098,897	-82098,922
	317975,68	317996,56	317993,95	317994,26
	-1722789,0	-1722902,2	-1722902,2	-1722889,7

Табл. 2. Значения температуры в теплоизлучающем полом цилиндре

$T_{3j} \setminus r$	0,2000	0,2125	0,2250	0,2375	0,2500
T31	1943,2936	1889,7099	1839,3315	1791,8853	1746,6797
T32	1923,9315	1852,0520	1784,4721	1720,8258	1660,1849
T33	1926,4236	1856,8901	1791,5332	1729,9720	1671,3179
T34	1925,1134	1856,2956	1790,6541	1728,8333	1669,9318
T35	1926,1522	1856,3711	1790,7641	1728,9757	1670,1051
T36	1926,1473	1856,3616	1790,7503	1728,9579	1670,0830
T37	1926,1479	1856,3628	1790,7520	1728,9601	1670,0862
T38	1926,1478	1856,3627	1790,7518	1728,9599	1670,0858
T39	1926,1479	1856,3627	1790,7518	1728,9599	1670,0858
T3,10	1926,1479	1856,3627	1790,7518	1728,9599	1670,0858
TT	1925,9868	1856,4618	1790,9120	1728,9074	1670,0838
$\ T_T - T_n\ _{2,d}$	0,1611	0,0991	0,1602	0,05250	0,002

Результаты, представленные в табл. 2 иллюстрируют эффективность предложенного подхода и достоверность данных вычислительного эксперимента.

### 5. Вариационно-структурный метод в построении встречных приближённых аналитических решений краевой задачи теплоизлучающего полого конечного цилиндра

Определение поля температур конечного полого цилиндра, температура внутренней поверхности которого поддерживается при постоянном значении  $T^*$ , нижнее основание ( $z = 0$ ) – теплоизолировано, а остальная поверхность S

цилиндра излучает тепло по закону Стефана-Больцмана, сводится к решению нелинейной краевой задачи

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad a < r < b, \quad 0 < z < 1, \quad (26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad (27)$$

$$T = T^*, \quad r = b, \quad (28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \nu} + \text{Bi}_p T^4 = 0 \quad \text{на } S, \quad (29)$$

где  $\nu$  – направление внешней нормали к поверхности  $S$ ,  $z = z_1 l^{-1}$ .

Решение этой задачи сведём к решению последовательности линейных задач теплопроводности, в которых нелинейное краевое условие (29) заменяются линейными краевыми условиями. Относительные коэффициенты теплоотдачи на каждом шаге итерационного процесса получают как функции координат на основе определения температурного поля на предыдущей итерации. В этом формально состоит метод линейных итераций решения нелинейных краевых задач теплоизлучающего тела. Последовательность линейных краевых задач для задачи (26)-(29) имеет вид

$$\Delta T_{ij} = 0, \quad a < r < b, \quad 0 < z < 1, \quad (30)$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad (31)$$

$$T = T^*, \quad r = a, \quad (32)$$

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial \nu} + \text{Bi}_p T_{P_{ij}}^3 T_{ij} = 0 \quad \text{на } S, \quad (33)$$

$T_{3_j} = 0, 5(T_{1_j} + T_{2_j})$ ,  $a < r < b$ ,  $0 < z < 1$ ,  $P_{1_j} \rightarrow 3, j-1$ ,  $P_{2_j} \rightarrow 1, j$ , где  $j$  – номер итерации.

Структуры решения краевых задач (30)-(33) представим в виде:

$$T_{ij} = \frac{T^* r^2}{b^2} + \sum_{k,m} C_{km}^{(ij)} \Phi_{km}(r, z) = f + \Psi_{ij}. \quad (34)$$

Последовательность краевых задач для  $\Psi_{ij}$  представим так

$$\Delta \Psi_{ij} = -\frac{4T^*}{b^2}, \quad a < r < b, \quad 0 < z < 1, \quad (35)$$

$$\frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad (36)$$

$$\Psi_{ij} = 0, \quad \text{на } S_1 (r = a) \quad (37)$$

$$\frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial \nu} + \text{Bi}_p T_{P_{ij}}^3 \Psi_{ij} = -\left( \frac{\partial f}{\partial \nu} + \text{Bi}_p T_{P_{ij}}^3 f \right) = f_{ij} \quad \text{на } S_2. \quad (38)$$



Краевые задачи (35)-(38) можно свести к задачам о минимуме встречных функционалов:

$$I[\Psi_{ij}] = \int_b^a \int_0^1 \left\{ [\text{grad} \Psi_{ij}]^2 - \frac{8T^*}{b^2} \Psi_{ij} \right\} r dr dz + \int_S (Bi_p T_{p_{ij}}^3 \Psi_{ij}^2 - 2f_{ij} \Psi_{ij}) dS. \quad (39)$$

