УДК 519.65

Идентификация параметров процесса, описываемого гиперболическим тангенсом

Е. В. Величко
*Таврический государственный агротехнологический университет,
г. Мелитополь, Украина*

Метод наименьших квадратов был адаптирован на класс функций, зависящих от трех параметров и содержащих гиперболический тангенс. Подобные задачи возникают при исследовании кривых буксования мобильных энергетических устройств. В случае, когда абсциссы точек образуют арифметическую прогрессию, удалось получить расчетные формулы в явном виде. Приведен пример реализации предложенного метода, результаты которого совпали с тестовой функцией.

Ключевые слова: *метод наименьших квадратов, гиперболический тангенс, кривая буксования, аппроксимация, функция невязки.*

Метод найменших квадратів був адаптований на клас функцій, що залежать від трьох параметрів і містять гіперболічний тангенс. Подібні задачі виникають при дослідженні кривих буксування мобільних енергетичних пристроїв. В випадку, коли абсциси точок утворюють арифметичну прогресію, вдалося отримати розрахункові формули в явному вигляді. Наведено приклад реалізації запропонованого методу, результати якого збіглися з тестовою функцією.

Ключові слова: *метод найменших квадратів, гіперболічний тангенс, крива буксування, апроксимація, функція нев'язки.*

Least squares method has been adapted to the class of functions, which depend on three parameters and contain the hyperbolic tangent. Similar problems arise in the study of curves of slipping for mobile power devices. In the case where the abscissae of points form an arithmetic progression, the authors were able to receive the explicit formulas. An example of the proposed methodis presented, whose results have coincided with the test function.

Key words: *ordinary least squares, the hyperbolic tangent, the curve slipping, approximation, the function of the residual.*

1. Введение

Метод наименьших квадратов – это эффективный способ выбирать из функций заданного вида ту, которая наилучшим образом приближает экспериментальные данные, заданные системой точек. Наиболее часто с помощью МНК получают линейную аппроксимацию, но находят свое применение и аппроксимации более высоких степеней: квадратичные, кубические и так далее [1-2].

Для классического метода наименьших квадратов требуется, чтобы искомая функция являлась линейной относительно определяемых параметров. Так, при аппроксимации многочленами n-й степени функция берется в виде $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, где параметры a_k вычисляются из условия минимума квадратичной невязки. Для функций другого вида иногда удается провести преобразование, линеаризующее эти функции относительно параметров. Так, например, если мы ищем функцию вида $f(x)=ae^{bx}$, то прологарифмировав это соотношение, мы получим равенство $A+b\ln x=\ln f(x)$, в которое искомые параметры $A=\ln a$ и b входят линейно.

Однако на практике встречаются и случаи, когда осуществить такое преобразование не представляется возможным. Одним из таких случаев есть аппроксимация экспериментальных данных функцией $f(x)=A(1+th(a+bx))$, которая используется для аппроксимации кривых буксования мобильных энергетических устройств [3].

2. Постановка задачи

В результате эксперимента был получен набор точек $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$. С помощью метода наименьших квадратов требуется подобрать кривую вида $f(x)=A(1+th(a+bx))$, наилучшим образом приближающая исходную функцию (для определения которой проводился эксперимент).

3. Основная часть

Сразу сделаем предварительные замечания. Поскольку область значения функции $1+th(a+bx)$ есть интервал $(0,2)$, то, отсюда следует, что все y_i одного знака, и этот знак совпадает со знаком числа A, и кроме того, для всех $i\le n$ имеет место неравенство $|y_i|<2|A|$.

Для начала преобразуем выражение

$$y=A(1+th(a+bx)) \tag{1}$$

к следующему виду: $th(a+bx)=\frac{y}{A}-1$.

Пользуясь тем, что обратной к функции $th(x)$ есть функция $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, перепишем (1) в эквивалентном виде

$$a+bx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{y}{A}-1}{1-\frac{y}{A}+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{y}{2A-y}.$$

Умножим обе части на 2 и введем обозначения

$$\alpha=2a,\quad \beta=2b,\quad r=2A. \tag{2}$$

Получим запись формулы (1) в виде

$$\alpha+\beta x=p(y,r), \tag{3}$$

где $p(y,r)=\ln\frac{y}{r-y}$.

Рассмотрим два случая.

1 случай. Величина A известна.

В этом случае нам известна и величина $r=2A$, и мы можем вычислить значение $p_i=p(y_i,r)$. Составляем, как принято в МНК, функцию невязки

$$F=\frac{1}{2}\sum\left(\alpha+\beta\,x_i-p_i\right)^2\,, \qquad (4)$$

находим ее минимум, вычисляя частные производные по α и β, и приравниваем их к нулю.

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}=\sum\left(\alpha+\beta\,x_i-p_i\right)=0\,,\ \frac{\partial F}{\partial\beta}=\sum\left(\alpha+\beta\,x_i-p_i\right)x_i=0\,. \qquad (5)$$

Введем обозначения

$$X=\sum x_i\,, X_2=\sum x_i^2\,, P=\sum p_i\,, P_x=\sum p_i x_i\ . \qquad (6)$$

Все величины в записи (6) могут быть вычислены по исходным данным. Тогда система (5) перепишется в следующем виде:

$$\begin{cases}\alpha n+\beta X=P,\\ \alpha X+\beta X_2=P_x.\end{cases} \qquad (7)$$

Решение системы (7) имеет вид:

$$\alpha=\frac{\Delta_\alpha}{\Delta},\ \beta=\frac{\Delta_\beta}{\Delta}\,, \qquad (8)$$

где

$$\Delta=nX_2-X^2\,,\ \Delta_\alpha=PX_2-P_xX\,,\ \Delta_\beta=nP_x-PX\ . \qquad (9)$$

Таким образом, в этом случае задача решена.

2 случай. Величина A не известна.

Предлагается два способа определения величины $r=2A$, после чего задача будет сведена к первому случаю.

Способ 1.

Предварительно вычислим производные:

$$\frac{\partial p_i}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{y_i}{r-y_i}\right)=-\frac{1}{r-y_i}=-q_i\ . \qquad (10)$$

Здесь введено обозначение $\dfrac{1}{r-y_i}=q_i$.

Поскольку величина r не известна, то вычислим производную от функции невязки F по переменной r:

$$\frac{\partial F}{\partial r}=\sum\left(\alpha+\beta\,x_i-p_i\right)q_i=0\ . \qquad (11)$$

Введем обозначения:

$$Q=\sum q_i\,, Q_x=\sum x_i q_i\,,\ Q_p=\sum p_i q_i\ . \qquad (12)$$

Тогда уравнение (11) принимает вид:

$$\alpha Q+\beta Q_x-Q_p=0\ . \qquad (13)$$

Подставляя (8) в (13), и умножив на Δ, получим окончательное уравнение для нахождения r:

$$\left(PX_2-P_xX\right)Q+\left(nP_x-PX\right)Q_x-\left(nX_2-X^2\right)Q_p=0\,, \qquad (14)$$

(слева в этом равенстве находится функция от r, поскольку величины P,Q,P_x,Q_x,Q_p зависят от r).

Если все y_i положительны, то на интервале $r \in \left(\max\limits_i y_i, \infty \right)$ уравнение (14) имеет единственное решение, которое можно найти любым численным методом.

Аналогично, если все y_i отрицательны, то на интервале $r \in \left(-\infty, \min\limits_i y_i \right)$ уравнение (14) имеет единственное решение, которое также можно найти численно.

Видно, что предлагаемый способ нахождения величины r является достаточно громоздким. Если среди заданных точек есть три такие, абсциссы которых образуют арифметическую прогрессию, то можно получить явную формулу для вычисления r. Ниже это проделано.

Способ 2.

Пусть $x_1, x_2.x_3$ образуют арифметическую прогрессию. Тогда из системы:

$$\alpha + \beta x_1 = \ln \frac{y_1}{r - y_1}, \alpha + \beta x_2 = \ln \frac{y_2}{r - y_2}, \alpha + \beta x_3 = \ln \frac{y_3}{r - y_3}$$

найдем r. Для этого вычтем из 3-го уравнения 2-е, из 2-го уравнения 1-е:

$$\beta(x_3 - x_2) = \ln \frac{y_3(r - y_2)}{y_2(r - y_3)}, \ \beta(x_2 - x_1) = \ln \frac{y_2(r - y_1)}{y_1(r - y_2)}.$$

Левые части этих выражений равны, поскольку $x_1, x_2.x_3$ образуют арифметическую прогрессию. Следовательно, равны и выражения под логарифмами. Получаем уравнение:

$$\frac{y_3(r - y_2)}{y_2(r - y_3)} = \frac{y_2(r - y_1)}{y_1(r - y_2)},$$

которое сводится к квадратному, один из корней равен нулю (и он нам не подходит), а второй корень дает искомое значение r:

$$r = \frac{y_2^2(y_1 + y_3) - 2y_1y_2y_3}{y_2^2 - y_1y_3}. \tag{15}$$

Для точек с номерами m,k,s, абсциссы которых образуют арифметическую прогрессию, аналогичные рассуждения приводят к общей формуле.

$$r = \frac{y_k^2(y_m + y_s) - 2y_my_ky_s}{y_k^2 - y_my_s}. \tag{16}$$

Можно использовать одну тройку точек. Но если все x_i образуют арифметическую прогрессию, то для повышения точности, можно вычислить коэффициенты r для точек с номерами $1,2,3$, потом для точек с номерами $2,3,4$ и так далее, и найти среднее арифметическое полученных значений. После определения r величины α и β находятся по формулам (8), а искомые величины определяются по формулам (2).