### 6. Анализ сходимости вычислительного процесса при структурной линеаризации нелинейного граничного условия Стефана-Больцмана

Нахождение неопределённых коэффициентов  $C_{km}^{(ij)}$  для последовательности вариационных задач (39) сводится к решению соответствующих систем Ритца [4], представлены значения коэффициентов  $C_{ks}^{(ij)}$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4, 5; k + s = 0, 2$ ). Табл. 3 при  $a_1 = 0,1875$  м;  $b_1 = 0,25$  м;  $Bi_p = 0,5896 \cdot 10^{-9} \frac{1}{\text{м} \cdot \text{К}^3}$ ;  $T_1^* = 2000$  К. содержит значения температуры  $T_j$  в отдельных точках цилиндра приближённого решения и значения для  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ , полученных с использованием аппроксимации полиномами чётной степени. Для сравнения температур в плоскости  $z = 0$  приведём значения точного решения для соответствующего бесконечного цилиндра:  $T(0,2) = 1926$ ;  $T(0,225) = 1791$ ;  $T(0,25) = 1670$ .

Табл. 3. Значения температуры в теплоизлучающем полом цилиндра

$r$	$T_j$	$z$					
		0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,200	$T_1$	1944,7	1944,4	1943,6	1942,1	1940,2	1937,6
	$T_2$	1925,3	1925,0	1924,0	1922,5	1920,9	1917,4
	$T_3$	1927,0	1927,0	1926,7	1924,1	1922,9	1919,9
	$T_4$	1927,4	1927,1	1926,2	1924,6	1922,4	1919,6
	$T_5$	1927,5	1927,2	1926,2	1924,7	1922,5	1919,7
0,225	$T_1$	1841,1	1840,2	1837,5	1833,0	1826,7	1818,5
	$T_2$	1785,6	1784,6	1781,5	1776,5	1769,4	1760,3
	$T_3$	1792,3	1791,3	1788,3	1783,3	1776,2	1767,7
	$T_4$	1791,7	1790,7	1787,7	1782,7	1775,8	1766,8
	$T_5$	1791,9	1790,9	1787,9	1782,9	1775,9	1766,9
0,250	$T_1$	1754,0	1752,4	1747,6	1739,6	1728,5	1714,1
	$T_2$	1668,4	1666,6	1661,2	1652,3	1639,7	1623,6
	$T_3$	1675,8	1677,0	1672,7	1663,8	1651,2	1635,3
	$T_4$	1678,0	1676,2	1670,9	1662,1	1649,7	1633,8
	$T_5$	1678,2	1676,4	1671,1	1662,3	1649,9	1634,0

### 7. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Предложенная в статье приближённая аналитическая структура решения (4) нелинейной краевой задачи теплоизлучающего тела (1)-(3) универсальна относительно изменения геометрии частей поверхности тела. Она может быть использована как для получения приближённого аналитического решения нелинейной краевой задачи теплоизлучающего тела, так и для выполнения роли точного решения модельной задачи. В этом случае отличие модельной нелинейной задачи от научно-практической состоит только в том, что в модельной задаче будет уравнение Пуассона, а в исходной задаче – уравнение Лапласа. Геометрия исследуемой области и граничные условия остаются неизменяющимися. Неопределённые коэффициенты  $C_{ks}$  структуры решения могут быть определены из условия наилучшего удовлетворения уравнения (1) различными способами, включая определение коэффициентов  $C_{ks}$  из соответствующих систем нелинейных алгебраических уравнений. Вариант линеаризации условий Стефана-Больцмана рассмотренный в статье позволил свести решение исходной задачи для теплоизлучающего тела к решению последовательности вариационных задач для встречных функционалов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Мацевитый Ю. М. Некорректные многопараметрические задачи теплопроводности и регионально-структурная регуляризация их решений / Ю. М. Мацевитый, А. П. Слесаренко. – Киев : Наукова думка, 2014. – 293 с.
2. Слесаренко А. П. S-функции в обратных задачах дифференциальной геометрии и управлении образования форм / А. П. Слесаренко // Вост.-Европ. журнал передовых технологий. – 2012. – № 1/4 (55). – С. 4-10.
3. Слесаренко А. П. Математическое моделирование тепловых процессов в телах сложной формы при нестационарных граничных условиях / А. П. Слесаренко // Пробл. машиностроения. – 2002. – Т. 5, № 4. – С. 72-80.
4. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М : Наука, – 1977. – 456 с.