4. Пример расчета

В качестве тестовой возьмем функцию $y = 0.2(1 + th(2 + 0.4x))$, график которой изображен на рис 1.

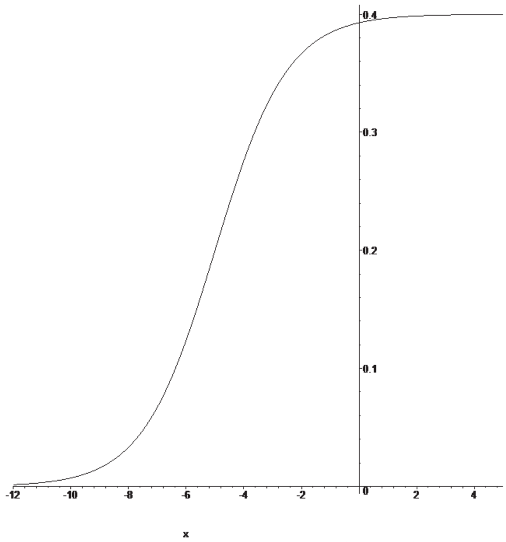

Рис.1. График функции $y = 0.2(1 + th(2 + 0.4x))$

Выберем 6 точек с абсциссами $x_i = -12 + 2i$, $i = 1..6$. В качестве ординат возьмем значения $y_i = y(x_i) + 0.02\sin i$, где слагаемое $0.02\sin i$ вводится как случайная погрешность. В таблице приведены значения абсцисс и ординат выбранных точек, а так же, для сравнения, ординаты $\bar{y}_i = y(x_i)$ соответствующих точек, лежащие на тестовой кривой.

Таблица 1. Значение абсцисс и ординат тестовой функции

i	1	2	3	4	5	6
x_i	-10	-8	-6	-4	-2	0
y_i	0.0073	0.0337	0.1242	0.2750	0.3663	0.3928
$\bar{y}_i$	0.0072	0.0333	0.1240	0.2760	0.3667	0.3928

Величина r считалась как среднее арифметическое значений r, полученное по четырем наборам точек с номерами 1,2,3, с номерами 2,3,4, с номерами 3,4,5 и с номерами 4,5,6:

$$r = 0.25(0.3823 + 0.3994 + 0.4007 + 0.4002) = 0.3956 .$$

В результате расчетов получены значения $A = 0.1978, a = 2.2656, b = 0.4342$.

На рис.2 изображены график тестовой и полученной в результате расчетов функции.

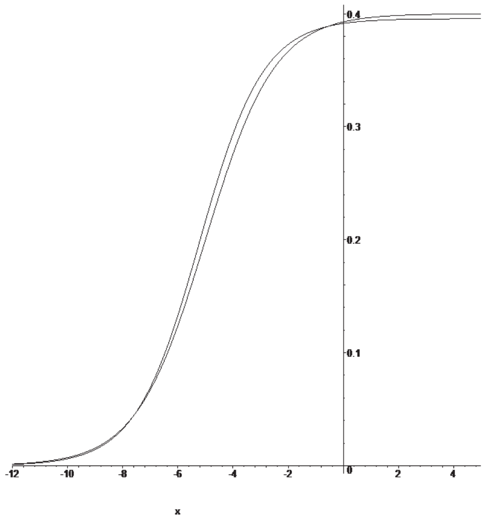

Рис.2. Графики тестовой функции и расчетной

Отметим, что при расчетах, в которых брались точки на самой тестовой кривой, получалась функция, совпадающая с тестовой в пределах точности вычислений.

5. Выводы

В статье показано, что метод наименьших квадратов может применяться в тех случаях, когда искомую функцию нельзя представить в виде линейной комбинации искомых параметров. Приведены результаты для функции, содержащей гиперболический тангенс, которая используется для описания кривых буксования мобильных энергетических устройств. Отмечено, что в случае, когда абсциссы точек образуют арифметическую прогрессию, удается получить расчетные формулы в явном виде. Полученные результаты могут быть использованы для определения точек оптимума, методами, предложенными в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математической теории обработки наблюдений / Ю. В.Линник // Фізматлит. – 1958. – 337с.
2. Лоусон Ч. Л., Хенсон Р. Д. Численное решение задач метода наименьших квадратов / Ч. Л. Лоусон, Р. Д. Хенсон. – Пер. с англ. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1986. – 232с.
3. Сураев Н. Г. Исследование тягового КПД и буксования тракторов / Н. Г. Сураев // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1991. – №4. – С. 16-20.
4. Величко Е. В. Определение точек оптимума двух классов двузонных функций / Е. В. Величко, В. Т. Надыкто // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2014. – вып. 5. — Режим доступу: http://engjournal.ru/catalog /fundamentals/math/1298.html .

Надійшла - 07.01.2015.